

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-32-42

**КРАЕВОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ
НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ***

© 2020 г. **Фирсанов Вал.В.¹, Зоан К.Х.^{1,2}, Чан Н.Д.²**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

²*Вьетнамский государственный технический университет
им. Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам
k906@mai.ru, dqhieu57@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.12.2019

Представлен вариант уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния круглых пластин с симметрично изменяющейся толщиной по произвольному закону в радиальном направлении. Уравнения состояния пластины описываются соотношениями трехмерной теории упругости. Искомые перемещения аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной плоскости координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа – Лява. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами. При определении поперечных нормальных и касательных напряжений используется прямое интегрирование уравнений равновесия трехмерной теории упругости. Для изотропной круглой пластины переменной толщины методом разложения в ряды Фурье получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменчивости толщины на напряженно-деформированное состояние пластины.

Рассматриваются примеры расчета напряженного состояния круглой пластины с толщиной, изменяющейся по линейному и параболическому законам, под действием распределенной нагрузки. Для решения сформулированной краевой задачи применяется метод конечных разностей. Приведены результаты сравнения напряжений по уточненной и классической теориям. Установлено, что при исследовании напряженного состояния в зонах его искажения (соединения, зоны локального нагружения и др.) следует использовать уточненную теорию, так как соответствующие дополнительные напряжения типа «погранслой» оказываются одного порядка с величинами основного (внутреннего) напряженного состояния. Это важно для повышения достоверности расчетов на прочность таких элементов авиационно-ракетных конструкций, как силовые корпуса летательных аппаратов, их различные переходные зоны и соединения, а также объектов в различных отраслях машиностроения.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-00849).

Ключевые слова: круглая пластина, переменная толщина, вариационный принцип Лагранжа, краевая задача, ряды Фурье, метод конечных разностей, напряженно-деформированное состояние «погранслои», поперечные нормальные напряжения.

Введение

Круглые пластины переменной толщины широко применяются в машиностроении, в том числе в авиационной и ракетной отраслях. Поэтому актуальной представляется задача повышения достоверности методов расчета пластин за счет учета трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС) в зонах его искажения, то есть соединений, локального нагружения и др., где имеет место НДС типа «погранслои». В настоящее время инженерные расчеты указанных конструкций базируются на результатах классической теории тонких пластин и оболочек типа Кирхгофа – Лява [1–4]. В основу этой теории положена гипотеза о сохранении нормального элемента, позволяющая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной.

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластин и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру – относительной толщине трехмерного тела – и в последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости. С помощью этого метода в публикациях [5–8] были сформулированы варианты приближенных теорий, уточняющих результаты классической теории во внутренних областях и в узких краевых зонах. Однако в статье [9] было показано, что решение сформулированных в [5–8] краевых задач сопряжено с математическими трудностями, не позволяющими получить их решение в аналитической форме. В связи с этим в [10, 11] прямой путь решения задачи был заменен на вариационно-асимптотический, в соответствии с которым для решения краевых задач о дополнительном НДС типа «погранслои» применяется вариационный метод Власова – Канторовича. С помощью вариационно-асимптотического метода построена уточненная теория расчета НДС прямоугольных пластин постоянной и переменной толщины.

Другой подход [12, 13] к построению уточненной теории, называемый энергетически согласованным, заключается в разложении перемещений в полиномиальные ряды. При этом искомые перемещения раскладываются в ряды по нормальной координате и формулируются условия согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в разложениях перемещений по тангенциальным и поперечному направлениям.

Также следует отметить статьи [10–12], в которых рассматриваются методы уточненного расчета прямоугольных пластин переменной толщины. В [14–18] рассматриваются другие методы уточненного расчета пластин и оболочек.

В настоящей статье построена краевая задача уточненной теории круглой пластины переменной толщины с помощью вариационного принципа Лагранжа и разложения искомых перемещений по толщине. В качестве примера рассматривается расчет НДС круглой изотропной пластины, симметричной относительно срединной плоскости, произвольной переменной толщины в радиальном направлении под действием распределенной нагрузки. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины по уточненной и классической теориям.

