

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-521-536

**ХАРАКТЕРИСТИКА СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ
И ПОСТРОЕНИЕ ПО НЕЙ ФУНКЦИИ РЕЛАКСАЦИИ***

© 2019 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 11.07.2019

Исследуются общие свойства семейства диаграмм деформирования с постоянными скоростями, порождаемых линейным определяющим соотношением вязкоупругости с произвольной функцией релаксации (в одноосном случае). Получена формула для показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, аналитически исследована его зависимость от деформации, скорости деформации и функции релаксации. Доказано, что показатель скоростной чувствительности зависит не от двух, а от одного аргумента (отношения текущей деформации к скорости), а величина показателя всегда лежит в интервале от нуля до единицы (то есть линейная теория вязкоупругости описывает только псевдопластические среды и не способна описывать дилатантные среды). Введено понятие функции скоростной чувствительности, которую можно рассматривать как материальную функцию. Установлено, что она может быть не только возрастающей или убывающей, но и может иметь локальный максимум (существование которого весьма важно, например, при моделировании сверхпластичности материалов). Показано, что по ней можно восстановить функцию релаксации с точностью до положительного постоянного множителя, найдены критерии убывания и выпуклости вниз получающейся функции релаксации, то есть условия, при которых построенная функция релаксации удовлетворяет минимальным необходимым ограничениям, налагаемым на нее в линейной теории вязкоупругости. Разработана методика, позволяющая строить модели линейной вязкоупругости по заданным кривым скоростной чувствительности, аппроксимирующим зарегистрированную в испытаниях материала в определенных структурно-температурно-скоростных режимах, в частности, по кривым, склеенным из нескольких участков (например, аппроксимированных сплайнами).

Ключевые слова: вязкоупругость, диаграммы деформирования, скоростное упрочнение, показатель скоростной чувствительности, функция скоростной чувствительности, функция релаксации, идентификация, фрактальные модели Фойгта, фрактальный элемент, уравнения с дробной производной, сверхпластичность, сигмоидальная кривая.

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_а).

Введение

Настоящая статья продолжает цикл работ [1–5] по аналитическому исследованию физически линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) $R(t)$ и ползучести $\Pi(t)$, $t > 0$, с целью определения комплекса моделируемых им реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации. ОС (1) связывает истории напряжения и деформации в одноосных изотермических процессах в структурно-стабильных материалах. Функции релаксации и ползучести в (1) предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0, \infty)$, функция $\Pi(t)$ – возрастающей и выпуклой вверх на $(0, \infty)$ [1–4], а $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз; $R(t)$ может быть непрерывной на луче $[0, \infty)$ (тогда модель называется регулярной), а может иметь в точке $t=0$ интегрируемую особенность (например, степенную) или содержать сингулярное слагаемое $\eta \delta(t)$ (δ – дельта-функция), $\eta > 0$. В статьях [1, 5] анализировались общие свойства семейства диаграмм деформирования (ДД) $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ при постоянных скоростях деформации $\dot{\varepsilon} = a$, порождаемых ОС (1), в частности, начато изучение его зависимости от скорости и возможностей ОС (1) по описанию разнообразных эффектов, наблюдаемых в испытаниях материалов с высокой скоростной чувствительностью.

Диаграммы деформирования многих материалов (в частности, наследственных) в одноосных квазистатических испытаниях с постоянными скоростями деформации $\dot{\varepsilon} = a$ зависят от скорости a : $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$. Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от a и скоростного упрочнения) – показатель скоростной чувствительности (ПСЧ)

$$m(a, \varepsilon) = \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a}. \quad (2)$$

К примеру, для классической степенной модели вязкой (жидкообразной) среды

$$\sigma(t) = K |\dot{\varepsilon}(t)|^M |\varepsilon(t)|^n \operatorname{sgn} \varepsilon(t), \quad K > 0, \quad M \in (0, 1], \quad n \geq 0, \quad (3)$$

($M \in (0, 1)$ для псевдопластических сред, $M > 1$ для дилатантных сред) семейство ДД имеет вид $\sigma(\varepsilon, a) = K \varepsilon^n a^M$, а ПСЧ равен M (не зависит от a и ε).

Особенно важна величина высокой скоростной чувствительности материала и характер ее изменения при сверхпластическом деформировании [6–22], которое лежит в основе важных технологических процессов штамповки изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [7–20]. Сверхпластичность – это способность многих материалов (металлов и сплавов, интерметаллидов, керамик и т.д.) в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100–200% и более) при относительно низком напряжении течения (в несколько раз меньше предела текучести материала в обычном состоянии при той же температуре) и его сильной зависимости от скорости деформации. Режим сверхпластичности характеризуется величиной $m \in [0, 3; 1)$, тогда как для материалов в обычном состоя-

нии $m \leq 0,1$. Многочисленные результаты испытаний показывают [7–21], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна сигмоидальная форма графика зависимости $\lg \sigma$ от $\lg a$, то есть наличие точки перегиба со сменой выпуклости вниз на выпуклость вверх и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (2) от $\lg a$ при фиксированной деформации.

В статье [5] начато исследование общих свойств ПСЧ (2) ДД $\sigma = \sigma(\epsilon, a)$, порождаемых линейным ОС (1), и обнаружено, что оно не только порождает (при определенных ограничениях на ФР) ДД с выраженными участками течения при постоянном напряжении, но и, как ни странно, способно моделировать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, то есть сигмоидальную форму зависимости напряжения от скорости деформации в осях $\lg \sigma - \lg a$, и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0,5; 1)$, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов, причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации (см. далее). Эти условия выполняются даже для классической модели Кельвина из двух упругих элементов и одного вязкого элемента. Этой способностью ОС (1) выгодно отличается от модели (3) (традиционно используемой в течение полувека для описания сверхпластичности) и всех параллельных соединений моделей вида (3), которые не могут описывать ни наличие максимума ПСЧ [22], ни релаксацию напряжений. Обнаруженный факт выявляет важность учета упругих деформаций, которыми зачастую пренебрегают в моделировании сверхпластичности, для описания максимума ПСЧ. Из этого результата следует принципиальная возможность использования линейных интегральных операторов вида (1), инвариантных относительно сдвигов по времени, как полезного инструмента (элемента) при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала [5], и необходимость более детального исследования возможностей линейного ОС (1) по описанию эффектов, связанных со скоростной чувствительностью наследственных материалов.

Цель настоящей статьи – доказать, что показатель скоростной чувствительности (2) в рамках линейной теории вязкоупругости является функцией не двух независимых аргументов ϵ и a (при фиксированной ФР), а одного, доказать, что по этой функции можно восстановить функцию релаксации и разработать методику построения моделей линейной вязкоупругости вида (1) с заданной формой кривой скоростной чувствительности (зарегистрированной в испытаниях материала).

