

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-402-415

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ
НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ
В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ***

© 2019 г. **Ерофеев В.И.^{1,2}, Шекоян А.В.³, Белубекян М.В.³**

¹*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

³*Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Республика Армения*

erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.06.2019

Предложена нелинейная модель электропроводящей микрополярной среды, взаимодействующей с внешним магнитным полем. Деформируемое состояние такой среды описывается двумя несимметричными тензорами: деформаций и изгиба-кручения. В обоих тензорах учитываются как линейные, так и нелинейные слагаемые в градиентах поворота и в градиентах перемещения (геометрическая нелинейность). Компоненты тензора изгиба-кручения, имеющие одинаковые индексы, описывают крутильные деформации, а остальные компоненты – изгибные. Напряженное состояние среды описывается двумя несимметричными тензорами: напряжений и моментных напряжений. Предполагается, как это принято в магнитоупругости, что действие электромагнитного поля на поле деформаций происходит посредством сил Лоренца. Из системы уравнений Максвелла следуют уравнения для электрической и магнитной индукций, которые вместе с электромагнитными уравнениями состояния нужно добавить к уравнениям динамики микрополярной среды.

В рамках предложенной модели рассматривается одномерная нелинейная магнитоупругая волна сдвига-вращения. В уравнениях динамики выделено и учтено нелинейное слагаемое, вносящее наиболее существенный вклад в волновые процессы. Показано, что на распространение волны будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в волне новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волн. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения фор-

* Выполнено при финансовой поддержке грантом Правительства Российской Федерации (договор №14.Y26.31.0031).

мы. Физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Стационарные волны могут быть как периодическими, так и аperiodическими. Последние являются пространственно-локализованными волнами – солитонами. Показано, что поведение «дозвуковых» и «сверхзвуковых» солитонов будет качественно различным.

Ключевые слова: микрополярная среда, нелинейность, электропроводность, магнитное поле, волна, пространственная локализация.

Введение

Наряду с моделью классического континуума в механике деформируемого твердого тела широко применяются модели обобщенных континуумов [1–15]. Основоположниками механики обобщенных континуумов по праву считаются французские исследователи братья Эжен и Франсуа Коссера, опубликовавшие в 1909 году книгу «Теория деформируемых тел» [16]. На русском языке эта теория опубликована в книге П. Аппеля [17]. Комментарии можно найти в [18, 19].

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Каждой частице деформируемой среды здесь ставится в соответствие ортогональный трехгранник, и частицы получают ориентацию. Исходя из этого обстоятельства, среду Коссера иногда называют полярной средой, но чаще – микрополярной средой.

В ряде задач для материалов и элементов конструкций необходимо учитывать их работу в условиях взаимодействия с внешним магнитным полем [20–29]. Это актуально и для материалов, описываемых моделью Коссера. Основы линейной магнитоупругости микрополярных сред развиты в публикациях [30–37].

В настоящей статье предложена нелинейная модель электропроводящей микрополярной среды, взаимодействующей с внешним магнитным полем. Изучаются пространственно-локализованные нелинейные стационарные магнитоупругие волны. Продолжены исследования волновых процессов, начатые в [38–44], которые обобщаются учетом микрополярности среды, а также продолжают исследования, начатые в [45], и обобщаются путем учета электропроводности нелинейного микрополярного континуума.

1. Уравнения динамики магнитоупругой микрополярной среды

Согласно публикациям [30–34], уравнения динамики микрополярного (неферромагнитного) упругого тела с учетом массовых сил электромагнитного происхождения \mathbf{F}^m имеют вид:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + F_i^m, \quad (1)$$

$$I \ddot{\phi}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j}. \quad (2)$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений; ϕ_i – компоненты вектора поворота; σ_{ji} – компоненты тензора напряжений; μ_{ji} – компоненты тензора моментных напряжений; ρ – плотность; I – мера инерции при вращении; ϵ_{ijk} – тензор Леви-Чивиты; все индексы принимают значения 1, 2, 3 в соответствии с пространственными координатами x_1, x_2, x_3 ; индекс после запятой подразумевает дифференцирование по соответствующей координате.

Система уравнений (1), (2) получена с учетом обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij},\end{aligned}\quad (3)$$

где δ_{ij} – символы Кронекера; λ, μ – постоянные Ламе; γ_{ji}, κ_{ji} – компоненты тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические постоянные материала в рамках среды Коссера, характеризующие изотермическое состояние, удовлетворяющие ограничениям [1]:

$$\alpha \geq 0, \quad (\gamma + \varepsilon) \geq 0, \quad -(\gamma + \varepsilon) \leq (\gamma - \varepsilon) \leq (\gamma + \varepsilon) \quad (4)$$

и соотношению [46]:

$$\mu(2\gamma + \beta) = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon). \quad (5)$$

Геометрические соотношения для γ_{ji} и κ_{ji} определяются формулами [1]:

$$\begin{aligned}\gamma_{ji} &= u_{i,j} - \epsilon_{kji}\varphi_k, \\ \kappa_{ji} &= \varphi_{i,j}.\end{aligned}\quad (6)$$

В отличие от классической теории упругости, тензор деформаций и тензор изгиба-кручения являются несимметричными. Симметричная часть тензора деформаций идентична тензору деформаций классической теории упругости: $\gamma_{ji}^S = u_{i,j}$. Несимметричная часть $\gamma_{ji}^A = (1/2)\epsilon_{ilm}u_{l,m} - \epsilon_{kji}\varphi_k$ характеризует отличие вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$ от вектора вихря перемещения $(1/2)\text{rot } \mathbf{u}$. Компоненты тензора изгиба-кручения κ_{ji} , имеющие одинаковые индексы, описывают крутильные деформации, а остальные компоненты – изгибные.