1. Уравнения равновесия уточненной теории круглых пластин

На рис. 1 изображена круглая изотропная пластина с симметричной относительно срединной плоскости толщиной в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Пластина нагружена поперечной распределенной нагрузкой $q(r, \varphi)$. Обозначим через a и b – внешний и внутренний радиусы пластины, а через $2h(r)$ – ее переменную толщину. Внешний и внутренний края пластины $r = a$ и $r = b$ жестко защемлены.

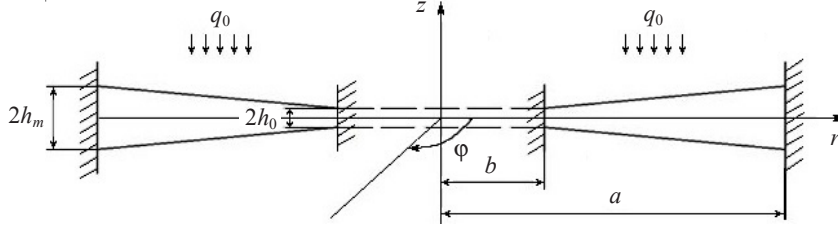


Рис. 1. Круглая пластина с отверстием

В соответствии с [10] перемещения пластины представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi, z) &= u_0(r, \varphi) + u_1(r, \varphi)z + u_2(r, \varphi) \frac{z^2}{2!} + u_3(r, \varphi) \frac{z^3}{3!}, \\ U_2(r, \varphi, z) &= v_0(r, \varphi) + v_1(r, \varphi)z + v_2(r, \varphi) \frac{z^2}{2!} + v_3(r, \varphi) \frac{z^3}{3!}, \\ U_3(r, \varphi, z) &= w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)z + w_2(r, \varphi) \frac{z^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1)$$

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1 \right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_3}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения деформаций подставим формулы (1) в соотношения (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 u_i \frac{z^i}{i!} \right), \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z, \\ \gamma_{r\varphi} &= \sum_{i=0}^3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} v_i \right) \frac{z^i}{i!}, \\ \gamma_{rz} &= \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) z + \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \frac{z^2}{2!}, \\ \gamma_{\varphi z} &= \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) + \left(v_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) z + \left(v_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right) \frac{z^2}{2!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, & \sigma_\varphi &= \lambda\varepsilon_r + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, & \tau_{r\varphi} &= G_0\gamma_{r\varphi}, & \tau_{rz} &= G_0\gamma_{rz}, & \tau_{\varphi z} &= G_0\gamma_{\varphi z},\end{aligned}\quad (4)$$

где коэффициенты G_0, λ – упругие постоянные изотропного материала пластины. Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия для пластины находим на основании вариационного принципа Лагранжа

$$\begin{aligned}\iiint (\sigma_r \delta\varepsilon_r + \sigma_\varphi \delta\varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{r\varphi} \delta\gamma_{r\varphi} + \tau_{rz} \delta\gamma_{rz} + \tau_{\varphi z} \delta\gamma_{\varphi z}) dr d\varphi dz - \\ - \iint q(r, \varphi) \delta[w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)h + w_2(r, \varphi)h^2/2] dr d\varphi = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя выражения (3), (4) в (5) с учетом формул (1), получим систему головных уравнений уточненной теории для рассматриваемой пластины:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{r\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} &= p_z^0, \\ \frac{\partial M_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi^i - H_{rz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^i - H_{\varphi z}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} - H_z^1 &= p_z^1, \\ \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} - H_z^2 &= p_z^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}(N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}) &= \int_{-h}^h (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) dz, \\ (M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i) &= \int_{-h}^h (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, Q_z^i) &= \int_{-h}^h (\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = \frac{qh^i}{i!},\end{aligned}$$

где $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i, H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, Q_z^i$ – обобщенные внутренние силовые факторы, физическая интерпретация которых в рамках уточненной теории дана в [13]. Следует отметить, что восемь из тринадцати внутренних силовых факторов, а именно $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r, M_\varphi, M_{r\varphi}$, аналогичны соответствующим силовым факторам, принятым в классической теории тонких круглых пластин в общем случае нагружения, когда рассматривается изгиб пластины и ее плоское

