

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-462-474

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК*

© 2019 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.09.2019

Сформулирована начально-краевая задача вязкоупругопластического поведения армированных по параллельным поверхностям гибких пологих оболочек. Неупругое поведение материалов композиции описывается уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование определяется соотношениями модели Максвелла – Больцмана. Геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана. Полученные разрешающие уравнения и граничные условия позволяют с разной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние (в том числе и остаточное) в компонентах композиции искривленных панелей. При этом учитывается слабое сопротивление армированной конструкции поперечному сдвигу. В первом приближении из полученных соотношений вытекают уравнения и граничные условия, соответствующие традиционной неклассической теории Редди. Численное решение сформулированной начально-краевой задачи строится на основе явной схемы типа «крест». Исследованы особенности вязкоупругопластического динамического деформирования ортогонально армированной цилиндрической прямоугольной панели под действием нагрузки, вызванной воздушной взрывной волной. Показано, что в некоторых случаях даже для относительно тонких армированных пологих оболочек теория Редди неприемлема для получения адекватных результатов расчетов их вязкоупругопластического динамического поведения. Продемонстрировано, что форма и величина остаточных прогибов композитных искривленных панелей существенно зависят от того, к какой лицевой поверхности конструкции (выпуклой или вогнутой) прикладывается внешняя нагрузка. Обнаружено, что в обоих случаях нагружения остаточные прогибы приводят к образованию продольных складок в тонкой цилиндрической армированной панели.

Ключевые слова: пологие оболочки, перекрестное армирование, вязкоупругопластическое деформирование, геометрическая нелинейность, теория Редди, уточненные теории изгиба, динамическое нагружение, схема типа «крест».

*Выполнено в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Введение

Тонкостенные изделия типа пластин и оболочек из композиционных материалов (КМ) широко используются в конструкторской практике [1, 2], поэтому актуальной является проблема адекватного моделирования их механического поведения. Известно, что тонкостенные элементы, армированные по параллельным поверхностям, слабо сопротивляются поперечным сдвигам [3–10]. Это обстоятельство традиционно учитывают в рамках теории Рейсснера [3, 4, 7, 8] или теории Редди [5, 6, 9, 10], которая является более точной, чем теория Рейсснера, так как учитывает в первом приближении искривление поперечной нормали к срединной поверхности конструкции. В [10] было показано, что при линейно-упругом деформировании КМ-оболочек уточнение теории Редди не требуется. Однако современные инженерные КМ-изделия могут подвергаться высокоинтенсивному нагружению [8, 11], при котором компоненты композиции деформируются неупруго [4, 9, 11].

Упругопластическое поведение слоистых (с изотропными слоями) и волокнистых тонкостенных КМ-конструкций в рамках теорий Рейсснера и Редди исследовалось в [4, 9]. Однако в [12] было показано, что при таком деформировании компонентов композиции требуется уточнение теории Редди. В качестве определяющих соотношений для материалов фаз композиции в [4, 9, 12] использовались уравнения теории Прандтля – Рейсса – Хилла (ТПРХ), которые не учитывают демпфирующие свойства реальных материалов при их осциллирующем деформировании [13]. В силу этого обстоятельства модели, использованные в [4, 9, 12], не позволяют рассчитать остаточные перемещения и остаточное напряженно-деформированное состояние при динамическом упругопластическом деформировании КМ-конструкции. Учесть демпфирующие свойства компонентов композиции можно за счет использования вязкоупругих соотношений [14]. Соответствующая модель вязкоупругопластического деформирования плоско-перекрестно армированных пластин была разработана в [15]. Однако динамическое поведение КМ-оболочек в рамках такой модели деформирования еще не исследовалось.

Настоящая статья посвящена моделированию вязкоупругопластического динамического поведения гибких армированных пологих оболочек в рамках уточненной (по сравнению с теорией Редди) теории изгиба. Для численного интегрирования в рассматриваемой задаче используется явная схема типа «крест» [4, 9, 12, 15].

1. Постановка задачи

Рассматривается полая оболочка толщиной $2h$, с которой связана криволинейная ортогональная система координат x_i так, что отсчетная поверхность x_1x_2 ($x_3 = 0$) является срединной поверхностью ($|x_3| \leq h$), а координатные линии x_1 и x_2 совпадают с линиями главной кривизны этой поверхности. Оболочка перекрестно армирована K семействами волокон по поверхностям, эквидистантным отсчетной поверхности, причем структура армирования в поперечном направлении x_3 однородна (рис. 1, где изображен малый элемент такой конструкции, искривленность элемента в силу ее малости не изображена).