1. Семейство диаграмм деформирования линейного ОС вязкоупругости

Время и напряжение в ОС (1) предполагаются безразмерными. В силу линейности операторов (1) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа масштабирования напряжений и времени. Из положительности и монотонности функций релаксации и ползучести на $(0, \infty)$ следует, что в точке $t = 0$ существуют пределы справа $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$ и $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если R не ограничена сверху) и предел $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$. Если $\Pi(0+) \neq 0$, то модель регулярна и $R(0+) = 1/\Pi(0+)$.

Процесс деформирования с постоянной скоростью $\epsilon = at$ ОС (1) переводит в напряжение

$$\sigma(t) = atP(t), \quad P(t) = t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (4)$$

В [1] доказаны следующие свойства осреднения ФР $P(t)$, полезные при анализе ДД и ПСЧ.

Лемма. Пусть $R(t)$ – положительная непрерывная убывающая функция. Тогда $P(t)$, $t > 0$, – гладкая убывающая функция, обладающая свойствами: 1) $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$ при $t > 0$; 2) $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$; 3) $P(+\infty) = R(+\infty)$; 4) для регулярной ФР $P(0+) = R(0+)$; 5) если $R(t)$ дифференцируема, то $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$, а функция $tP(t)$ возрастает и выпукла вверх; 6) если $\dot{R}(0+) < \infty$, то $P(0+) = \dot{R}(0+)/2$.

Исключив параметр $t = \varepsilon/a$, получим из (4) ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (5)$$

Секущий и касательный модули выражаются формулами $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$. При $\varepsilon \rightarrow 0+$ они стремятся к пределу $E = \sigma'(0) = R(0+) = P(0+)$ (если модель регулярна, то есть $R \in C[0; \infty)$), а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ – к пределу $r = R(\infty) = P(\infty) \geq 0$; E и r – мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга – в зависимости от физического смысла σ и ε).

В статье [1] доказаны следующие общие свойства ДД (5) (для любой допустимой ФР).

Теорема 1. Пусть $R(t)$ – положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при $t > 0$. Тогда:

- 1) при любом $a > 0$ ДД $\sigma(\varepsilon)$ монотонна и выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$;
- 2) семейство ДД (5) возрастает по a (поскольку $\dot{P}(t) < 0$);
- 3) мгновенный и длительный модули E и r не зависят от скорости деформации a ;
- 4) при любом $a > 0$ справедлива оценка $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$ (правое неравенство содержательно при $E < \infty$, то есть в случае $R \in C[0; \infty)$);
- 5) при $a \rightarrow 0$ семейство ДД (5) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$;
- 6) при $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (5) любой *регулярной* модели сходится (снизу) к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси ε ;
- 7) если модель не регулярна (то есть $R \notin C[0; \infty)$), то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$;
- 8) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД (5) обладает асимптотой лишь тогда, когда сходится интеграл $I = \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$; тогда каждая ДД (5) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I > 0$, и $\sigma < r\varepsilon + Ia$.

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (1) к его моделированию.

2. Функция скоростной чувствительности линейного ОС и ее общие свойства

Вычислим ПСЧ (2) по ДД (5), используя формулу п. 2 леммы из раздела 1 – $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$:

$$m(a, \varepsilon) = -\sigma^{-1} a \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 P' \left(\frac{\varepsilon}{a} \right) = \varepsilon \sigma^{-1} \left(P \left(\frac{\varepsilon}{a} \right) - R \left(\frac{\varepsilon}{a} \right) \right),$$

так как

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = P\left(\frac{\varepsilon}{a}\right),$$

то

$$m(x) = 1 - \frac{R(x)}{P(x)}, \quad x = \frac{\varepsilon}{a} > 0. \quad (6)$$

Итак, ПСЧ – гладкая функция, зависящая от одного аргумента $x = \varepsilon/a$; будем называть $m(x)$ функцией скоростной чувствительности (ФСЧ). Каждой конкретной модели (1) (каждой ФР) соответствует своя ФСЧ, характеризующая все свойства модели, поскольку по ней можно восстановить ФР с точностью до положительного множителя (всем ФР $\lambda R(t)$, $\lambda > 0$, соответствует одинаковая ФСЧ, ибо R/P не зависит от λ).

Так как по лемме $P(x) > R(x) > 0$ при $x > 0$, то из (6) следует *общая оценка* $0 < m(x) < 1$, справедливая для любой ФР. Таким образом, линейное ОС (1) описывает лишь псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость $\eta = \sigma/\dot{\varepsilon}$ – возрастающая функция скорости деформации). Предельные случаи реализуются для упругого элемента с $R(t) = E = \text{const}$, $P(t) = E$ и $m(x) = 0$ и для ньютоновской жидкости: $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta t^{-1}$ и $m(x) = 1$ при $x > 0$.

Предел ФСЧ при $x \rightarrow 0$ зависит от класса, к которому принадлежит модель (ФР). Если ФР непрерывна справа в точке $t = 0$ (модель регулярна), то при $x \rightarrow 0$ (то есть при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $a \rightarrow \infty$) имеем $m \rightarrow 0$, поскольку $P(0+) = R(0+)$ по лемме. Для сингулярных моделей $R(0+) < \infty$ и $P(t) = \eta t^{-1}$ и потому $m(0+) = 1$. Если $R(t) \sim t^{-\alpha}$ при $t \rightarrow 0$, $\alpha \in (0, 1)$, то $P(t) \sim (1 - \alpha)^{-1} t^{-\alpha}$ и по (6) $m(0+) = \alpha$.

Предел ФСЧ (6) при $x \rightarrow \infty$ также может принимать любые значения из $[0, 1]$. Если $r = R(\infty) > 0$, то $m \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (то есть при $\varepsilon \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow 0$), поскольку по лемме $P(\infty) = R(\infty) = r$ и $R(x)/P(x) \rightarrow 1$. В случае $r = 0$ за неопределенностью $0/0$ может скрываться любой предел (из отрезка $[0, 1]$). Если $R(t) \sim t^{-\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$, то по (6) $m(\infty) = \alpha$. А для модели Максвелла с $R = E \exp(-\mu t)$ имеем $P(t) = E \mu^{-1} t^{-1} (1 - \exp(-\mu t))$, $R(x)/P(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, и потому $m \rightarrow 1$.

В статье [5] доказано следующее утверждение о существовании максимума ПСЧ (6).

