

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-513-520

**О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО БРУСА
ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА
С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ***

© 2019 г.

Еремеев В.В.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

er.vadim@gmail.com

Поступила в редакцию 23.09.2019

В рамках трехмерной нелинейной теории упругости рассмотрена линейная неустойчивость составной плиты, изготовленной из функционально-градиентного материала и имеющей начальные напряжения. Плита состоит из двух слоев, которые получены путем распрямления двух секторов цилиндрической оболочки. Такая деформация обуславливает появление внутренних напряжений, поэтому составная плита оказывается предварительно напряженной. Начальные напряжения зависят от координаты по толщине и неоднородны. Рассмотрены два типа неоднородности – неоднородность начального поля напряжений и неоднородность материала. В качестве уравнения состояния использовалась модель несжимаемого неогукковского материала. Несмотря на достаточно простой вид, используемая модель материала хорошо описывает существенные деформации ряда резиноподобных материалов. Для несжимаемых материалов распрямление сектора цилиндра представляет собой универсальную деформацию, то есть такую форму деформации, которая не зависит от выбора уравнений состояния. Неоднородность материала описывалась зависимостью модуля сдвига от координаты по толщине. Подобная неоднородность может быть связана с технологическими процессами получения материала либо с его последующей обработкой. Устойчивость исследовалась методом линеаризации. На начальное деформированное состояние налагались малые возмущения. Приведена линеаризованная краевая задача, получены ее нетривиальные решения. Решение построено аналитически в виде рядов с использованием тригонометрических функций. Это позволило автоматически удовлетворить части краевых условий. Рассмотрено влияние неоднородности материала и начальных напряжений. Показано, что начальные напряжения могут существенно влиять на критические деформации. Например, возможна потеря устойчивости только за счет начальных напряжений.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, потеря устойчивости, предварительные напряжения, толстые плиты.

* Выполнено при поддержке грантом Президента РФ МК-3692.2018.1.

Введение

Неоднородные материалы часто используются в технике. Многообещающим классом неоднородных материалов являются функционально-градиентные твердые материалы и структуры [1–3]. Также неоднородность может проявляться из-за наличия в теле неоднородных начальных, остаточных напряжений или предварительно напряженных включений [4]. Такие включения могут образовываться в результате различных искусственных или естественных процессов в отдельных частях тела, примерами их являются фазовые превращения, процессы роста, химические реакции, пластические деформации и т. д. Среди подобных структур – тонкие пленки, нанесенные на эластомерную подложку [5–7], которые применяются для устройств гибкой электроники [8, 9]. Для анализа указанных структур оказываются полезны методы трехмерной нелинейной теории упругости [10–19]. Характерной особенностью нелинейных упругих тел с предварительно напряженными включениями является отсутствие в них одинаковой для всего тела естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации. В ряде случаев отсчетная конфигурация может быть выбрана только таким образом, чтобы она была предварительно напряженной для некоторых частей тела и ненапряженной для остальных.

В статье проведен анализ устойчивости двухслойного составного бруса из несжимаемого функционально-градиентного неогукковского материала. Брус симметричен по толщине. Каждый слой составной полосы был получен в результате выпрямления сектора цилиндрической оболочки с некоторым начальным углом. Модуль сдвига μ является функцией координаты по толщине слоя. После выпрямления сектора части бруса жестко склеиваются, и полученная плита деформируется как единый объект. Таким образом, в составном бруске формируется поле неоднородных предварительных деформаций. В статье представлен анализ статической линейной устойчивости. Соответствующая линеаризованная задача сформулирована для двухслойного бруса с неоднородными предварительными напряжениями в каждом слое.

Линеаризованные уравнения равновесия и граничные условия, дополненные соответствующим условием линеаризованной несжимаемости, решаются с использованием полуаналитического метода. Рассмотрены различные законы изменения модуля сдвига μ . Проведен анализ зависимости критических нагрузок от начального угла. Исследования показали, что начальные поля напряжений могут изменять как значения критических нагрузок, так и форму потери устойчивости.

1. Постановка задачи

Рассматривается двухслойный упругий брус с размерами $2h \times b \times a$, все в отсчетной конфигурации. Слои получены выпрямлением сектора цилиндрической оболочки, как показано на рис. 1.

Такая деформация бруса является универсальной, то есть реализуемой для всех несжимаемых материалов [10, 11], и определяется формулами:

$$X = X(r), \quad Y = \chi\phi, \quad Z = z, \quad \chi > 0, \quad (1)$$

где $\chi > 0$ – параметр деформации, X , Y , Z и r , ϕ , z – соответственно отсчетные декартовы и текущие полярные координаты.