Как показано в [12, 15], при наличии на лицевых поверхностях ($|x_3| = h$) внешних касательных распределенных сил не удается построить явную численную схему типа «крест», поэтому исследуем частный, но важный для практики случай, когда на лицевые поверхности конструкции действуют только нормальные силы.

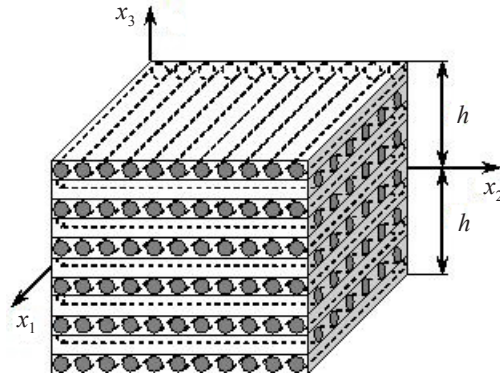


Рис. 1. Элемент ортогонально армированной пологой оболочки

Для описания слабого сопротивления армированной искривленной панели поперечному сдвигу используем уточненные кинематические соотношения, учитывая геометрическую нелинейность в приближении Кармана. Согласно [12], усредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i пологой оболочки аппроксимируем так:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2; \quad (1)$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (3)$$

где w – прогиб; u_i – тангенциальные перемещения точек отсчетной поверхности ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; R_i – главные радиусы кривизны этой поверхности; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по x_i ($i = 1, 2$); M – целое число, определяющее количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах по степеням x_3 ; G – область, занимаемая конструкцией в плане; δ_{ij} – символ Кронекера. Первое равенство в (3) – традиционная для тонкостенных элементов конструкций кинематическая гипотеза, согласно которой изменчивость перемещения $U_3(t, \mathbf{r})$ в поперечном направлении x_3 не учитывается [3–10, 12, 15, 16]. При $M = 0$ из (1)–(3) получаются кинематические гипотезы теории Редди [5, 6, 9, 10].

Таким образом, в соотношениях (1)–(3) неизвестны функции $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2; 0 \leq m \leq M$), зависящие от двух пространственных переменных x_1, x_2 и времени t .

Так как изучается деформирование искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной системы, напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно по толщине конструкции [3]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Двумерные уравнения движения элемента пологой оболочки в рамках уточненной теории при учете выражений (2)–(4) имеют вид [12]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \rho \ddot{u}_i^{(l)} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_j w) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w - \\ &- h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\ &= \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \\ & \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1; \end{aligned} \quad (6)$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности материалов связующего и арматуры k -го семейства; ω_0, ω_k – относительное объемное содержание тех же материалов в представительном элементе композиции; σ_{ij} – усредненные напряжения в композиции. Массовыми нагрузками в (5) пренебрегаем. Согласно третьему соотношению в (6), $M_{ij}^{(0)} = F_{ij}$ и $M_{ij}^{(1)} = M_{ij}$ – мембранные силы и изгибающие и крутящие механические моменты; $M_{i3}^{(0)} = F_{i3}$ ($i, j = 1, 2$) – перерезывающие силы; остальные силовые факторы в (5) – моменты высших порядков от напряжений.

Как и в [15], предполагаем, что компоненты композиции оболочки изотропны, причем их пластическое деформирование определяется соотношениями ТПРХ, а вязкоупругое поведение – соотношениями модели Максвелла – Больцмана. Тогда, согласно рассуждениям, приведенным в [15], при учете (4) в текущий момент времени t получим матричное определяющее уравнение для рассматриваемой армированной искривленной панели, состоящей из вязкоупругопластических материалов:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (7)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, 2\dot{\varepsilon}_{12}, 2\dot{\varepsilon}_{13}, 2\dot{\varepsilon}_{23}\}^T; \quad (8)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – пятикомпонентные векторы-столбцы, элементами которых являются скорости усредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции; пятикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p} и матрица \mathbf{B} размерностью 5×5 вычисляются по формулам (54) из [15], их элементы зависят от вязкоупругопластического состояния и механических характеристик материалов фаз композиции, а также от структуры армированной

ния (направлений и плотностей ω_k армирования); индекс Γ – операция транспонирования.