Теорема 2. Пусть ФР $R(t)$ в ОС (1) – положительна, дифференцируема, убывает и выпукла вниз на интервале $(0, \infty)$. Если $R(t)$ непрерывна на луче $[0, \infty)$ (то есть модель регулярна) и $R(\infty) \neq 0$, то функция (6) непрерывна на $[0, \infty)$, $m(0) = 0$, $m(\infty) = 0$ и $m(x)$ имеет хотя бы один локальный максимум.

Точкой максимума будет точка $x = \hat{x}$, в которой $m(x)$ достигает своей точной верхней грани $\hat{m} = m(\hat{x})$ на $[0, \infty)$. При фиксированной скорости a функция $m(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеет максимум в точке $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$. А при фиксированном ε функция $m(a)$, $a > 0$, имеет максимум в точке $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$. Таким образом, линейное ОС (1) способно моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости $\lg \sigma$ от $\lg a$, столь важные для сверхпластичности.

Для сингулярных ФР и неограниченных в точке $t = 0$ ФР свойства ФСЧ, доказанные для регулярных ФР, могут нарушаться. Например, для модели Фойгта (с $R = \eta\delta(t) + r$) имеем $P = r + \eta/t$, и ДД (5) и ФСЧ (6) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a, \quad m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x = \varepsilon/a > 0, \quad (7)$$

где $\lambda = r/\eta = 1/\tau > 0$, τ – время ретардации. Очевидно, что $m(x)$ убывает при всех $x \geq 0$, причем $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$. А для модели Скотта Блэра с ФР $R(t) = At^{-\alpha}$,

$\alpha \in (0, 1)$ (ее можно задать оператором дробного дифференцирования $\sigma = \eta D^\alpha \varepsilon$ [23–29], и потому ее называют фрактальным элементом), будет $P(t) = Kt^{-\alpha}$, $K = A/(1 - \alpha)$, и ДД (5) и ФСЧ (6) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^{-\alpha} = K\varepsilon^{1-\alpha} a^\alpha, \quad m(x) = \alpha, \quad x > 0. \quad (8)$$

Таким образом, ПСЧ фрактального элемента не зависит от a и ε (как и ПСЧ нелинейной модели (3)); далее будет доказано, что это свойство присуще только степенным ФР среди линейных моделей (1).

Фрактальная модель Фойгта – параллельное соединение упругого элемента с фрактальным элементом Скотта Блэра [23–29]; эта трехпараметрическая (нерегулярная) модель описывается интегральным оператором (1) с неограниченной ФР вида

$$R(t) = r + At^{-\alpha}, \quad A > 0, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (9)$$

или дифференциальным уравнением с дробной производной $\sigma = r\varepsilon + \eta D^\alpha \varepsilon$, $\eta = A/(1 - \alpha)$. При $\alpha \in (0, 1)$ интеграл (4) для осреднения ФР (9) сходится, $P = r + A(1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ и семейства ДД и ФСЧ модели (9) задаются формулами

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1 - \alpha)^{-1}a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}, \quad (10)$$

$$m(x) = \frac{A\alpha(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}}{r + A(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \bar{r}(1 - \alpha)x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \bar{r} = \frac{r}{A} \quad (11)$$

(при $\varepsilon \rightarrow \infty$ асимптоты у ДД (10) нет, длительный модуль $\sigma'_\varepsilon(\infty, a) = r$). Очевидно, что $m(0) = \alpha$. Если $r > 0$, то $m(x)$ монотонно убывает при всех $x > 0$, $m(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$ и $m(\infty) = 0$. Если $r = 0$, то $m(x) = \alpha$ – константа. При $\alpha \rightarrow 0+$ семейства ДД и ФСЧ (10) и (11) фрактальной модели Фойгта сходятся к ДД и ФСЧ упругого элемента с модулем $E = r + A$, а если наложить на параметры ФР связь $A/(1 - \alpha) = \eta$, где $\eta > 0$ – фиксированная постоянная (равная интегралу $R(t)$ по $[0, 1]$), то при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ семейства ДД и ФСЧ (8) сходятся к ДД и ФСЧ ньютоновского вязкого элемента с $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta/t$ и $m(x) = 1$. Соответственно семейства ДД и ФСЧ фрактальной модели Фойгта (10) и (11) сходятся к ДД и ФСЧ (7) классической модели Фойгта (с сингулярной ФР).

Для иллюстрации свойств ФСЧ рассмотрим регуляризацию фрактальной модели Фойгта

$$R(t) = r + A(t + h)^{-\alpha}, \quad A, h, \alpha > 0, \quad r \geq 0. \quad (12)$$

При $h = 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ регулярная ФР (12) вырождается в нерегулярную ФР (9), а мгновенный модуль $E = R(0) = r + A\eta^{-\alpha}$ стремится к бесконечности при $h \rightarrow 0+$. В случае $\alpha \neq 1$ осреднения функции релаксации (12), ДД и ФСЧ имеют вид:

$$P(t) = r + A(1 - \alpha)^{-1}t^{-1}[(t + h)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}],$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + A(1 - \alpha)^{-1}h^{1-\alpha}a[(1 + \varepsilon(ah)^{-1})^{1-\alpha} - 1],$$

$$m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + h^{-\alpha}(1 + x/h)^{-\alpha}}{\bar{r} + (1 - \alpha)^{-1}h^{1-\alpha}x^{-1}[(1 + x/h)^{1-\alpha} - 1]}, \quad x > 0, \quad \bar{r} = \frac{r}{A}. \quad (13)$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$P(t) = r + At^{-1} \ln \frac{t+h}{h} \text{ и } m(x) = 1 - \frac{\bar{r} + (x+h)^{-1}}{\bar{r} + x^{-1} \ln(1+x/h)}.$$

В силу регулярности ФР (12) $m(0+) = 0$. Предел $m(\infty)$ и интервалы монотонности $m(x)$ зависят от r и α . Если $r > 0$, то $m(\infty) = 0$ и $m(x)$ имеет точку максимума (теорема 2). Если $r = 0$, то $m(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$ (соответственно $m(a)$ убывает при всех $a > 0$), а $m(\infty) = \alpha$ в случае $\alpha \in (0, 1)$ и $m(\infty) = 1$ для любого $\alpha \geq 1$.