Уравнения равновесия без массовых сил и определяющие соотношения для гиперупругих тел имеют вид [10]:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}), \quad (2)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{F} – тензор напряжений Пиолы и градиент деформации соответственно. Отметим, что здесь \mathbf{F} определяется, как в [10, 20]. Очевидно, что \mathbf{P} и \mathbf{F} зависят от отсчетной конфигурации. Обычно используется так называемая естественная, то есть ненапряженная, отсчетная конфигурация. Для материалов с предварительно напряженными включениями или слоями невозможно выбрать одну и ту же естественную отсчетную конфигурацию для всего тела, поэтому необходимо рассматривать несколько естественных начальных состояний.

Градиенты деформации преобразуются при замене отсчетной конфигурации следующим образом [4]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{F}', \quad \mathbf{F}': \kappa' \rightarrow X, \quad \mathbf{F}'': \kappa'' \rightarrow X, \quad \mathbf{A}': \kappa' \rightarrow K', \quad \mathbf{A}'': \kappa'' \rightarrow K'', \quad (3)$$

где κ' и κ'' – рассматриваемые разные отсчетные конфигурации, K' и K'' – промежуточные конфигурации, X – деформированная конфигурация, \mathbf{A}' , \mathbf{A}'' – градиенты деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к промежуточной. С учетом условия несжимаемости эти тензоры принимают вид:

$$\mathbf{A}' = \frac{dX(r)}{dr} \mathbf{e}_r \mathbf{i}_1 + \frac{\chi}{r} \mathbf{e}_r \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{A}'' = -\frac{dX(r)}{dr} \mathbf{e}_r \mathbf{i}_1 + \frac{\chi}{r} \mathbf{e}_r \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (4)$$

где \mathbf{e}_j – координатные орты в отсчетной конфигурации, $j = r, \phi, z$; \mathbf{i}_k – координатные орты в текущей конфигурации, $k = 1, 2, 3$.

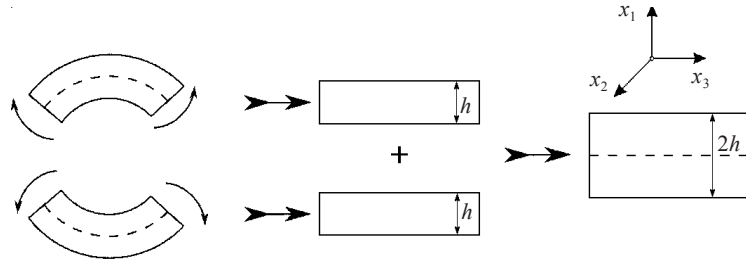


Рис. 1

Брус нагружен нормальными силами, приложенными к поверхности $0 \leq x_3 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$. Грани плиты $x_1 = -h$ и $x_1 = h$ предполагаются свободными от действия внешних сил. Таким образом, невозмущенное деформированное состояние составной плиты описывается формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_0 &= (\lambda_3 \lambda_2)^{-1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad 0 \leq x_1 \leq h, \\ \mathbf{F}''_0 &= (\lambda_3 \lambda_2)^{-1} \lambda_3 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad -h \leq x_1 \leq 0, \\ \lambda_2 &= \text{const} > 0, \quad \lambda_3 = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где λ_3, λ_2 – постоянные кратностей удлинений.

Линеаризованные краевые условия на гранях плиты имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 0 \text{ и } x_3 = a: w_2(x_1, x_2, x_3) = 0, w_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \dot{P}_{33} = 0; \\ \text{при } x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b: w_1(x_1, x_2, x_3) = 0, w_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \dot{P}_{22} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где w_i – перемещения.

Предполагается идеальный контакт между слоями бруса: поле добавочных перемещений непрерывно при пересечении границы слоев.

В качестве уравнения состояния используется модель несжимаемого неогуковского материала [4, 10, 11]. Удельная потенциальная энергия деформации W задается выражением

$$W = \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) - 3], \quad \mathbf{P} = \mu \mathbf{F} - p \mathbf{F}^{-T}, \quad (7)$$

где $\mu = \mu(x_1)$ – модуль сдвига, p – давление в несжимаемом теле, $\mu(x_1) = \mu_0 \exp \gamma |x_1|$, $\mu_0 = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$.