Далее в тензоре деформаций и тензоре изгиба-кручения будем учитывать как линейные, так и нелинейные слагаемые в градиентах поворота и градиентах перемещения (геометрическая нелинейность) [45]:

$$\begin{aligned}\gamma_{ji} &= u_{i,j} + u_{i,j}u_{i,j} - \epsilon_{kji}\varphi_k, \\ \kappa_{ji} &= \varphi_{i,j} + \varphi_{i,j}\varphi_{i,j}.\end{aligned}\quad (7)$$

В магнитоупругости предполагается, что действие электромагнитного поля на поле деформаций происходит посредством сил Лоренца [47]:

$$\mathbf{F}^m = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

которые вводятся в уравнения движения (1), (2), переписанные в векторном виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{F}_{\text{nonlinear}} + \mathbf{F}^m, \quad (9)$$

$$I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} = (\beta + 2\gamma)\text{grad div } \boldsymbol{\varphi} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{G}_{\text{nonlinear}}. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{E} – напряженность электрического поля, \mathbf{B} – вектор магнитной индукции, \mathbf{j} – вектор плотности токов, ρ_e – объемная плотность электрических зарядов. Векторы $\mathbf{F}_{\text{nonlinear}}, \mathbf{G}_{\text{nonlinear}}$ включают в себя слагаемые, обусловленные учетом упругой геометрической нелинейности (7).

Из уравнений Максвелла [47] следуют уравнения для электрической \mathbf{D} и магнитной \mathbf{H} индукций:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right] + \frac{1}{\mu_e \sigma} \Delta \mathbf{B}, \quad (12)$$

которые вместе с электромагнитными уравнениями состояния [47]

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (13)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_e \mathbf{E}, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} \quad (15)$$

следует добавить к уравнениям (9), (10). Здесь \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, σ – проводимость, ε_e – абсолютная диэлектрическая проницаемость, μ_e – абсолютная магнитная проницаемость среды.

В магнитоупругости принято пренебрегать токами смещения ($\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$) и считать, что свободные электрические заряды отсутствуют ($\rho_e = 0$). Таким образом, уравнения магнитоупругости примут вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{F}_{\text{nonlinear}} + \mu_e (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (16)$$

$$I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} = (\beta + 2\gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\varphi} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} + 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{G}_{\text{nonlinear}}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right] + \frac{1}{\mu_e \sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (18)$$

Будем далее рассматривать одномерную нелинейную волну сдвига-вращения, поляризованную в плоскости $x_1 O x_2$. Векторы перемещения \mathbf{u} , поворота $\boldsymbol{\varphi}$, а также векторы нелинейных слагаемых $\mathbf{F}_{\text{nonlinear}}$, $\mathbf{G}_{\text{nonlinear}}$ будут иметь только по одной отличной от нуля компоненте:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ v(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nonlinear}} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu + \alpha) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{\text{nonlinear}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (16)–(18) при этом преобразуется к виду:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\mu + \alpha) \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\rho} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad (20)$$

$$I \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \left(1 + 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + 2\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4\alpha \varphi_3, \quad (21)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(H_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_3}{\partial x^2}, \quad (24)$$

где c – скорость света в вакууме.

Для идеально проводящего материала $\sigma \rightarrow \infty$ и в уравнениях (22)–(24) вклад слагаемых, содержащих этот параметр, будет пренебрежимо мал. В этом случае H_1 и H_3 будут константами или функциями только координаты x . Будем считать H_1 и H_3 константами. Из уравнения (22) определим связь между градиентом перемещения и напряженностью магнитного поля

$$H_2 = H_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \text{const.} \quad (25)$$

Постоянную интегрирования в (25) будем считать равной нулю.

Уравнение (20) с учетом (25) позволяет вычислить связь между градиентом поворота и производными от перемещения:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{\mu + \alpha}{2\alpha} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\rho}{2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{H_1^2}{8\pi\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (26)$$

Подставляя соотношение (26) в уравнение (21), предварительно продифференцированное по x , сведем анализ системы к исследованию одного нелинейного уравнения относительно перемещения v :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c_\phi^2 c_T^2}{4\alpha I} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{I(c_\phi^2 + c_T^2)}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \frac{c_i^2 c_\phi^2 I}{4\alpha} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{c_i^2 I}{4\alpha} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{c_\phi^2 \rho}{8I\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ c_T^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + c_i^4 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right\} + \\ & + 2c_i^2 c_T^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2c_0^2 c_T^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2c_i^2 c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \Big\} = 0. \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения: $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы волна сдвига, если бы в среде отсутствовало вращение частиц материала; $c_\phi = \sqrt{(\gamma + \varepsilon)/I}$ – скорость, с которой распространялась бы волна вращения, если бы в среде отсутствовали сдвиговые деформации; $c_A = \sqrt{H_1^2/(4\pi\rho)}$ – скорость волны Альфвена; $c_i = \sqrt{(\mu + \alpha)/\rho}$, $c_0^2 = c_\tau^2 - c_A^2$, $c_T^2 = c_\tau^2 - c_A^2$.