На рис. 1 приведены ДД при $\alpha = 0,01; 0,02; 0,03$ для модели (12) с $\alpha = 0,9, A = 9, r = 1, h = 10^{-6}$ (кривые 1–3) и для трех фрактальных моделей (9) с $A = 9$: 1) с $\alpha = 0,9, r = 1$ (красные ДД 11–13); 2) с $\alpha = 0,9, r = 0$ (ДД 11'–13'); 3) с $\alpha = 0,5, r = 1$ (голубые ДД 21–23). Все ДД моделей (9) имеют вертикальную касательную в нуле ($E = R(0) = \infty$), а обе модели с показателем $\alpha = 0,9$ (близким к единице) имеют длинный, почти вертикальный, участок быстрого роста при очень малых ε (приближающийся по длине к вертикальному участку $a\eta$ модели Фойгта с $\eta = A/(1-\alpha)$). За счет этого ДД фрактальных моделей (9) с α , близким к 1, очень сильно зависят от скорости деформации и от величины α , а ДД регуляризации (12) сильно отклоняется от ДД фрактальной модели (9) даже при малых ε (кривые 1–3 при $h = 10^{-6}$). При меньших α чувствительность ДД модели (12) к величине h гораздо ниже и отклонение от ДД модели (9) гораздо меньше (кривая 31 – ДД модели (12) с $\alpha = 0,5, h = 0,1$ для $\alpha = 0,01$, она почти совпадает с ДД 21 модели (9) с $\alpha = 0,5$). ДД 21–23 модели (9) с $\alpha = 0,5$ значительно слабее зависят от a и при малых ε растут медленнее, чем ДД 1–3.

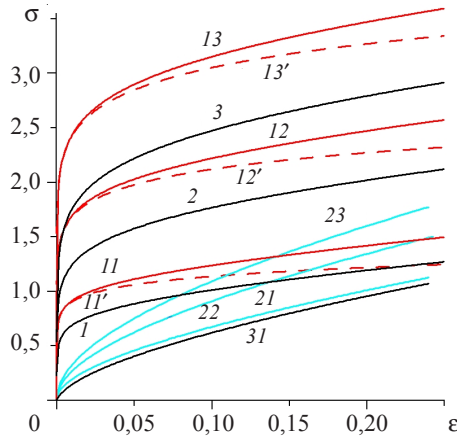


Рис. 1. Диаграммы деформирования модели (12) и трех фрактальных моделей Фойгта (9)

На рис. 2а приведены графики ФСЧ $m(x)$ для моделей (12) с $h = 1, \bar{r} = r/A = 1/9$ (кривые 1–5) и $r = 0$ (голубые кривые 1'–5') и с разными показателями: $\alpha = 0,2; 0,5; 0,9; 2,5$. У моделей с $r \neq 0$ (кривые 1–5) $m(x)$ имеет точку максимума и $m \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, а у моделей с $r = 0$ (кривые 1'–5') m возрастает при $x > 0$. ФСЧ моделей (12) с $r = 0$ и $\alpha < 1$ (кривые 1'–3' для $\alpha = 0,2; 0,5; 0,9$) имеют горизонтальные асимптоты $m = \alpha$ (прямые 11'–13'), а ФСЧ моделей с $\alpha \geq 1$ (кривые 4', 5') – общую асимптоту $m = 1$ (прямая 14'). Эти прямые совпадают с ФСЧ фрактального элемента (ФР (12) с $r = 0$ и $h = 0$). При заданном r чем больше α , тем выше график $m(x)$ в окрестности точки $x = 0$ (и тем больше максимальное значение $m(\hat{x})$); для моделей с $r = 0$ это верно на всей оси, а для моделей с $r > 0$ порядок графиков по вертикали быстро

меняется на обратный правее точек максимума \hat{x} . При $\alpha \rightarrow \infty$ $m(\hat{x})$ растет (но не до 1), $\hat{x} \rightarrow 0$, и правый склон графика $m(x)$ все ближе по очертанию к ФСЧ модели Фойгта $m = 1/(1 + \lambda x)$ (красная штрихпунктирная линия 10 – ФСЧ модели Фойгта с $\lambda = r/\eta = 1$). Красные кривые 12 и 13 – ФСЧ (11) фрактальных моделей Фойгта (9) с $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0,9$ и $\bar{r} = 1/9$.

На рис. 2б приведены зависимости $m(a)$ при фиксированном $\varepsilon = 0,01; 0,05; 0,10; 0,20; 0,30$ для двух моделей с $\alpha = 2$ (то есть $\alpha > 1$): при $\bar{r} = 1/9$, то есть $r/E = 0,1$ (кривые 1–5) и при $r = 0$ (голубые кривые 1'–5'). Для модели с $r = 0$ $m(a)$ убывает при всех $a > 0$, причем $m(a) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Для модели с $r \neq 0$ графики $m(a)$ имеют точки максимума, максимальное значение ФСЧ $m(\hat{x})$ для конкретной модели не зависит от ε и $m(a) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Для сравнения приведены графики $m(a)$ модели (12) с $\alpha = 0,2$, $r = 0$ при $\varepsilon = 0,01; 0,10; 0,30$ (синие кривые 11', 13', 15'). Красная кривая 13 – $m(a)$ фрактальной модели Фойгта (9) с $\alpha = 0,9$ и $\bar{r} = 1/9$ при $\varepsilon = 0,10$.

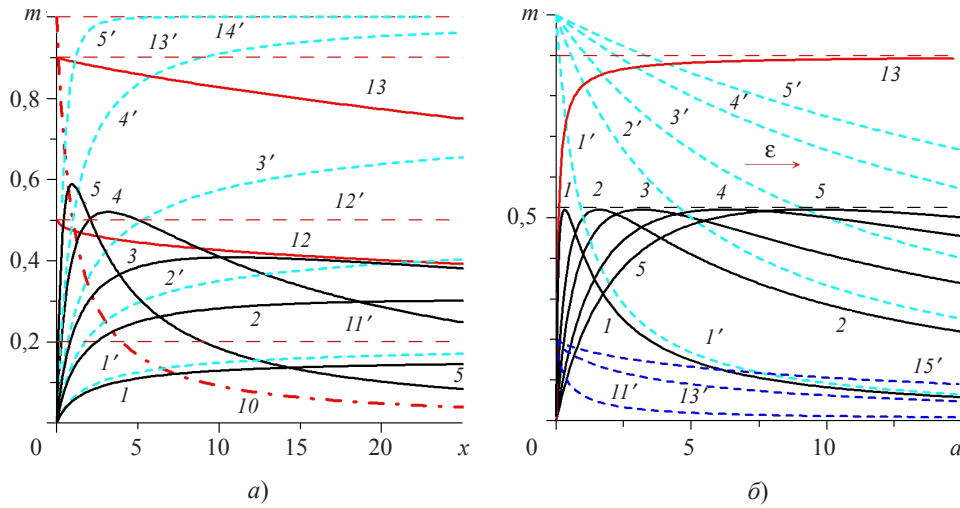


Рис. 2. Кривые скоростной чувствительности $m(x)$ моделей вида (12) (а); зависимости $m(a)$ (б)