Тензор напряжений Пиолы относительно напряженных отсчетных конфигураций \mathbf{K}' и \mathbf{K}'' для неогуковского материала имеет вид:

$$\mathbf{P}' = \mu \mathbf{P}'^T \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' - p' \mathbf{P}'^{-T}, \quad \mathbf{P}'' = \mu \mathbf{P}''^T \cdot \mathbf{P}'' \cdot \mathbf{P}'' - p'' \mathbf{P}''^{-T}. \quad (8)$$

Линеаризованные уравнения равновесия для материала Трелоара задаются формулами [4, 21]:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{P}}' = \mu \mathbf{B}' \cdot \nabla \mathbf{w}' - \dot{p}' \mathbf{F}_0'^{-T} + \dot{p}_0' \mathbf{F}_0'^{-T} \cdot \nabla \mathbf{w}' \cdot \mathbf{F}_0'^{-T}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{A}'^T \cdot \mathbf{A}', \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{P}}'' = \mu \mathbf{B}'' \cdot \nabla \mathbf{w}'' - \dot{p}'' \mathbf{F}_0''^{-T} + \dot{p}_0'' \mathbf{F}_0''^{-T} \cdot \nabla \mathbf{w}'' \cdot \mathbf{F}_0''^{-T}, \quad \mathbf{B}'' = \mathbf{A}''^T \cdot \mathbf{A}'', \quad (11)$$

$$\text{tr}(\mathbf{C}_0^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}) = 0. \quad (12)$$

Начальные напряжения определяются формулами:

$$P'_{11} = \mu \lambda_3 \lambda_2^{-1} \frac{r^2}{\chi^2} - p'_0 \lambda_3 \lambda_2, \quad (13)$$

$$P'_{22} = \mu \lambda_2 \frac{\chi^2}{r^2} - p'_0 \lambda_2^{-1},$$

$$P'_{33} = \mu \lambda_3 - p'_0 \lambda_3^{-1},$$

$$P''_{11} = \mu \lambda_3 \lambda_2^{-1} \frac{r^2}{\chi^2} - p''_0 \lambda_3 \lambda_2, \quad (14)$$

$$P''_{22} = \mu \lambda_2 \frac{\chi^2}{r^2} - p''_0 \lambda_2^{-1},$$

$$P''_{33} = \mu \lambda_3 - p''_0 \lambda_3^{-1}.$$

Величины $p'_0, p''_0, X = X(r)$ и χ задаются выражениями:

$$p'_0 = \mu \lambda_3^{-2} \lambda_2^{-2} \frac{r^2}{\chi^2}, \quad p''_0 = \mu \lambda_3^{-2} \lambda_2^{-2} \frac{r^2}{\chi^2},$$

$$X(r) = \frac{r^2}{2\chi} + C, \quad \chi = \left[\frac{\mu}{3} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^{-1} - r_2^{-1}} \right]^{1/4}.$$

2. Уравнения потери устойчивости

Исследование потери устойчивости проводится методом наложения малой деформации на конечную деформацию [10–19, 21]. Для плит из неогуковского мате-

риала этот метод использовался в [21], а в для плит с предварительными напряжениями – в [4]. Рассматривается вектор малых добавочных перемещений, который представляется в виде

$$\mathbf{w} = w_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_1 + w_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_2 + w_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_3.$$

Компоненты \mathbf{w} и линейризованное давление p могут быть записаны в виде [4, 21]:

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_1) \sin \frac{\pi n x_3}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}, \\ w_2 &= W_2(x_1) \sin \frac{\pi n x_3}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b}, \\ w_3 &= W_3(x_1) \cos \frac{\pi n x_3}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}, \\ \dot{p} &= P(x_1) \sin \frac{\pi n x_3}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}. \end{aligned} \quad (15)$$

Линеаризованные тензоры Пиолы для среднего и внешних слоев имеют вид [4, 21]:

$$\dot{\mathbf{P}}' = \dot{P}'_{ks} i_k i_s, \quad \dot{\mathbf{P}}'' = \dot{P}''_{ks} i_k i_s, \quad k, s = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Сами компоненты тензоров здесь не приводятся в силу их громоздкости (см. [4, 21], где эти выражения приведены).

В результате получена линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, которая анализируется полуаналитическими методами, описанными в [4].

3. Обсуждение полученных результатов

Рассмотрена неустойчивость составной упругой плиты, изготовленной из двух слоев эластомерного функционально-градиентного материала, с самоуравновешенным полем начальных напряжений. Использована модель несжимаемого материала Трелоара с модулем сдвига, экспоненциально зависящим от толщины. Для анализа потери устойчивости применен метод наложения малых деформаций на начальные конечные деформации. Получена линеаризованная краевая задача, проанализированы ее нетривиальные решения в зависимости от свойств материала и начальных напряжений.