Введем безразмерные переменные $x' = x/\Lambda$, $t' = c_0 t/\Lambda$, $v' = v/v_0$, где v_0 – максимальная амплитуда волны, при которой сдвиговая деформация остается упругой; Λ – длина волны.

В новых переменных уравнение (27) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{c_\phi^2 c_T^2}{4\alpha c_0^2 I \Lambda^2} \frac{\partial^4 v'}{\partial x'^4} + \frac{I c_0^2}{4\alpha \Lambda^2} \frac{\partial^4 v'}{\partial t'^4} - \frac{I(c_\phi^2 + c_T^2)}{4\alpha \Lambda^2} \frac{\partial^4 v'}{\partial x'^2 \partial t'^2} + N_1 + N_2 + N_3 + \\ & + \frac{c_\phi^2}{2\rho I c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} (N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8) = 0. \quad (28) \end{aligned}$$

Здесь через N_i обозначены нелинейные слагаемые:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{\varepsilon c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2, & N_2 &= \frac{\varepsilon c_\tau^2 c_\phi^2 I}{4\alpha c_0^2 \Lambda^2} \frac{\partial^3}{\partial x'^3} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2, \\
N_3 &= -\frac{\varepsilon c_\tau^2 I}{4\alpha \Lambda^2} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial t'^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2, & N_4 &= \frac{\varepsilon c_\tau^4}{4\Lambda^3} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \right)^2, \\
N_5 &= \frac{\varepsilon^3 c_\tau^4}{4\Lambda^3} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right]^2, & N_6 &= \frac{\varepsilon c_\tau^2 c_\tau^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2, \\
N_7 &= -\frac{\varepsilon^2 c_0^2 c_\tau^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial t'^2}, & N_8 &= -\frac{\varepsilon c_\tau^2 c_0^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial t'^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2.
\end{aligned} \tag{29}$$

Нелинейное слагаемое N_1 имеет порядок малости $\varepsilon = v_0/\Lambda$. Сравним порядок малости остальных нелинейных слагаемых по отношению к N_1 :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{N_2}{N_1} \right| &\sim \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^2, & \left| \frac{N_3}{N_1} \right| &\sim \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^2, & \left| \frac{N_4}{N_1} \right| &\sim \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^3, & \left| \frac{N_5}{N_1} \right| &\sim \varepsilon^2 \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^3, \\
\left| \frac{N_6}{N_1} \right| &\sim \varepsilon \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^3, & \left| \frac{N_7}{N_1} \right| &\sim \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^3, & \left| \frac{N_8}{N_1} \right| &\sim \varepsilon \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^3,
\end{aligned} \tag{30}$$

где d – постоянная величина, имеющая размерность длины.

Соотношения (30) показывают, что из всех нелинейных слагаемых N_1 вносит наиболее существенный вклад в волновые процессы, описываемые уравнением (28). Вклад остальных слагаемых имеет существенно более высокий порядок малости. Из (28) легко видеть, что все линейные дисперсионные слагаемые имеют порядок малости $(d/\Lambda)^2$.

Сохраним в уравнении (28) все линейные слагаемые и ограничимся учетом только одного («главного») нелинейного слагаемого N_1 . Вернемся при этом к исходным физическим (размерным) переменным. Тогда уравнение (27) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c_\phi^2 c_\tau^2}{4\alpha I} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{I(c_\phi^2 + c_\tau^2)}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0. \tag{31}$$

2. Плоские нелинейные стационарные волны

Будем искать решение уравнения (31) в виде бегущей стационарной волны, зависящей от переменной $\xi = x - Vt$, где V – скорость, заранее неизвестная. Тогда уравнение в частных производных преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение ангармонического осциллятора):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + m_1 U + m_2 U^2 = 0. \tag{32}$$

Здесь $U = \partial v / \partial \xi$ – сдвиговая деформация;

$$m_1 = \frac{4\alpha(V^2 - c_0^2)}{IQ(V)}, \quad m_2 = \frac{4\alpha c_\tau^2}{IQ(V)}, \tag{33}$$

а через Q обозначен полином

$$Q(V) = V^4 - (c_\phi^2 + c_T^2)V^2 + c_\phi^2 c_T^2. \quad (34)$$

О возможности существования нелинейных стационарных волн и их качественных особенностях можно судить по знакам коэффициентов m_1 , m_2 и положительной (или отрицательной) определенности $Q(V)$.

Знак полинома определяется из решения биквадратного алгебраического уравнения $Q(V) = 0$, имеющего корни $V_1^2 = c_T^2$, $V_2^2 = c_\phi^2$.