3. Построение функции релаксации по функции скоростной чувствительности

По заданной непрерывной и кусочно-гладкой функции $m(x)$, такой, что $0 < m < 1$ при $x > 0$, можно восстановить ФР $R(x)$ с точностью до положительного множителя, так как по (6) всем ФР $\lambda R(t)$, $\lambda > 0$, соответствует одна и та же ФСЧ $m(x)$. Для определения $\lambda > 0$ надо задать еще начальное условие $R(t_0) = R_0 > 0$. В самом деле, из (6) следуют интегральное и дифференциальное уравнения для $R(x)$:

$$\int_0^x R(t) dt = x(1 - m(x))^{-1} R(x),$$

или

$$R' = f(x)R, \quad f(x) = -x^{-1}m(x) - m'(x)(1 - m(x))^{-1}. \quad (14)$$

Очевидно $f(x)$ кусочно-непрерывна, и множество ее точек разрыва совпадает с множеством точек разрыва $m'(x)$ на $(0, \infty)$ (как правило, пустым), а наличие разры-

вов у $m'(x)$ равносильно наличию разрывов у $\dot{R}(t)$ в силу (14) (такие ФР иногда используют, склеивая задаваемые представления для ФР, в частности, полагая $R(t) = \text{const}$ при больших t).

Если, например, $m(x) = M = \text{const}$ на некотором отрезке $[\tau, T]$, $\tau > 0$, то уравнение (14) принимает вид $\dot{R} = -Mt^{-1}R$ и потому $R(t) = A(t/\tau)^{-M}$, $t \in [\tau, T]$, то есть постоянство ПСЧ возможно лишь для степенных (на заданном отрезке) ФР. Этот вывод не зависит от поведения $m(x)$ при $x < \tau$, которое сказывается лишь на величине множителя A . Если же задана ФСЧ $m(x)$ с финитным носителем ($m(x) = 0$ при $x \notin [\tau, T]$), то из (14) следует, что $R(t) = C_1$ при $t \leq \tau$ и $R(t) = C_2 = \text{const}$ при $t \geq T$, то есть ФР меняется только на $[\tau, T]$, а при $t \leq \tau$ и $t \geq T$ модель ведет себя, как упругая (или как жидкость в случае $C_2 = 0$).

Решение дифференциального уравнения (14) с начальным условием $R(t_0) = R_0 > 0$ имеет вид:

$$R(t) = R_0 \exp \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

Обозначив $y(x) = x^{-1}m(x)$, получим:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(x) dx &= - \int_{t_0}^t \frac{m(x)}{x} dx - \int_{t_0}^t \frac{m'(x)}{1-m(x)} dx = \\ &= - \int_{t_0}^t y(x) dx - \int_{m_0}^m (1-m)^{-1} dm = - \int_{t_0}^t y(x) dx + \ln \frac{1-m(t)}{1-m(t_0)} \end{aligned}$$

и

$$R(t) = R_0 \frac{1-m(t)}{1-m(t_0)} \exp(-Y(t)), \quad Y(t) = \int_{t_0}^t y(x) dx, \quad y = x^{-1}m(x), \quad t \geq t_0 > 0. \quad (15)$$

Очевидно функция $R(t)$ непрерывна, и $R(t) > 0$, поскольку $m(t) < 1$. Точки разрыва $\dot{R}(t)$ совпадают с точками разрыва $m'(x)$. Так как $0 < m < 1$, то $0 < y < x^{-1}$, $Y(t)$ возрастает, $0 < Y(t) < \ln(t/t_0)$ при $t > t_0$, $t_0/t < \exp(-Y(t)) < 1$, и потому верна оценка для ФР (15):

$$t_0[1-m(t_0)]^{-1}[1-m(t)]t^{-1} < R(t)/R(t_0) < [1-m(t_0)]^{-1}[1-m(t)], \quad t > t_0 > 0. \quad (16)$$

Предел ФР (15) при $t \rightarrow \infty$ зависит от поведения интеграла $Y(t)$. Если $Y(\infty) < \infty$ (интеграл сходится), то $m(\infty) = 0$ (в предположении, что предел $m(\infty)$ существует) и $R(\infty) = R_0(1-m(t_0))^{-1} \exp(-Y(\infty)) > 0$. Если же интеграл $Y(t)$ расходится, то $\exp(-Y(\infty)) \rightarrow 0$ и $R(\infty) = 0$. Для этого достаточно, чтобы $m(\infty) > 0$ (тогда $y(x) \sim m(\infty)x^{-1}$ при $x \rightarrow \infty$), в частности $m(\infty) > 0$, если $m(x)$ не убывает при $x > x_0$.

Выясним, когда ФР (15), восстановленная по ФСЧ, удовлетворяет необходимым ограничениям на ФР в ОС (1) (см. введение), то есть выведем критерии монотонного убывания $R(t)$ и ее выпуклости вниз.

Из дифференциального уравнения (14) следует, что критерий (нестрогого) убывания $R(x)$ при $x > 0$ – выполнение неравенства $f(x) \leq 0$, то есть

$$-x^{-1}m(x) \leq m'(x)(1-m(x))^{-1},$$

или

$$m'(x) \geq -x^{-1}m(x)(1-m(x)), \quad x > 0. \quad (17)$$

Поскольку $0 < m(1 - m) \leq 1/4$ при $0 < m < 1$, то для выполнения неравенства (17) необходимо $m'(x) \geq -0,25x^{-1}$ и достаточно, чтобы $m' \geq 0$, то есть *неубывание* $m'(x)$ обеспечивает убывание R .

Однако неравенству (17) может удовлетворять и убывающая ФСЧ $m(x)$. Рассмотрим случай равенства в (17). Нелинейное уравнение $m'(x) = -x^{-1}m(1 - m)$ имеет особые решения $m = 0$ и $m = 1$, а в случае $0 < m < 1$ переменные разделяются: $(m^2 - m)^{-1}dm = x^{-1}dx$. Его решение с начальным условием $m(x_0) = m_0$ (где $x_0 > 0$, $m_0 \in (0, 1)$) имеет вид: $\ln |(m - 1)/m| - \ln |(m_0 - 1)/m_0| = \ln x - \ln x_0$. Полагая $\lambda = (1 - m_0)/(x_0 m_0)$, получим: $m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}$ с $\lambda > 0$. Это семейство убывающих при $x > 0$ функций. Примечательно, что оно в точности совпадает с ФСЧ модели Фойгта (7). Таким образом, модель Фойгта в очередной раз оказалась маргинальной. Легко проверить, что для убывающих функций $m(x) = A(1 + \lambda x)^{-\alpha}$, $A \in (0, 1]$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, неравенство (17) равносильно неравенству $A(1 + \lambda x)^{1-\alpha} \leq 1 + \lambda(1 - \alpha)x$. Поэтому они удовлетворяют неравенству (17) при всех $x > 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in (0, 1]$. При $\alpha > 1$ (17) выполняется только на отрезке $x \in [0, \bar{x}]$, где $\bar{x} = \bar{x}(A, \alpha, \lambda)$ – корень уравнения $A(1 + \lambda x)^{1-\alpha} = 1 + \lambda(1 - \alpha)x$.