Для пространственной задачи рассмотрено два результирующих усилия, как параметры нагружения. Введены результирующие усилия N_k , $k = 2, 3$, как интегралы по толщине от напряжений

$$N_k = \int_{-h}^h P_{kk} dx_3.$$

Между параметрами растяжения λ_2 и λ_3 существует зависимость, для которой линеаризованная краевая задача имеет нетривиальные решения. Эта критическая зависимость между λ_2 и λ_3 определяется численно. Поскольку N_k являются функциями λ_2 и λ_3 , на плоскости (N_2, N_3) существуют критические кривые, которые разделяют область устойчивых от неустойчивых исходных решений. Поскольку ненапряженное состояние устойчиво, то область устойчивости содержит точку $(N_2, N_3) = (0, 0)$. Показано, что увеличение γ приводит к стабилизирующему эффекту, то есть к увеличению критических нагрузок. На рис. 2 данные выводы проиллюстри-

рованы для плоской деформации. Здесь показана зависимость критического усилия от толщины при различных значениях γ .

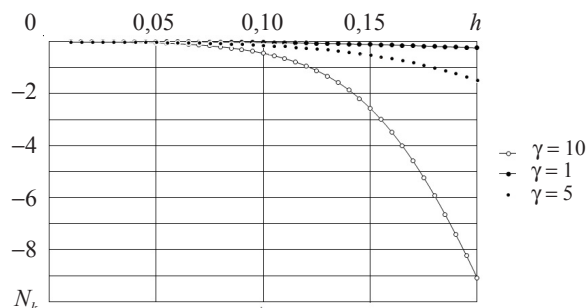


Рис. 2

Список литературы

1. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. (Eds). New York. Springer. 2013. 330 p.
2. Shen H.S. *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. Boca Raton. CRC Press. 2016. 280 p.
3. Bırsan M., Altenbach H., Sadowski T., Eremeyev V.A., Pietras D. Deformation analysis of functionally graded beams by the direct approach. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43. No 3. P. 1315–1328.
4. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two-layered circular plate with a prestressed layer. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22. No 4. P. 773–781.
5. Bowden N., Brittain S., Evans A.G. et al. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer. *Nature*. 1998. Vol. 393. No 6681. P. 146–149.
6. Cao Y., Hutchinson J.W. Wrinkling phenomena in neo-Hookean film/substrate bilayers. *Journal of Applied Mechanics*. 2012. Vol. 79. No 3. P. 031019-1–031019-9.
7. Hutchinson J.W. The role of nonlinear substrate elasticity in the wrinkling of thin films. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2013. Vol. 371. No 1993. P. 1–18.
8. Sun Y., Choi W.M., Jiang H. et al. Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics. *Nature Nanotechnology*. 2006. Vol. 1. No 3. P. 201–207.
9. Khang D.-Y., Jiang H., Huang Y., Rogers J.A. A stretchable form of single-crystal silicon for high-performance electronics on rubber substrates. *Science*. 2006. Vol. 311. No 5758. P. 208–212.
10. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. Ogden R.W. *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola. Dover. 1997. 556 p.
12. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Oxford. Clarendon Press. 1954. 457 p.
13. Green A.E., Adkins J.E. *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*. Oxford. Clarendon Press. 1960. 348 p.
14. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity*. Amsterdam. Elsevier science & technology. 1993. Vol. 1. 451 p.
15. Ogden R.W. Elasticity and inelasticity of rubber. In: *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*. Vienna. Springer. 2004. P. 135–185.
16. Ogden R.W. Incremental statics and dynamics of pre-stressed elastic materials. *Waves in Nonlinear Pre-Stressed Materials*. Vienna. Springer. 2007. Vol. 495. P. 1–26.
17. Gurtin M.E. *Topics in Finite Elasticity*. Philadelphia. SIAM. 1983. 58 p.
18. Truesdell C., Noll W. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik*. 1965. Vol. III/3. Berlin. Springer. 1965. P. 1–602.
19. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear stability analysis of pre-stressed elastic bodies. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 1999. Vol. 11. P. 141–172.

20. Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics*. New Jersey. World Scientific. 2018. 415 p.
21. Zubov L.M. Выпучивание пластинок из неогукковского материала при аффинной начальной деформации. *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34. №4. С. 632–642.