Для разных материалов соотношения между характерными скоростями упругих волн могут быть различными. Известно, что для некоторых классов фотонных кристаллов скорость волны сдвига превышает скорость волны вращения, следовательно $c_T > c_\phi$ [48], для некоторых зернистых композитов [49] наблюдается обратная зависимость, то есть $c_T < c_\phi$. Далее рассмотрим оба возможных случая.

Умножая (32) на $dU/d\xi$ и интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} U^2 - \frac{m_2}{3} U^3. \quad (35)$$

Здесь E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы; функция $f(U) = (m_1/2)U^2 + (m_2/3)U^3$ – потенциальная энергия системы. Поэтому уравнение (35) можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Полученное уравнение допускает разделение переменных:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{dU}{\sqrt{E - f(U)}} \quad (36)$$

и имеет ограниченные решения $E - f(U) > 0$.

Пусть кубический полином $E - f(U)$ имеет три действительных корня $U_3 \leq U_2 \leq U_1$. Наличие одного действительного корня не рассматривается, так как решения уравнения (36) в этом случае будут неограниченными. Выразим кубический полином через корни U_1, U_2, U_3 :

$$E - \frac{m_1}{2} U^2 - \frac{m_2}{3} U^3 = \frac{m_2}{3} (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3). \quad (37)$$

Корни полинома связаны между собой соотношениями:

$$U_1 + U_2 + U_3 = -\frac{3m_1}{2m_2}, \quad U_1 U_2 + U_1 U_3 + U_2 U_3 = 0, \quad U_1 U_2 U_3 = \frac{2E}{m_2}. \quad (38)$$

Перепишем уравнение (36) в виде:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{dU}{\sqrt{-[m_2(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)]/3}}. \quad (39)$$

Физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации $U(x, t)$ отсутствует постоянная составляющая. Решения уравнения (32) при этом могут быть как периодическими, так и аperiodическими. Аperiodическим решениям соответствуют пространственно-локализованные волны – солитоны.

Поведение «дозвуковых» и «сверхзвуковых» солитонов будет качественно различным. Покажем это.

2.1. «Дозвуковые» солитоны. Такие нелинейные волны распространяются медленнее, чем любые линейные возмущения. Для материалов с $c_T/c_\phi > 0$ скорость

солитона удовлетворяет неравенству $c_T^2 > c_0^2 > c_\phi^2 > V^2$; для материалов с $c_T/c_\phi < 0$ – неравенству $c_\phi^2 > c_T^2 > c_0^2 > V^2$.

Функция потенциальной энергии $f(U)$ имеет локальный максимум $f_{\max} = 0$ при $U = 0$ и локальный минимум $f_{\min} = m_1^3/(6m_2^2)$ при $U = -m_1/m_2$, то есть на фазовой плоскости $(U, dU/d\xi)$ точка $(-m_1/m_2, 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ – неустойчивым положением равновесия типа «седло». Ограниченные решения существуют, если начальная энергия системы изменяется в пределах $m_1^3/(6m_2^2) = E_{\min} \leq E \leq E_{\max} = 0$, причем при $E \rightarrow E_{\min}$ будут наблюдаться квазигармонические колебания вблизи положения равновесия типа «центр», а при $E = E_{\max}$ колебания на фазовой плоскости соответствуют движениям по сепаратрисе. Во всех этих случаях соответственно полином $E - f(U)$ имеет либо три действительных корня, либо два совпадающих меньших корня U_2 и U_3 , либо два совпадающих больших корня U_1 и U_2 .

При $E = E_{\max} = 0$ стационарные волны являются уединенными. В этом случае два больших корня полинома совпадают $U_1 = U_2$. В солитоне постоянная составляющая отсутствует $U_2 = 0$.

Солитон описывается гиперболическим косинусом:

$$U(\xi) = \frac{A}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)}. \quad (40)$$

Здесь A – амплитуда солитона, Δ – его ширина. Они определяются соотношениями:

$$A = -U_3 = -\frac{3m_1}{2m_2}, \quad \Delta = \sqrt{-\frac{6}{m_2 U_3}} = \frac{2}{\sqrt{-m_1}}, \quad m_1 < 0, \quad m_2 < 0. \quad (41)$$

Заметим, что солитон имеет отрицательную полярность (рис. 1). Его поведение является классическим: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью.

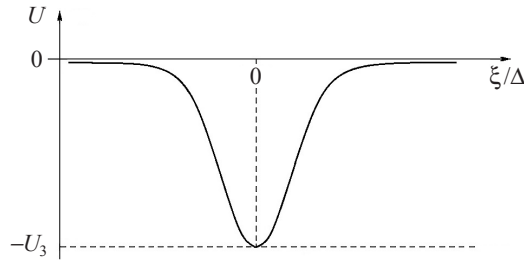


Рис. 1. «Дозвуковой» солитон отрицательной полярности

2.2. «Сверхзвуковые» солитоны. Для материалов с $c_T/c_\phi > 0$ скорость такого солитона удовлетворяет неравенству $c_T^2 > V^2 > c_0^2 > c_\phi^2$; для материалов с $c_T/c_\phi < 0$ – неравенству $c_\phi^2 > V^2 > c_T^2 > c_0^2$.

При $E = E_{\max} = 0$ стационарные волны являются уединенными, но в этом случае совпадают между собой два меньших корня полинома $U_2 = U_3$.