Нетрудно привести и простые примеры функций, которые не могут быть ФСЧ. Функции $m = A \exp(-\lambda x)$, $A \in (0, 1]$, $\lambda > 0$, не удовлетворяют (17) ни в одной точке $x > 0$. Линейные функции $m(x) = -kx + b$, $k, b > 0$, удовлетворяют неравенству (17) лишь тогда, когда $b \in (0, 1)$ и $kx \leq b - 1 + \sqrt{1 - b}$, то есть (17) выполняется лишь на отрезке $x \in [0, \bar{x}]$, где $\bar{x} = k^{-1}(b - 1 + \sqrt{1 - b})$.

Найдем критерий выпуклости вниз ФР (15). Из (14) следует $R'' = f'R + fR' = (f' + f^2)R$, где $R > 0$, поэтому $R'' > 0$ равносильно условию $f' + f^2 > 0$ для всех $x > 0$, то есть

$$x^{-2}m - x^{-1}m' - (m''(1 - m) + m'^2)[1 - m]^{-2} + x^{-2}m^2 + m'^2[1 - m]^{-2} + 2x^{-1}mm'[1 - m]^{-1} > 0,$$

или

$$x^{-2}(m + m^2) - x^{-1}m' - m''(1 - m)[1 - m]^{-2} + 2x^{-1}mm'[1 - m]^{-1} > 0.$$

Умножив на $(1 - m)x^2$, получим:

$$(m + m^2)(1 - m) - xm'(1 - m) - x^2m'' + 2xmm' > 0,$$

или

$$x^2m'' < m(1 - m^2) + xm'(3m - 1). \quad (18)$$

Это и есть критерий выпуклости вниз ФР. Для тех x , в которых $3m(x) - 1 > 0$, можно получить более простое достаточное условие выпуклости R , используя неравенство (17) в виде $xm'(3m - 1) \geq -m(1 - m)(3m - 1)$, дающее оценку снизу для правой части (18):

$$x^2m'' < m(1 - m^2) - m(1 - m)(3m - 1), \text{ то есть } m'' < 2m(1 - m)^2x^{-2}.$$

Пример 1. Построим по формуле (15) ФР, соответствующую ФСЧ

$$m(x) = \alpha(1 + \lambda x^\alpha)^{-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \lambda > 0. \quad (19)$$

Легко проверить, что ФСЧ (19) удовлетворяет условиям убывания и выпуклости ФР (17) и (18) (именно при $\alpha \in (0, 1)$ и $\lambda > 0$). Интеграл $Y(t)$ в (15) вычисляется заменой $u = x^\alpha$:

$$Y(t) = \alpha \int_{t_0}^t x^{-1} (1 + \lambda x^\alpha)^{-1} dx = \int_{u_0}^u u^{-1} (1 + \lambda u)^{-1} du = \int_{u_0}^u [u^{-1} - \lambda (1 + \lambda u)^{-1}] du = \ln \frac{u}{1 + \lambda u} \Big|_{t_0^\alpha}^{t^\alpha},$$

то есть

$$Y(t) = \ln \frac{1 + \lambda t_0^\alpha}{t_0^\alpha} \frac{t^\alpha}{1 + \lambda t^\alpha}$$

и согласно (15)

$$R(t) = R_0 \frac{t_0^\alpha (1 + \lambda t^\alpha - \alpha)}{t^\alpha (1 + \lambda t_0^\alpha - \alpha)} = C[\lambda + (1 - \alpha)t^{-\alpha}].$$

В результате получается ФР, пропорциональная ФР (9) – фрактальной модели Фойгта.

Пример 2. Пусть $\tau > 0$, $A < 1/\tau$, $M = A\tau$; построим ФР, соответствующую ФСЧ

$$m(x) = Ax \text{ при } x \in [0, \tau], m(x) = M \text{ при } x > \tau. \quad (20)$$

Легко проверить, что ФСЧ вида (20) удовлетворяет условиям убывания и выпуклости ФР (17) и (18) ((18) превращается в неравенство $Ax < 3$ при $x < \tau$ и в неравенство $M(1 - M^2) > 0$ при $x > \tau$). По формуле (15) с $t_0 = 0$ ФР, соответствующая ФСЧ (20), имеет вид

$$R(t) = R(0) \left(1 - \frac{Mt}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{Mt}{\tau}\right), \quad t < \tau; \quad (21)$$

$$R(t) = R(0)(1 - M) \exp(-M) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-M}, \quad t > \tau.$$

На отрезке $[0, \tau]$ ФР убывает быстро (практически линейно по времени), в точке $t = \tau$ ФР имеет излом и переходит в режим более спокойного (степенного) убывания к горизонтальной асимптоте $R = 0$.

На рис. 3 приведены ФР (21) с начальным значением $R(0) = 10$ для ФСЧ (20) с $\tau = 1$ и $M = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,7; 1,0$ (кривые 1–4, 7, 10) и $\tau = 3$, $M = 0,1; 0,2; 0,3; 0,7$ (синие кривые 1', 2', 3', 7').

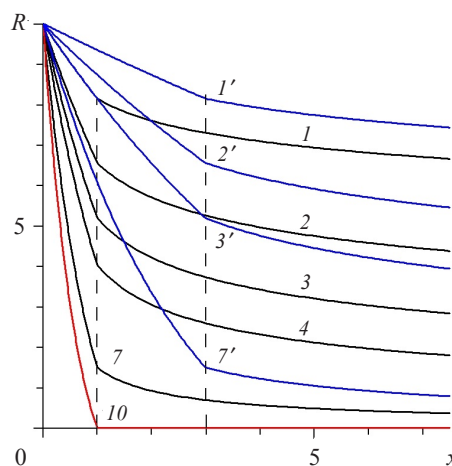


Рис. 3. Функции релаксации (21), соответствующие ФСЧ (20), при разных M и τ

Чем больше M в (20), тем ниже график соответствующей ФР (свойство убывания оператора (15)). В случае $M = 1$ $R(t) = 0$ при $t > \tau$, то есть модель с наибольшим возможным значением ПСЧ полностью релаксирует за конечное время τ (кривая 10).