напряженное состояние. Соответствующие граничные условия при $r = a$ и $r = b$ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_r &= \bar{N}_r \vee u_0 = \bar{u}_0, & N_{r\varphi} &= \bar{N}_{r\varphi} \vee v_0 = \bar{v}_0, & Q_{rz} &= \bar{Q}_{rz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_r^i &= \bar{M}_r^i \vee u_i = \bar{u}_i, & M_{r\varphi}^i &= \bar{M}_{r\varphi}^i \vee v_i = \bar{v}_i, & i &= 1, 2, 3, \\ M_{rz}^i &= \bar{M}_{rz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, & i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где величины с верхней чертой обозначают внешние силовые факторы, действующие по боковым граням пластины.

2. Решение краевой задачи круглой пластины методом конечных разностей

Рассматривается изотропная круглая пластина с центральным отверстием, толщина которой определяется функцией $h(r)$, при этом $-h \leq z \leq h$ и координата $z = 0$ соответствует срединной плоскости пластины. Полагаем, что края пластины $r = a$ и $r = b$ жестко защемлены (см. рис. 1). Разложим внешнюю нагрузку и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям вида

$$\begin{aligned} q(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(r) \sin m\varphi, & u_i(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(r) \sin m\varphi, \\ v_i(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(r) \cos m\varphi, & w_j(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(r) \sin m\varphi, \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки разложений (8) в уравнения (6) и граничные условия (7) находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций U_{im} , V_{im} , W_{jm} , $i = \overline{0, 3}$, $j = \overline{0, 2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ и соответствующие краевые условия. В результате система (6) дифференциальных уравнений равновесия пластины после ее преобразования к перемещениям и отбрасывания нелинейных слагаемых представляется в виде системы одномерных дифференциальных уравнений в перемещениях. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами используется метод конечных разностей [19–23].

Деформации и тангенциальные напряжения пластины находятся из геометрических и физических соотношений теории упругости. Поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) dz, & \tau_{\varphi z} &= -\int_{-h}^z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} \right) dz, \\ \sigma_z &= -\int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sigma_\varphi \right) dz. \end{aligned}$$

3. Пример расчета

Рассмотрим стальную круглую пластину, находящуюся под действием распределенной нагрузки $q(r, \varphi) = Q_0 \sin \varphi$, $Q_0 = \text{const}$. Компоненты перемещений и соответствующих им напряжений пластины определяются первыми слагаемыми в разложении (8).

В качестве первого примера рассматривается изотропная круглая пластина с параметрами: $a = 1$ м, $b = 0,2$ м, $h_m = 0,05$ м, $h_0 = 0,015$ м; толщина определяется соотношением $h(r) = h_m - r \operatorname{tg} \alpha$, где $\operatorname{tg} \alpha = (h_m - h_0)/(a - b)$; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. На представленных далее рисунках сокращения «Уточ.» и «Клас.» указывают на варианты расчетов по уточненной и классической теориям соответственно.

Графики максимальных нормальных напряжений пластины, рассчитанных по уточненной теории, представлены на рис. 2–5. Анализ графиков показывает, что вне краевой зоны значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают (рис. 2, 3). Максимальное отличие результатов расчета имеет место (рис. 3) при определении нормальных напряжений σ_ϕ и составляет 16,6%.