Форма солитона описывается соотношением (40), его параметры – соотношениями:

$$A = U_1 - U_2 = -\frac{3m_1}{2m_2}, \quad \Delta = \sqrt{-\frac{6}{m_2(U_1 - U_2)}} = \frac{2}{\sqrt{-m_1}}, \quad m_1 < 0, \quad m_2 > 0. \quad (42)$$

Солитон с параметрами (42) имеет положительную полярность (рис. 2). Его поведение является аномальным: волна меньшей амплитуды имеет меньшую ширину.

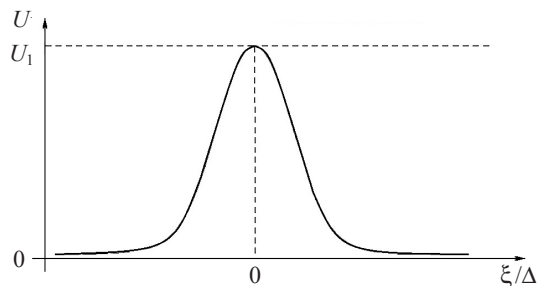


Рис. 2. «Сверхзвуковой» солитон положительной полярности

Заключение

Предложена нелинейная модель электропроводящей микрополярной среды, взаимодействующей с внешним магнитным полем, в рамках которой исследовано распространение одномерной нелинейной магнитоупругой волны сдвига-вращения. Показано, что на распространение волны будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в волне новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волн. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы. Физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Стационарные волны могут быть как периодическими, так и аperiodическими. Последние являются пространственно-локализованными волнами – солитонами. Показано, что поведение «дозвуковых» и «сверхзвуковых» солитонов будет качественно различным.

Список литературы

1. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. 380 p.
2. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories: 1. Foundations and Solids*. New York: Springer, 1999. 324 p.
3. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Eds). *Mechanics of generalized continua: on hundred years after the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics*. Vol. 21. Berlin: Springer, 2010. 338 p.
4. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.I. (Eds). *Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 7. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 350 p.
5. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Eds). *Generalized continua as models with multi-scale effects or under multi-field actions. Advanced Structured Materials*. Vol. 22. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 332 p.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Eds). *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*. Wien: Springer, 2013. 388 p.
7. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. *Wave dynamics of generalized continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 24. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 274 p.
8. Altenbach H., Forest S. (Eds). *Generalized continua as models for classical and advanced materials. Advanced Structured Materials*. Vol. 42. Switzerland: Springer-Verlag, 2016. 458 p.
9. Maugin G.A. *Non-classical continuum mechanics. Advanced Structured Materials*. Vol. 51. Singapore: Springer, 2017. 260 p.

10. Dell'Isola F., Eremeyev V.A., Porubov A. (Eds). Advanced in mechanics of microstructured media and structures. *Advanced Structured Materials*. Vol. 87. Cham: Springer, 2018. 370 p.
11. Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch T. (Eds). Generalized models and non-classical approaches in complex materials 1. *Advanced Structured Materials*. Vol. 89. Cham: Springer, 2018. 760 p.
12. Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch T. (Eds). Generalized models and non-classical approaches in complex materials 2. *Advanced Structured Materials*. Vol. 90. Cham: Springer, 2018. 306 p.
13. Erofeev V., Porubov A., Sargsyan S. (Eds). Nonlinear wave dynamics of generalized continua. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 35. No 1 (Special Issue dedicated to the memory E.L. Aero and G. Maugin). 190 p.
14. Altenbach H., Beluaev A., Eremeyev V.A., Krivtsov A., Porubov A.V. (Eds). Dynamical processes in generalized continua and structures. *Advanced Structured Materials*. Vol. 103. Cham: Springer Nature, 2019. 526 p.
15. Abali B.E., Altenbach H., dell'Isola F., Eremeyev V.A., Ochsner A. (Eds). New achievements in continuum mechanics and thermodynamics. A tribute to Wolfgang H. Müller. *Advanced Structured Materials*. Vol. 108. Cham: Springer Nature, 2019. 564 p.
16. Cosserat E. et F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
17. Коссера Э., Коссера Ф. Заметка о теории евклидовского действия. В кн.: *Аппель П. Руководство по теоретической (рациональной) механике. Курс механики Парижского факультета наук. Т. 3. Равновесие и движение сплошных сред*. Пер. А. Безруков. М.: Изд-во «Кушнерев И.Н. и Ко», 1911. С. 612–682. (Репринт: *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2013. Т. 5. №1. С. 5–76).
18. Ерофеев В.И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. №4. С. 5–10.
19. Ерофеев В.И., Герасимов С.И. Континуум Коссера сто лет спустя. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2013. Т. 5. №1. С. 3–4.
20. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. *Магнитоупругость тонких оболочек и пластин*. М.: Наука, 1977. 272 с.
21. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. *Электромагнитоупругие волны*. Ереван: Изд-во ЕГУ, 2006. 492 с.
22. Селезов И.Т., Селезова Л.В. *Волны в магнитоупругих средах*. Киев: Наукова думка, 1975. 160 с.
23. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. *Магнитоупругость электропроводящих тел*. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
24. Сибгатуллин Н.Р. *Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях*. М.: Наука, 1984. 350 с.
25. Новацкий В. *Электромагнитные эффекты в твердых телах*. М.: Мир, 1986. 160 с.
26. Kaliski S., Rymarz Cz., Sobczyk K. *Vibration and Waves*. Amsterdam: Elsevier, 1992. 382 p.
27. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. *Распространение волн в электромагнитоупругих средах*. М.: Едиториал УРСС, 2003. 336 с.
28. *Неразрушающий контроль: Справочник*. В 8 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т. 6. *Магнитные методы контроля. Оптический контроль. Радиоволновой контроль*. М.: Машиностроение, 2006. 832 с.
29. *Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии*. Под ред. А.А. Углова. М.: Наука, 1989. 268 с.
30. Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity. *Bulletin De L'Academie Polonise des Sciences*. 1968. Vol. 16(1). P. 7–13.
31. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type equation of thermo-magneto-microelasticity. *Bulletin De L'Academie Polonise des Sciences*. 1970. Vol. 17(4). P. 155–159.
32. Maugin G. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Amsterdam: Elsevier science, 1988. 598 p.
33. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несим-