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи необходимо использовать начальные и граничные условия. На той части кромки конструкции (обозначим ее Γ_σ), на которой заданы силовые граничные условия, в рамках уточненной теории выполняются соотношения в силовых факторах (6) [12]:

$$n_1(M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)}\partial_i w) + n_2(M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)}\partial_i w) = P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)}\partial_l w \right) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0, \quad (9)$$

а на другой части кромки (обозначим ее Γ_u), на которой заданы кинематические граничные условия, – соотношения в обобщенных кинематических переменных (6) при учете (3) [12]:

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad (10)$$

где

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3 \quad (j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2),$$

$$n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma; \quad (11)$$

p_j – заданные на торцевой поверхности конструкции внешние распределенные силы, действующие в направлениях x_j ($j = \overline{1, 3}$); U_{*3} – заданный на Γ_u прогиб; U_{*i} – известные на торцевой поверхности перемещения в тангенциальных направлениях x_i ($i = 1, 2$); γ – угол, задающий направление внешней нормали к контуру $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, ограничивающему область G , и отсчитываемый от направления x_1 .

При $t = t_0$ должны быть заданы начальные условия (см. (3) и (6)) [12]:

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}),$$

$$\dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad (12)$$

где

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1; \quad (13)$$

U_{0j}, V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – известные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек полой оболочки.

Между независимыми кинематическими переменными $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$), использованными в (1)–(3), и обобщенными кинематическими переменными $u_i^{(l)}$ ($i=1, 2, 0 \leq l \leq M+1$), введенными в (6), существует матричная связь [12]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_i + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w} \partial_i w, \quad i=1, 2, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(M)}, u_i^{(M+1)}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \{u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(M-1)}, \varepsilon_{i3}^{(M)}\}^T; \quad (15)$$

\mathbf{C}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{C} размерностью $(M+2) \times (M+2)$; \mathbf{w} – $(M+2)$ -ком-

понентный вектор-столбец, элементы которых определяются по формулам (29) из [12] и вычисляются предварительно независимо от решения рассматриваемой задачи.

2. Метод расчета

Для численного интегрирования исследуемой задачи используем алгоритм с постоянным шагом по времени [4, 9, 11, 12, 15, 16], то есть значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени.

Предполагаем, что в моменты времени t_m уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} {}^m w(\mathbf{x}) &= w(t_m, \mathbf{x}), \quad {}^m u_i^{(l)}(\mathbf{x}) = u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad {}^m \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad {}^m \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad {}^m \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в k -м компоненте композиции ($k = 0$ – связующее, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства). При этом по формулам (6) в момент времени t_n можно определить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, входящие в уравнения движения (5) и граничные условия (9).

Все производные по времени t аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ [4, 9, 12, 15]. Это позволяет разработать явную численную схему интегрирования рассматриваемой задачи. Конечно-разностные аналоги уравнений (5) при учете обозначений, аналогичных (16), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{j=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n - \\ &- l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1. \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Правые части в равенствах (17) известны, поэтому, добавив к ним необходимые граничные условия (9) и (10) при учете (11), можем вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M+1$) в следующий момент времени t_{n+1} . После этого по формулам (14) с учетом обозначений (15) можно определить значения функций u_i , $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2; 0 \leq m \leq M$), а затем, используя (1), можно вычислить и усредненные деформации композиции ε_{i3}^{n+1} . Дальнейшее решение исследуемой задачи при учете соотношений (7) и (8) строится совершенно так же, как и в [12, 15].

Для начала расчета по разработанной численной схеме необходимо знать функ-

ции w^0 и $u_i^{(l)0}$, известные из начальных условий (12) при учете (13), а также функции w^1 и $u_i^{(l)1}$ (см. (17) при $n=1$). Значения этих функций определяются по формуле Тейлора с использованием начальных условий (12) и уравнений движения (5) при $t = t_0$ (см. (40) в [12]).

Необходимые условия устойчивости построенной явной схемы типа «крест» вытекают из условия Куранта [4] и для исследуемой пологой КМ-оболочки определяются неравенствами (60) из [9].