References

1. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. (Eds). New York. Springer. 2013. 330 p.
2. Shen H.S. *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. Boca Raton. CRC Press. 2016. 280 p.
3. Břrsan M., Altenbach H., Sadowski T., Eremeyev V.A., Pietras D. Deformation analysis of functionally graded beams by the direct approach. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43. No 3. P. 1315–1328.
4. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two-layered circular plate with a prestressed layer. *Math. Mech. Solids*. 2017. Vol. 22. No 4. P. 773–781.
5. Bowden N., Brittain S., Evans A.G. et al. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer. *Nature*. 1998. Vol. 393. No 6681. P. 146–149.
6. Cao Y., Hutchinson J.W. Wrinkling phenomena in neo-Hookean film/substrate bilayers. *J. Appl. Mech.* 2012. Vol. 79. No 3. P. 031019-1–031019-9.
7. Hutchinson J.W. The role of nonlinear substrate elasticity in the wrinkling of thin films. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2013. Vol. 371. No 1993. P. 1–18.
8. Sun Y., Choi W.M., Jiang H. et al. Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics. *Nature Nanotech.* 2006. Vol. 1. No 3. P. 201–207.
9. Khang D.-Y., Jiang H., Huang Y., Rogers J.A. A stretchable form of single-crystal silicon for high-performance electronics on rubber substrates. *Science*. 2006. Vol. 311. No 5758. P. 208–212.
10. Lurye A.I. *Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 512 p. (In Russian).
11. Ogden R.W. *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola. Dover. 1997. 556 p.
12. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Oxford. Clarendon Press. 1954. 457 p.
13. Green A.E., Adkins J.E. *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*. Oxford. Clarendon Press. 1960. 348 p.
14. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity*. Amsterdam. Elsevier science & technology. 1993. Vol. 1. 451 p.
15. Ogden R.W. Elasticity and inelasticity of rubber. In: *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*. Vienna. Springer. 2004. P. 135–185.
16. Ogden R.W. Incremental statics and dynamics of pre-stressed elastic materials. *Waves in Nonlinear Pre-Stressed Materials*. Vienna. Springer. 2007. Vol. 495. P. 1–26.
17. Gurtin M.E. *Topics in Finite Elasticity*. Philadelphia. SIAM. 1983. 58 p.
18. Truesdell C., Noll W. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik*. 1965. Vol. III/3. Berlin. Springer. 1965. P. 1–602.
19. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear stability analysis of pre-stressed elastic bodies. *Continuum Mech. Therm.* 1999. Vol. 11. P. 141–172.
20. Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics*. New Jersey. World Scientific. 2018. 415 p.
21. Zubov L.M. Vypuchivanie plastinok iz neogukovskogo materiala pri affinnoy nachalnoy deformatsii [Buckling of plates of neogotische of material during affine initial deformation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1970. Vol. 34. No 4. P. 632–642 (In Russian).

**ON THE LOSS OF STABILITY OF A TWO-LAYERED PLATE MADE
OF A FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIAL WITH A NON-UNIFORM FIELD
OF PRE-STRESSES**

Eremeev V.V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

In the framework of three-dimensional nonlinear elasticity we consider linear instability of a composite plate made of functionally graded material and having initial stresses. The plate consists of two layers which were obtained as a result of flattening of an annual sector of an elastic cylinder. This deformation results in appearance of internal stresses. Thus, the plate becomes initially stressed. The initial stresses depend on the thickness coordinate, so we get inhomogeneous stress field. We have two types of inhomogeneities, the first is the inhomogeneity of the initial stresses whereas the second is the material inhomogeneity. We use the incompressible neo-Hookean material model as a constitutive relation. Despite of relatively simple form this model describes properly severe deformations of some rubber-like materials. For incompressible materials the flattening constitutes one of the so-called universal deformations, that is such deformation which is independent on the choice of constitutive relation. The material inhomogeneity is described through a dependence of the shear modulus on the thickness coordinate. Such inhomogeneity could be related to the manufacturing of the material or to further treatment. The stability was analysed using the linearization approach. We superimpose infinitesimal deformations on the finite initial one. The linearized boundary-value problem was derived and its nontrivial solutions were obtained. The solution was obtained in series of trigonometric functions. This helps to automatically satisfy a part of boundary conditions. We consider the influence of the inhomogeneity and initial stresses. We show that the initial stresses may significantly change critical deformations. For example, the loss of stability is possible due to initial stresses only.

Keywords: nonlinear elasticity, stability loss, prestresses, thick plate.