метричной магнитоупругости ферромагнитного тела. *Проблемы механики деформируемых твердых тел. Сб. трудов, посвященный 80-летию С.А. Амбарцумяна*. Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 37–47.

34. Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин. *Изв. НАН Армении. Механика*. 2010. Т. 63. №3. С. 52–65.

35. Romeo M. Acoustic waves in micropolar elastic ferroelectrics. *Mechanics Research Communications*. 2015. Vol. 63. P. 33–38.

36. Кабыченков А.Ф., Лисовский Ф.В. Нелокальная эластомагнитоэлектроника неупорядоченных микрополярных сред. *ЖЭТФ*. 2016. Т. 150. №2. С. 293–305.

37. Кабыченков А.Ф., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Арзамасцева Г.В. Преобразование гибридных поперечных упругих волн в неоднородных микрополярных средах. *Акустический журнал*. 2018. Т. 64. №6. С. 664–668.

38. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2010. №1. С. 95–100.

39. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Localized magnetoelastic waves formation. *International Review of Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 4. No 5. P. 581–585.

40. Мальханов А.О., Ерофеев В.И. Магнитоупругая волна Римана в стержне. *Нелинейный мир*. 2009. Т. 7. №12. С. 933–936.

41. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010. Т. 3. №4. С. 5–15.

42. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные магнитоупругие волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5. №1. С. 79–84.

43. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Локализованные волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде, взаимодействующей с магнитным полем. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2017. №2. С. 130–138.

44. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O., Shekoyan A.V. Nonlinear longitudinal magnetoelastic waves in a rod with account of damage in its material. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 35. No 1. P. 44–52.

45. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. Vol. 97. No 9. P. 1064–1071.

46. Деев В.М. Системный анализ уравнений пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях. *Математическое моделирование в естественных науках. Тез. докл. 10-й Всероссийской конференции молодых ученых*. Пермь. 2001. С. 14.

47. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 620 с.

48. Ерофеев В.И., Павлов И.С. *Структурное моделирование метаматериалов*. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019 (в печати).

49. Gauthier R.D., Jahsmann W.E. A quest for micropolar elastic constants. *Archives of Mechanics*. 1981. Vol. 33. No 5. P. 717–737.

References

1. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford. Pergamon Press. 1986. 380 p.
2. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories: 1. Foundations and Solids*. New York. Springer. 1999. 324 p.
3. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Eds). *Mechanics of generalized continua: on hundred years after the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics*. Vol. 21. Berlin. Springer. 2010. 338 p.
4. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.I. (Eds). *Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 7. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2011. 350 p.
5. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Eds). *Generalized continua as models with multi-scale effects or under multi-field actions. Advanced Structured Materials*. Vol. 22. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2013. 332 p.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Eds). *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*. Wien. Springer. 2013. 388 p.

7. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Wave dynamics of generalized continua. *Advanced Structured Materials*. Vol. 24. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2016. 274 p.
8. Altenbach H., Forest S. (Eds). Generalized continua as models for classical and advanced materials. *Advanced Structured Materials*. Vol. 42. Switzerland. Springer-Verlag. 2016. 458 p.
9. Maugin G.A. Non-classical continuum mechanics. *Advanced Structured Materials*. Vol. 51. Singapore. Springer. 2017. 260 p.
10. Dell'Isola F., Eremeyev V.A., Porubov A. (Eds). Advanced in mechanics of microstructured media and structures. *Advanced Structured Materials*. Vol. 87. Cham. Springer. 2018. 370 p.
11. Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch T. (Eds). Generalized models and non-classical approaches in complex materials 1. *Advanced Structured Materials*. Vol. 89. Cham. Springer. 2018. 760 p.
12. Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch T. (Eds). Generalized models and non-classical approaches in complex materials 2. *Advanced Structured Materials*. Vol. 90. Cham. Springer. 2018. 306 p.
13. Erofeev V., Porubov A., Sargsyan S. (Eds). Nonlinear wave dynamics of generalized continua. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 35. No 1 (Special Issue dedicated to the memory E.L. Aero and G. Maugin). 190 p.
14. Altenbach H., Beluaev A., Eremeyev V.A., Krivtsov A., Porubov A.V. (Eds). Dynamical processes in generalized continua and structures. *Advanced Structured Materials*. Vol. 103. Cham. Springer Nature. 2019. 526 p.
15. Abali B.E., Altenbach H., dell'Isola F., Eremeyev V.A., Ochsner A. (Eds). New achievements in continuum mechanics and thermodynamics. A tribute to Wolfgang H. Müller. *Advanced Structured Materials*. Vol. 108. Cham. Springer Nature. 2019. 564 p.
16. Cosserat E. et F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 226 p.
17. Cosserat E. et Cosserat F. Note sur la théorie de l'action euclidienne. In P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*. Vol. III. Paris. 1909. P. 557–629.
18. Erofeev V.I. Brat'ya Kossera i mekhanika obobshchennykh kontinuumov [The Cosserat brothers and generalized continuum mechanics]. *Iychnislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2009. Vol. 2. No 4. P. 5–10 (In Russian).
19. Erofeev V.I., Gerasimov S.I. Kontinuum Kossera sto let spustya [Cosserat Continuum a hundred years later]. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii* [Radioelectronics. Nanosystems. Information Technology]. 2013. Vol. 5. No 1. P. 3–4 (In Russian).
20. Ambartsumian S.A., Bagdasarian G.E., Belubekian M.V. *Magnitouprugost tonkikh obolochek i plastin* [Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 272 p. (In Russian).
21. Bagdasarian G.E., Danoian Z.N. *Elektromagnitouprugie volny* [Electromagnetoelastic Waves]. Yerevan. YSU Publ. 2006. 492 p. (In Russian).
22. Celezov I.T., Celezova L.V. *Volny v magnitouprugikh sredakh* [Waves in Magnetoelastic Media]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1975. 160 p. (In Russian).
23. Podstrigach Ya.S., Burak Ya.I., Kondrat V.F. *Magnitotermouprugost elektroprovodyashchikh tel* [Magnetothermoelasticity of Conductive Bodies]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1982. 296 p. (In Russian).
24. Sibgatullin N.R. *Kolebaniya i volny v silnykh gravitatsionnykh i elektromagnitnykh pol'yakh* [Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields]. Moscow. Nauka Publ. 1984. 350 p. (In Russian).
25. Nowacki W. *Electromagnetic Effects in Deformed Solid Bodies*. Warszawa. PWN. 1983 (In Polish).
26. Kaliski S., Rymarz Cz., Sobczyk K. *Vibration and Waves*. Amsterdam. Elsevier. 1992. 382 p.
27. Bardzokas D.I., Kudriavtsev B.A., Senik N.A. *Rasprostranenie voln v elektromagnitouprugikh sredakh* [Wave Propagation in Electromagnetic Elastic Media]. Moscow. Editorial URSS Publ. 2003. 336 p. (In Russian).
28. *Nerazrushayushchiy kontrol*. Spravochnik. V 8 t. Pod red. V.V. Klyueva. T. 6. *Magnitnye metody kontrolya. Opticheskiy kontrol. Radiovolnovoy kontrol* [Non-destructive Testing. Reference book in 8 vols. Under general ed. V.V. Klyuev. Vol. 6. *Magnetic Control Methods. Optical Control*.