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретного примера рассмотрим динамическое поведение относительно тонкой удлиненной цилиндрической панели толщиной $2h = 2$ см, имеющей в плане прямоугольную форму ($G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b, b = 50$ см). Панель искривлена в направлении x_2 ($1/R_1 = 0, R_2 = R = \text{const}$). Срединная поверхность имеет величину стрелы подъема $f = 12$ см над продольными кромками $|x_2| = b$, при этом радиус кривизны вычисляется по формуле $R = (b^2 + f^2)/(2f)$. По всему контуру $\Gamma = \Gamma_u$ полая оболочка жестко закреплена (см. (10) и (11) при $U_{*i} = 0$) и в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ покоится (см. (12) и (13) при $U_{0i} = 0, V_{0i} = 0, i = \overline{1, 3}$). Конструкция нагружается давлением, порожденным воздушной взрывной волной [16],

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} \frac{t}{t_{\max}}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp(-\alpha(t - t_{\max})), & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\alpha = -\frac{\ln 0,01}{t_{\min} - t_{\max}} > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (19)$$

которое прикладывается к верхней ($x_3 = h$) или нижней ($x_3 = -h$) лицевой поверхности оболочки (см. (4), (5) и (17)), причем

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь t_{\max} – момент времени t , в который давление $p(t)$ достигает по модулю наибольшего значения $|p_{\max}|$; t_{\min} – момент времени, при превышении которого $|p(t)|$ можно считать пренебрежимо малым по сравнению с $|p_{\max}|$ (согласно (19), $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$). Используя экспериментальные данные [16], примем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. На основании (20) учитываем, что при $p_{\max} > 0$ давление (18) действует на нижнюю (вогнутую) лицевую поверхность, а при $p_{\min} < 0$ – на верхнюю (выпуклую) поверхность.

Панель изготовлена из эпоксисвязующего и усилена стекловолокнами марки S-994 [17, 18]. Мгновенное упругопластическое поведение материалов фаз композиции на стадии активного нагружения определяется диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε – осевые напряжение и деформация; $E^{(k)}$, $E_s^{(k)}$ – модули упругости и линейного упрочнения k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел текучести и соответствующая ему деформация. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона, η – коэффициент линейной вязкости при сдвиге в модели Максвелла – Больцмана (см. (2) в [15]).

Таблица

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [17, 18]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	η , МПа·с
Эпоксисвязующее	1210	0,33	20	2,8	1,114	50
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	200

Рассматривается однородная ортогональная структура армирования, в которой волокна двух ($K = 2$) семейств укладываются в направлениях x_1 и x_2 (см. рис. 1) с соответствующими плотностями армирования $\omega_1 = 0,266$ и $\omega_2 = 0,324$ (см. (6)).

На рис. 2 изображены поперечные осцилляции центральной точки КМ-панели ($w_0(t) = w(t, 0, 0)$), рассчитанные при $p_{\max} = 9$ МПа (кривая 1) и при $p_{\max} = -9$ МПа (кривая 2). Обе кривые определены по уточненной теории при $M = 7$ (см. (1) и (2)). Расчеты по традиционной неклассической теории Редди ($M = 0$) приводят к зависимостям $w_0(t)$, которые визуально почти не отличаются от кривых 1 и 2 на рис. 2, поэтому не изображены.