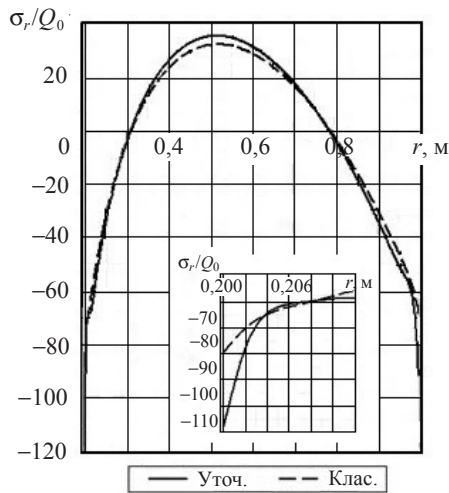


Рис. 2. Изменение σ_r по радиусу

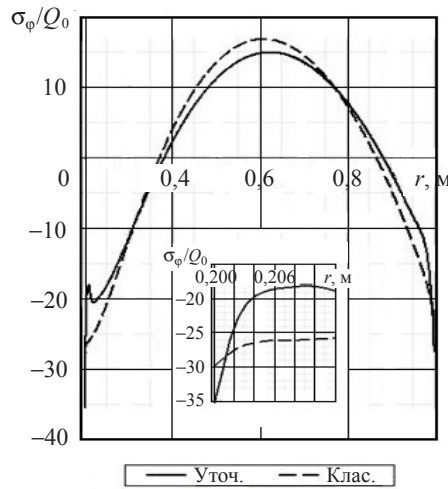


Рис. 3. Изменение σ_ϕ по радиусу

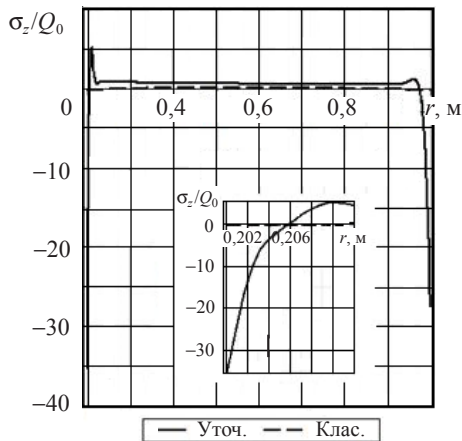


Рис. 4. Изменение σ_z по радиусу

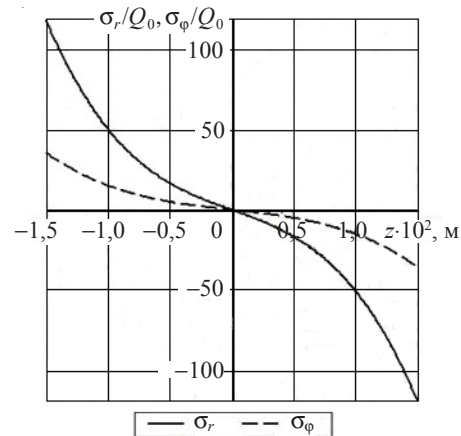


Рис. 5. Изменение σ_r, σ_ϕ по толщине в краевой зоне ($r = b$)

Отметим, что напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные напряжения σ_r на 32,3% (см. рис. 2), σ_ϕ на 19,1% (см. рис. 3). Кроме того,

нормальные поперечные напряжения σ_z , пренебрежимо малые по классической теории, по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений σ_r (см. рис. 2, 4). Графики изменения напряжений σ_r , σ_ϕ по толщине в краевой зоне $r = b$ показаны на рис. 5.

В качестве второго примера рассматривается круглая изотропная пластина с аналогичными геометрическими и физическими параметрами, толщина которой определяется функцией второго порядка $h(r) = 0,054r^2 - 0,021r + 0,017$.

Отметим, что для сравнения результатов расчета напряжений для двух вариантов рассматриваемых пластин их толщина на краях $r = a$ и $r = b$ принята одинаковой. Результаты вычисления НДС пластины представлены на рис. 6–9.