- Radio Wave control*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2006. 832 p. (In Russian).
29. Fiziko-khimicheskie protsessy obrabotki materialov kontsentriruyemyimi potokami energii. Pod red. A.A. Uglova. [*Physico-chemical Processing of Materials by Concentrated Energy Flows*]. Ed. A.A. Uglov. Moscow. Nauka Publ. 1989. 268 p. (In Russian).
30. Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity. *Bulletin De L'Academie Polonise des Sciences*. 1968. Vol. 16(1). P. 7–13.
31. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type equation of thermo-magneto-microelasticity. *Bulletin De L'Academie Polonise des Sciences*. 1970. Vol. 17(4). P. 155–159.
32. Maugin G. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Amsterdam. Elsevier science. 1988. 598 p.
33. Bagdasaryan G.E., Asanyan D.D. Osnovnye uravneniya i sootnosheniya teorii nesimmetrichnoy magnitouprugosti ferromagnitnogo tela [Basic equations and relations of the theory of asymmetric magnetoelasticity of a ferromagnetic body]. *Problemy mekhaniki deformiruyemykh tverdykh tel* [*Problems of Mechanics of Deformable Solids*]. Collection of papers dedicated to the 80th anniversary of S.A. Ambartsumyan. Yerevan. NAS of Armenia Publ. 2002. P. 37–47 (In Russian).
34. Sarkisian S.O., Sarkisian L.S. Magnitouprugost' mikropolyarnykh uprugikh tonkikh obolochek i plastin [Magnetoelasticity of micropolar elastic thin shells and plates]. *Izvestiya NAN Armenii. Mekhanika* [*Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*]. 2010. Vol. 63. No 3. P. 52–65 (In Russian).
35. Romeo M. Acoustic waves in micropolar elastic ferroelectrics. *Mechanics Research Communications*. 2015. Vol. 63. P. 33–38.
36. Kabychenkov A.F., Lisiovskii F.V. The nonlocal elastomagneto-electrostatics of disordered micropolar media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2016. Vol. 123. No 2. P. 254–264.
37. Kabychenkov A.F., Lisiovskii F.V., Mansvetova E. G., Arzamastseva E.G. Transformation of hybrid transverse elastic waves in nonuniform micropolar media. *Acoustical Physics*. 2018. Vol. 64. No 6. P. 673–677.
38. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Magnetic field effect on strain wave localization. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2010. Vol. 39. №1. P. 78–82.
39. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Localized magnetoelastic waves formation. *International Review of Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 4. No 5. P. 581–585.
40. Malkhanov A.O., Erofeev V.I. Magnitouprugaya volna Rimana v sterzhne [Riemann's magnetoelastic wave in the rod]. *Nelineynyy mir* [*Nonlinear World*]. 2009. Vol. 7. No 12. P. 933–936 (In Russian).
41. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Catson V.M., Malkhanov A.O. Nelineynye prodolnye lokalizovannye volny v plastine, vzaimodeystviyushchey s magnitnym polem [Nonlinear localized longitudinal waves in a plate under magnetic field]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [*Computational Continuum Mechanics*]. 2010. Vol. 3. No 4. P. 5–15 (In Russian).
42. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Nelineynye lokalizovannye prodolnye magnitouprugie volny v plastine, nakhodyashchey v proizvolno orientirovannom magnitnom pole [Nonlinear longitudinal localized magnetoelastic waves in a plate in an arbitrarily oriented magnetic field]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [*Computational Continuum Mechanics*]. 2012. Vol. 5. No 1. P. 79–84 (In Russian).
43. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Localized strain waves in a nonlinearly elastic conducting medium interacting with a magnetic field. *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52. No 2. P. 224–231.
44. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O., Shekoyan A.V. Nonlinear longitudinal magnetoelastic waves in a rod with account of damage in its material. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 35. No 1. P. 44–52.
45. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. Vol. 97. No 9. P. 1064–1071.
46. Deev V.M. Sistemnyy analiz uravneniy prostranstvennoy zadachi nesimmetrichnoy teorii uprugosti v peremeshcheniyakh [System analysis of the equations of the spatial problem of the asymmetric theory of elasticity in displacements]. *Matematicheskoye modelirovaniye v yestestven-*

nykh naukakh. Tezisy dokladov 10 Vserossiyskoy konferentsii molodykh uchenykh [Mathematical Modeling in the Natural Sciences. Abstracts of the Reports of the 10th All-Russian Conference of Young Scientists]. Perm. 2001. P. 14 (In Russian).

47. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Continuum Electrodynamics]. Moscow. Nauka Publ. 1982. 620 p. (In Russian).

48. Erofeev V.I., Pavlov I.S. *Strukturnoe modelirovanie metamaterialov* [Structural Modeling of Metamaterials]. Nizhny Novgorod. IAP RAS Publ. 2019 (In press). (In Russian).

49. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants. *Archives of Mechanics*. 1981. Vol. 33. No 5. P. 717–737.

SPATIALLY-LOCALIZED NONLINEAR MAGNETOELASTIC WAVES IN A MICROPOLAR ELECTRICAL CONDUCTING MEDIUM

Erofeev V.I.^{1,2}, Shekoyan A.V.³, Belubekyan M.V.³

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

³*Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia*

A nonlinear model of an electrically conducting micropolar medium interacting with an external magnetic field is proposed. The deformable state of such a medium is described by two asymmetric tensors: tensor of deformations and bending-torsion tensor. In both tensors, linear and nonlinear terms are taken into account in rotation gradients and displacement gradients (geometric nonlinearity). The components of the bending-torsion tensor, which have identical indices, describe torsional deformations, and the rest – bending deformations. The stress state of the medium is described by two asymmetric tensors: stress tensor and moment stress tensor. It is assumed, as it is usual in magnetoelasticity, that the action of the electromagnetic field on the deformation field occurs through the Lorentz forces. From the system of Maxwell equations follow the equations for electrical and magnetic inductions, which, together with the electromagnetic equations of state, must be added to the equations of the dynamics of a micropolar medium.

Within the framework of the proposed model, a one-dimensional nonlinear shear-rotation magnetoelastic wave is considered. The nonlinear term is selected and taken into account in the equations of dynamics, making the most significant contribution to wave processes. It is shown that two factors will influence the wave propagation: dispersion and nonlinearity. Nonlinearity leads to the emergence of new harmonics in the wave, which contributes to the appearance of a sharp drop in the moving profile. The dispersion, on the contrary, smoothes the differences due to the difference in the phase velocities of the harmonic components of the waves. The combined effect of these factors can lead to the formation of stationary waves that propagate at a constant speed without changing the shape. Only those cases are physically feasible when there is no constant component in the deformation wave. Stationary waves can be both periodic and aperiodic. The latter are spatially localized waves – solitons. It is shown that the behavior of "subsonic" and "supersonic" solitons will be qualitatively different.

Keywords: micropolar medium, nonlinearity, electrical conductivity, magnetic field, wave, spatial localization.