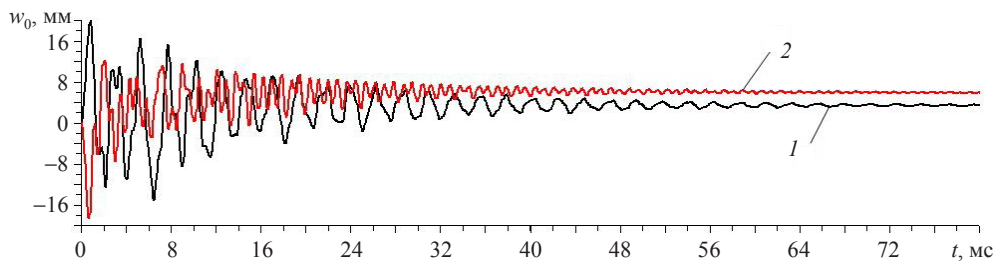


Рис. 2. Поперечные осцилляции центральной точки цилиндрической КМ-панели

Поведение кривых на рис. 2 свидетельствует о том, что с течением времени колебания цилиндрической панели затухают и к моменту времени $t = 80$ мс почти полностью прекращаются. Это позволяет определить величину остаточного прогиба в центральной точке конструкции ($x_1 = x_2 = 0$). В окрестности момента времени $t = 80$ мс кривая 2 лежит выше кривой 1, то есть при нагружении цилиндрической панели со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности остаточный прогиб в центральной точке имеет тот же знак, что и в случае нагружения конструкции со стороны нижней (вогнутой) поверхности, и при этом имеет большее по модулю значение. Так как на первый взгляд этот результат кажется парадоксальным, рассмотрим эпюры остаточных прогибов в обоих случаях нагружения.

На рис. 3 приведены зависимости w от x_2 , рассчитанные в сечении $x_1 = 0$ при $t = 150$ мс, когда осцилляции КМ-оболочки практически полностью прекращаются. Кривые 1 и 2 на рис. 3 рассчитаны при тех же условиях, что и на рис. 2. Так как задача обладает симметрией относительно оси $x_2 = 0$ ($w(t, x_1, x_2) = w(t, x_1, -x_2)$, $|x_2| \leq b$), то на рис. 3 изображены только правые части этих кривых (при $x_1 \geq 0$).

Из рис. 3 видно, что обе кривые знакопеременны, но изменимость кривой 2

существенно больше изменямости кривой 1. Объясняется это тем, что при нагружении конструкции со стороны выпуклой лицевой поверхности (кривая 2) она теряет устойчивость с образованием ярко выраженных продольных складок. Как оказалось, при нагружении панели со стороны вогнутой поверхности (кривая 1) также образуются остаточные продольные складки, но менее ярко выраженные. Именно образование ярко выраженных остаточных складок при нагружении панели сверху приводит к тому, что в центральной точке конструкции прогиб имеет тот же знак, что и при нагружении снизу, а по величине этот прогиб получается даже больше (см. ординаты точек кривых 1 и 2 на рис. 3 при $x_2 = 0$).

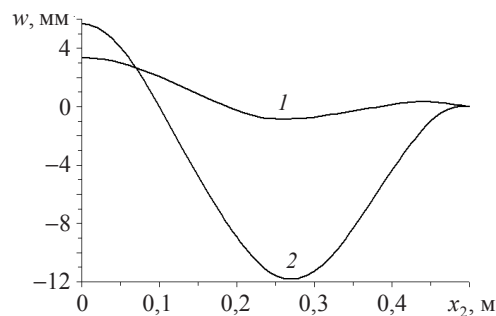


Рис. 3. Зависимость остаточного прогиба от координаты x_2 в поперечном сечении панели $x_1 = 0$

На рис. 4 изображены рассчитанные для тех же случаев осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a, |x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$). Кривые на рис. 4а получены при $p_{\max} = 9$ МПа, на рис. 4б — при $p_{\max} = -9$ МПа, а на рис. 4в — для обоих вариантов нагружения. Кривые 1 и 1' рассчитаны по теории Редди, а кривые 2 и 2' — по уточненной теории. Поведение кривых 1, 1', 2 и 2' на рис. 4в свидетельствует о том, что к моменту времени $t = 150$ мс осцилляции КМ-конструкции действительно практически полностью прекращаются.

Сравнение ординат точек кривых на рис. 4а при $t = 1,7$ мс показывает, что при нагружении панели снизу расчет по теории Редди (кривая 1) завышает максимальное значение $\varepsilon_m^{(0)}$ на 10,3% по сравнению с расчетом по уточненной теории (кривая 2). Сопоставление этих же кривых на рис. 4в свидетельствует о том, что теория Редди завышает на 10,1% и остаточную величину $\varepsilon_m^{(0)}$ по сравнению с уточненной теорией. Поведение кривых 1' и 2' на рис. 4в указывает на то, что при нагружении полой оболочки сверху расчет по теории Редди, наоборот, занижает на 5,5% остаточную величину $\varepsilon_m^{(0)}$ по сравнению с расчетом по уточненной теории. Согласно поведению этих кривых на рис. 4б, обе обсуждаемые теории при соответствующем нагружении конструкции предсказывают примерно одинаковое наибольшее значение $\varepsilon_m^{(0)}$, которое возникает в процессе ее колебаний.