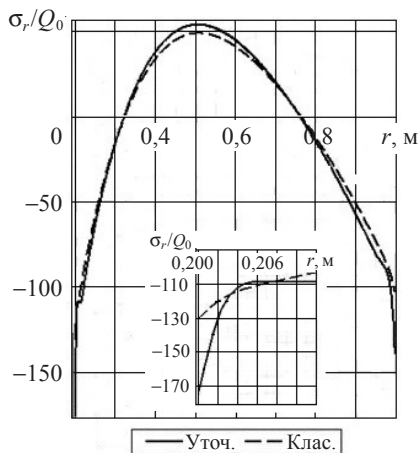


Рис. 6. Изменение σ_r по радиусу

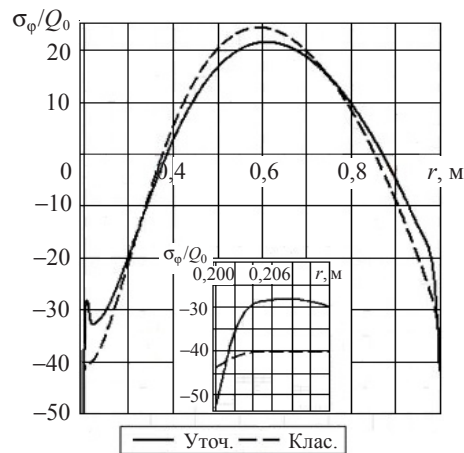


Рис. 7. Изменение σ_ϕ по радиусу

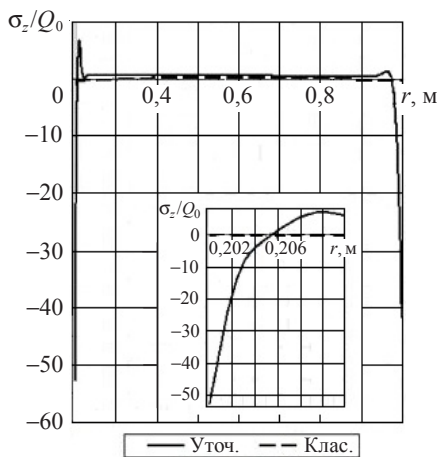


Рис. 8. Изменение σ_z по радиусу

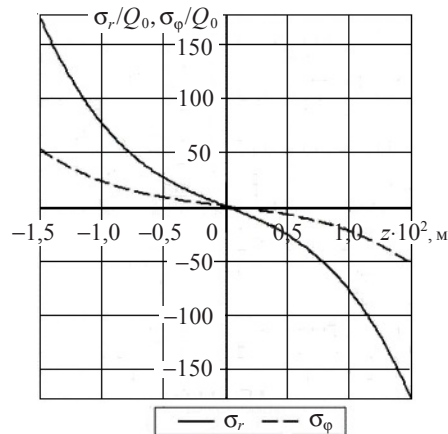


Рис. 9. Изменение σ_r , σ_ϕ по толщине в краевой зоне ($r = b$)

Из представленных графиков следует, что напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные напряжения σ_r на 34% (см. рис. 6), σ_ϕ на 20,7% (см. рис. 7). Максимальные нормальные поперечные напряжения σ_z в краевой зоне пластины оказываются одного порядка (около 30%) с максимальными величинами основного изгибного напряжения (см. рис. 6, 8). Очевидно, что во внутренней об-

ласти пластины, то есть при удалении от краевой зоны на расстояние порядка ее толщины, напряжения «погранслоя» затухают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Заключение

На основании разработанной теории сформулирована и решена краевая задача для расчета НДС круглых пластин с симметрично изменяющейся по произвольному закону толщиной в радиальном направлении. Проведено сравнение результатов расчета НДС круглых пластин при использовании уточненной и классической теорий. Установлено, что при исследовании НДС в краевых зонах пластины следует использовать уточненную теорию, так как в них максимальные напряжения существенно уточняются. Поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне («пограничный слой») оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения, что очень важно для повышения достоверности расчетов на прочность элементов авиационно-ракетных конструкций.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Власов В.З. *Общая теория оболочек*. Избранные труды. Т. 1. М.: АН СССР, 1962. 528 с.
3. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины. *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057–1074.
4. Лурье А.И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. М.: Наука, 1976. 512 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
7. Агаловян Л.А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек*. М.: Наука, 1997. 414 с.
8. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 582–589.
9. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 5. No 6. P. 515–522.
10. Фирсанов В.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины с учетом пограничного слоя. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2016. Т. 22. №1. С. 3–18.
11. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние «пограничный слой» в прямоугольной пластине переменной толщины. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2018. №6. С. 443–451.
12. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1990. №2. С. 158–167.
13. Firsanov V.V. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2018. Vol. 47. No 3. P. 241–248.
14. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the effect for elastic plates. *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. P. 117–124.
15. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12. P. A66–A77.
16. Dicarlo A., Polio Guidugli P., Williams W.O. Shells with thickness distension. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. Iss. 6-7. P. 1201–1225.

17. Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. Vol. 95. Iss. 1. P. 77–90.
18. Benselama Kh., Noureddine E., Bedia E., Tounsi A. Buckling analysis in hybrid cross-ply composite laminates on elastic foundation using the two variable refined plate theory. *Structural Engineering and Mechanics*. 2015. Vol. 55. P. 47–64. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2013.46.2.269>.
19. Rajasekaran S., Wilson A. Buckling and vibration of rectangular plates of variable thickness with different end conditions by finite difference technique. *Structural Engineering and Mechanics*. 2013. Vol. 46. Iss. 2. DOI: 10.12989/sem.2013.46.2.269.
20. Md. Roknuzzaman, Md. Belal Hossain, Md. Rashedul Haque, Dr. Tarif Uddin Ahmed. Analysis of rectangular plate with opening by finite difference method. *American Journal of Civil Engineering and Architecture*. 2015. Vol. 3. P. 165–173. DOI: 10.12691/ajcea-3-5-3.
21. Bilbao S. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2008. Vol. 24. No 1. P. 193–216. DOI: 10.1002/num.20260.
22. Ergün A., Kumbasar N. A new approach of improved finite difference scheme on plate bending analysis. *Scientific Research and Essays*. 2011. Vol. 6. No 1. P. 6–17. DOI: 10.5897/SRE09.388.
23. PISAČIĆ K., Horvat M., Botak Z. Finite difference solution of plate bending using wolfram mathematica. *Tehnički glasnik*. 2019. Vol. 13. P. 241–247. DOI: 10.31803/tg-20190328111708.

References

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki [Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1966. 636 p. (In Russian).
2. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek. Izbrannye trudy [General Theory of Shells. Selected Works]*. Moscow. Nauka Publ. 1962. 528 p. (In Russian).
3. Aksentyan O.K., Vorovich I.I. Napryazhennoe sostoyanie plity maloy tolshchiny [The stress state of the plate with small thickness]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech]*. 1963. Vol. 27. No 6. P. 1057–1074 (In Russian).
4. Lur'e A.I. *Teoriya uprugosti [Elasticity Theory]*. Moscow. Nauka Publ. 1970. 939 p. (In Russian).
5. Goldenveyzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of Elastic Thin Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 512 p. (In Russian).
6. Goldenveyzer A.L. Postroenie priblizhennoy teorii obolochek pri pomoshchi asimptoticheskogo integrirvaniya uravneniy teorii uprugosti [Construction of an approximate theory of shells using asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech]*. 1963. Vol. 27. No 6. P. 593–608 (In Russian).
7. Agalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek [Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1997. 414 p. (In Russian).
8. Kolos A.V. Ob utochnenii klassicheskoy teorii izgiba kruglykh plastinok [On the refinement of the classical theory of bending of round plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech]*. 1964. Vol. 28. No 3. P. 582–589 (In Russian).
9. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 5. No 6. P. 515–522.
10. Firsanov V.V. Matematicheskaya model napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pryamougolnoy plastinki peremennoy tolshchiny s uchetom pogranichnogo sloya [The mathematical model of stress-strain state of a rectangular plate with variable thickness taking into account the boundary layer]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy [Mechanics of Composite Materials and Structures]*. 2016. Vol. 22. No 1. P. 3–18 (In Russian).
11. Firsanov Val.V., Doan Q.H. Napryazhennoe sostoyanie “pogranichnyy sloy” v pryamougolnoy plastine peremennoy tolshchiny [Stress state “boundary layer” in a rectangular plate of variable thickness]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [Bulletin of Tula State University. Technical Science]*. 2018. Vol. 6. P. 443–451 (In Russian).
12. Vasilyev V.V., Lur'ye S.A. K probleme postroeniya neklassicheskoy teorii plastin [To the problem of building a non-classical theory of plates]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1990. No 2. P. 158–167 (In Russian).