Отметим еще одно общее свойство оператора (15), отображающего ФСЧ $m(x)$ в функцию релаксации $R(t)$, – его убывание: если $m_2(t_0) = m_1(t_0)$ и $m_2(x) \geq m_1(x)$ при $x \in [t_0, T]$, то $R_2(t) \leq R_1(t)$ при $t \in [t_0, T]$ (оба положительных множителя в (15) уменьшаются при переходе от m_1 к m_2). Последнее свойство наблюдается в опытах: скорость релаксации материала в сверхпластичном состоянии возрастает с ростом ПСЧ и в состоянии сверхпластичности скорость релаксации существенно выше, чем в обычном состоянии [14, 15] (даже существует методика определения оптимальной температуры для сверхпластического деформирования по минимальному времени релаксации [14, 15]). Таким образом, линейная теория вязкоупругости отражает (как ни странно) и эту качественную особенность режима сверхпластичности, помимо способности описывать наличие максимума ПСЧ [5].

Заключение

Аналитически исследована скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования (5), порождаемых физически линейным ОС вязкоупругости (1) с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации. Выведено общее выражение (6) для показателя скоростной чувствительности (параметра скоростного упрочнения) $m(a, \epsilon)$, исследованы его общие качественные свойства и их зависимость от деформации, скорости деформации и функции релаксации. Доказано, что показатель скоростной чувствительности зависит не от двух, а от одного аргумента (отношения текущей деформации к скорости), и что значения показателя всегда лежат в интервале от нуля до единицы, то есть линейная теория вязкоупругости описывает лишь псевдопластические среды и не способна описывать поведение дилатантных сред. На основе формулы (6) введено понятие функции (кривой) скоростной чувствительности, которую можно рассматривать как материальную функцию, так как по заданной дифференцируемой функции $m(x)$, такой, что $0 < m < 1$ при $x > 0$, можно восстановить ФР с точностью до положительного постоянного множителя, который находится из начального условия для ФР. Изучены общие свойства функции $m(x)$, установлено, что она может не только возрастать или убывать, но может иметь максимум и может принимать значения, сколь угодно близкие к единице, верхней границе для псевдопластических сред. Получена двусторонняя оценка (16) для ФР через функцию скоростной чувствительности. Найдены критерии убывания и выпуклости вниз ФР, восстановленной по $m(x)$, то есть условия, при которых построенная ФР удовлетворяет минимальным необходимым ограничениям на ФР в ОС (1). Разработана методика, позволяющая строить модели линейной вязкоупругости по заданным кривым скоростной чувствительности (аппроксимирующим зарегистрированную в испытаниях материала в определенных структурно-температурно-скоростных режимах), в частности, по кривым, склеенным из нескольких участков (например, аппроксимированных сплайнами).

Список литературы

1. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. №1. С. 60–74. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74.
2. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2017. Т. 21. №2. С. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533.
3. Хохлов А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации. *Известия РАН. МТТ*. 2018. №3. С. 81–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.
4. Хохлов А.В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25. №2. С. 259–280 DOI: 10.33113/mkmk.gas.2019.25.02.259_280.09.
5. Хохлов А.В. Общие свойства показателя скорости чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки* (в печати).
6. Бочвар А.А., Свицерская З.А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием. *Известия АН СССР. ОТН*. 1945. №9. С. 821–824.
7. Грабский М.В. *Структурная сверхпластичность металлов*. М: Металлургия, 1975. 272 с.
8. Смирнов О.М. *Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности*. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
9. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 314 p.
10. Новиков И.И., Портной В.К. *Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном*. М.: Металлургия, 1981. 168 с.
11. Кайбышев О.А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
12. Сегал В.М., Резников В.И., Копылов В.И., Павлик Д.А. *Процессы пластического структурообразования металлов*. Минск: Наука и техника, 1994. 232 с.
13. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 287 p.
14. Васин Р.А., Еникеев Ф.У. *Введение в механику сверхпластичности*. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
15. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 363 p.
16. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. 542 p.
17. Ефимов О.Ю., Громов В.Е., Иванов Ю.Ф. *Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением*. Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, Интер-Кузбасс, 2012. 345 с.
18. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam: Elsevier, 2018. 324 p.
19. Langdon T.G. Forty-five years of superplastic research: recent developments and future prospects. *Materials Science Forum*. 2016. Vol. 838–839. P. 3–12. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3.
20. Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И., Трусов П.В. Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2018. №3. С. 103–127. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.11.
21. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve. *Journal of Materials Science*. 2000. Vol. 35. No 10. P. 2455–2466.
22. Белякова Т.А., Гончаров И.А., Хохлов А.В. О невозможности моделирования сигмо-

идальных кривых сверхпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25. №3. С. 299–315. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2019.25.03.299_315.01.

23. Caffyn J.E., Scott Blair G.W. Significance of power-law relations in rheology. *Nature*. 1945. Vol. 155. P. 171–172.

24. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения. *ПММ*. 1948. Т. 12. №3. С. 251–260.

25. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*. 1999. Vol. 198. San Diego: Academic Press, 340 p.

26. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. In: *North-Holland Mathematics Studies*. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

27. Rossikhin Yu., Shitikova M. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2007. Vol. 10. No 2. P. 111–121.

28. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal. Special Topics*. 2011. Vol. 193. No 1. P. 133–160.

29. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2016. Т. 20. №1. С. 167–194. DOI: 10.14498/vsgtu1456.

References

1. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkoupругosti pri postoyannoy skorosti deformatsii [General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from the linear theory of viscoelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 1. P. 60–74. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74 (In Russian).

2. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivyykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriey nasledstvennosti [Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2017. Vol. 21. No 2. P. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533 (In Russian).

3. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. No 3. P. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105.

4. Khokhlov A.V. Indikatory neprimenimosti lineynoy teorii vyazkoupругosti po dannym ispytaniy materiala na polzuchest pri rastyazhenii s nalozheniem gidrostaticheskogo davleniya [Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii [Mechanics of Composite Materials and Structures]*. 2019. Vol. 25. No 2. P. 259–280. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2019.25.02.259_280.09 (In Russian).

5. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva pokazatelya skorostnoy chuvstvitelnosti diagramm deformirovaniya, porozhdaemykh lineynoy teoriey vyazkoupругosti, i sushchestvovanie maksimuma u ego zavisimosti ot skorosti [Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. (In press). (In Russian).

6. Bochvar A.A., Sviderskaia Z.A. Yavlenie sverkhplastichnosti v splavakh tsinka s alyuminiem. [Phenomenon of superplasticity in zinc-aluminum alloys]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. [Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Technical Sciences]*. 1945. No 9. P. 821–824 (In Russian).