13. Firsanov V.V. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2018. Vol. 47. No 3. P. 241–248.
14. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the effect for elastic plates. *Proc. Sympos. Appl. Math.* 1950. Vol. 3. P. 117–124.
15. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* 1945. Vol. 12. P. A66–A77.
16. Dicarolo A., Polio Guidugli P., Williams W.O. Shells with thickness distension. *Int. J. Solid and Struct.* 2001. Vol. 38. Iss. 6-7. P. 1201–1225.
17. Jaiani G. Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. Vol. 95. Iss. 1. P. 77–90.
18. Benselama Kh., Noureddine E., Bedia E., Tounsi A. Buckling analysis in hybrid crossply composite laminates on elastic foundation using the two variable refined plate theory. *Struct. Eng. Mech.* 2015. Vol. 55. P. 47–64. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2013.46.2.269>.
19. Rajasekaran S., Wilson A. Buckling and vibration of rectangular plates of variable thickness with different end conditions by finite difference technique. *Struct. Eng. Mech.* 2013. Vol. 46. Iss. 2. P. 269–294. DOI: 10.12989/sem.2013.46.2.269.
20. Md. Roknuzzaman, Md. Belal Hossain, Md. Rashedul Haque, Dr. Tarif Uddin Ahmed. Analysis of rectangular plate with opening by finite difference method. *American Journal of Civil Engineering and Architecture*. 2015. Vol. 3. P. 165–173. DOI: 10.12691/ajcea-3-5-3.
21. Bilbao S. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2008. Vol. 24. No 1. P. 193–216. DOI: 10.1002/num.20260.
22. Ergün A., Kumbasar N. A new approach of improved finite difference scheme on plate bending analysis. *Scientific Research and Essays*. 2011. Vol. 6. No 1. P. 6–17. DOI: 10.5897/SRE09.388.
23. PISAČIĆ K., Horvat M., Botak Z. Finite difference solution of plate bending using wolfram mathematica. *Tehnički glasnik*. 2019. Vol. 13. P. 241–247. DOI: 10.31803/tg-20190328111708.

STRESS-STRAIN STATE IN BOUNDARY LAYER OF THE CIRCULAR PLATES WITH VARIOUS THICKNESSES BASED ON THE REFINED THEORY

Firsanov Val.V.¹, Doan Q.H.^{1,2}, Tran N.D.²

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam*

A variant of the refined theory on calculation of the stress-strain state of circular plates with symmetrically various thicknesses according to an arbitrary law in the radial direction was presented. Equations of the plate state were established by using the three-dimensional elasticity theory. The required displacements were approximately calculated according to upright direction to the middle plane by polynomials with two degrees higher than in the classical Kirchhoff – Love theory. The differential equation at equilibrium in displacements with various coefficients was obtained by using means of the Lagrange variational principle. The direct integration of the equilibrium equations in the three-dimensional elasticity theory was used to determine the transverse normal and shear stresses.

Of an isotropic circular plate with changing in thickness by using the analyzing Fourier chain, the obtained differential equilibrium equations in displacements with variable coefficients containing supplement components and taking into account of the effect of thickness on the stress-strain state of the plate.

Examples of calculating the stress state of a circular plate with a thickness varying according to linear and parabolic laws under the action of a uniformly distributed load were considered. The limited difference method was employed to solve the boundary value problem. Comparison results of the refined and classical theories were investigated. It is demonstrated that the study on the

stress state in the zones of its distortion (compounds, local loading zones, etc.) should use a refined theory, since the additional corresponding stresses of the “boundary layer” type are of the same order with the values of the main (internal) stress state. This is important to increase the reliability of strength calculations of such elements of aircraft-rocket structures as the power housings of aircraft, their various transition zones and connections, as well as objects in various engineering industries.

Keywords: circular plate, variable thickness, Lagrange variational principle, Fourier chain, boundary value problem, finite difference method, stress-strain state of the “boundary layer”, transverse normal stresses.