7. Grabskii M.V. *Strukturnaya sverkhplastichnost metallov* [Structural Superplasticity of Metals]. Moscow. Metallurgiya Publ. 1975. 272 p. (In Russian).
8. Smirnov O.M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoyanii sverkhplastichnosti* [Shaping of Metals in the Superplasticity State]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1979. 184 p. (In Russian).
9. Padmanabhan K.A., Davies J.J. *Superplasticity*. Berlin. Springer-Verlag. 1980. 314 p.
10. Novikov I.I., Portnoy V.K. *Sverkhplastichnost splavov s ultramelkim zernom* [Superplasticity of Ultrafine-Grained Alloys]. Moscow. Metallurgiya Publ. 1981. 168 p. (In Russian).
11. Kaibyshev O.A. *Sverkhplastichnost promyshlennykh splavov* [Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow. Metallurgiya Publ. 1984. 264 p. (In Russian).
12. Segal V.M., Reznikov V.I., Kopylov V.I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniya metallov* [Processes of Plastic Structure Formation of Metals]. Minsk. Nauka i tekhnika Publ. 1994. 232 p. (In Russian).
13. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge. Cambridge University Press. 1997. 287 p.
14. Vasin R.A., Enikeev F.U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* [Introduction to the Superplasticity Mechanics]. Ufa. Gilem Publ. 1998. 280 p. (In Russian).
15. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2001. 363 p.
16. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York. Nova Science Pub. Inc. 2010. 542 p.
17. Efimov O.U., Gromov V.E., Ivanov U.F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoystv staley i splavov v uprochnyayushchikh tekhnologiyakh obrabotki davleniem* [Forming of Structure, Phase Composition and Properties of Steels and Alloys in the Hardening Technologies of Pressure Treatment]. Novokuznetsk. Sibirskiy gosudarstvennyy industrialnyy universitet. Inter-Kuzbass Publ. 2012. 345 p. (In Russian).
18. Faraji G., Kim H.S., Kashi H.T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam. Elsevier. 2018. 324 p.
19. Langdon T.G. Forty-five years of superplastic research: recent developments and future prospects. *Materials Science Forum*. 2016. Vol. 838–839. P. 3–12. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3.
20. Sharifullina E.R., Shveykin A.I., Trusov P.V. Obzor eksperimentalnykh issledovaniy strukturnoy sverkhplastichnosti: evolyutsiya mikrostruktury materialov i mekhanizmy deformirovaniya [Review of experimental studies of structural superplasticity: evolution of the microstructure of materials and deformation mechanisms]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin]. 2018. No 3. P. 103–127. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.11 (In Russian).
21. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurski M.I., Munirova O.S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve. *J. Mater. Sci.* 2000. Vol. 35. No 10. P. 2455–2466.
22. Beliakova T.A., Goncharov I.A., Khokhlov A.V. O nevozmozhnosti modelirovaniya sigmoidalnykh krivykh sverkhplastichnosti paralelnym ili posledovatelnyim soedineniyami stepennykh vyazkikh elementov [The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only parallel or series connections of power-law viscous elements]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 2019. Vol. 25. No 3. P. 299–315. DOI: 10.33113/mkmm.ras.2019.25.03.299_315.01 (In Russian).
23. Caffyn J.E., Scott Blair G.W. Significance of power-law relations in rheology. *Nature*. 1945. Vol. 155. P. 171–172.
24. Gerasimov A.N. Obobshchenie lineynykh zakonov deformirovaniya i ego primenenie k zadacham vnutrennego treniya [A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1948. Vol. 12. No 3. P. 251–260 (In Russian).
25. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*. 1999. Vol. 198. San Diego. Academic Press. 340 p.
26. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. In: *North-Holland Mathematics Studies*, 204. Amsterdam. Elsevier. 2006. 523 p.

27. Rossikhin Yu., Shitikova M. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2007. Vol. 10. No 2. P. 111–121.
28. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal. Special Topics.* 2011. Vol. 193. No 1. P. 133–160.
29. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. Matematicheskoe modelirovanie nasledstvenno uprugogo deformiruemogo tela na osnove strukturnykh modeley i apparata drobnogo integro-differentsirovaniya Rimana - Liuvillya [Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integrodifferentiation Riemann – Liouville apparatus]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*]. 2016. Vol. 20. No 1. P. 167–194. DOI: 10.14498/vsgtu1456 (In Russian).

**THE CHARACTERISTIC OF THE STRAIN RATE SENSITIVITY
OF STRESS-STRAIN CURVES IN THE LINEAR VISCOELASTICITY THEORY
AND ITS INTERRELATION WITH RELAXATION MODULUS**

Khokhlov A.V.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Properties of the stress-strain curves family generated by the Boltzmann–Volterra linear viscoelasticity constitutive equation under uni-axial loadings at constant strain rates are studied analytically. Assuming relaxation modulus is arbitrary, the general expression for strain rate sensitivity index as the function of strain and strain rate is derived and analyzed. It is found out (within the framework of the linear viscoelasticity theory) that the strain rate sensitivity index depends only on the single argument that is the ratio of strain to strain rate. So defined function of one real variable is termed “the strain rate sensitivity function” and it may be regarded as a material function since it is interconvertible with relaxation modulus. It is found out that this function can be increasing or decreasing or non-monotone or can have local maximum or minimum without any complex restrictions imposed on the relaxation modulus. It is proved that the strain rate sensitivity value is confined in the interval from zero to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) whatever strain and strain rate magnitudes are and its values may be close to unity (even for the standard linear solid model). It means that the linear viscoelasticity theory is able to produce high values of strain rate sensitivity index and to provide existence of the strain rate sensitivity index local maximum with respect to strain rate (for any fixed strain). These properties are the most distinctive features of superplastic deformation regime observed in numerous materials tests.

The explicit integral expression for relaxation modulus via the strain rate sensitivity function is derived. It enables one to restore relaxation modulus assuming a strain rate sensitivity function is given. The restrictions on the strain rate sensitivity function are obtained to provide decrease and convexity down of the resulting relaxation modulus as a function of time, i.e. to provide necessary properties of a relaxation modulus in the linear viscoelasticity. Thus, the technique is developed to evaluate relaxation modulus using test data for strain rate sensitivity, in particular, using piecewise smooth approximations (by splines, for example) of an experimental strain rate sensitivity function.

Keywords: viscoelasticity, stress-strain curves at constant strain rates, strain hardening, strain rate sensitivity index (function), relaxation modulus, identification, fractional models, the Scott-Blair fractional element, fractional differential equations, superplasticity, sigmoid curve.