Кривая 2'' на рис. 4в приведена для сравнения и получена при тех же условиях, что и кривая 2, но в рамках ТПРХ [12]: $\eta \rightarrow \infty$ (см. таблицу). Поведение кривой 2'' свидетельствует о том, что в рамках расчетов по ТПРХ цилиндрическая КМ-панель неограниченно долго колеблется. Это не позволяет определить величину остаточного прогиба и остаточных деформаций компонентов композиции. Сравнение указанных кривых, полученных по разным теориям деформирования компонентов ком-

позиции, показывает, что на базе расчетов по ТПРХ даже приближенно нельзя оценить величину остаточных деформаций связующего материала конструкции. Действительно, если усреднить значения локальных максимумов и минимумов кривой 2'', то рассчитанная таким образом кривая будет лежать значительно выше линии 2. Аналогичный результат получается и для арматуры.

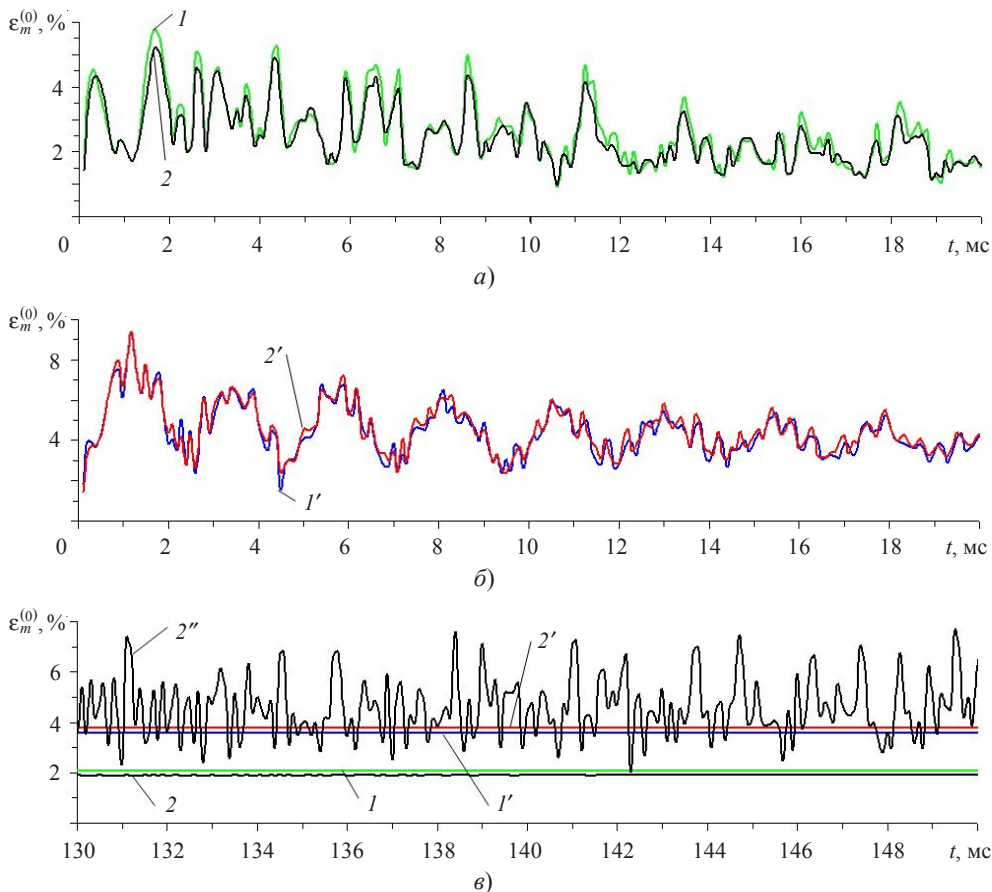


Рис. 4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего материала КМ-панели

Рассматривалась относительно тонкая цилиндрическая панель ($h/\min(a, b) = h/b = 1/50$). Дополнительные расчеты показали, что с увеличением относительной толщины КМ-конструкции возрастает разность решений, полученных по теории Редди и по уточненной теории. При этом разность по максимальному значению остаточного прогиба может превышать 5%, а разность по максимальным значениям интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции может составлять несколько десятков (и даже сотни) процентов.

Заключение

Разработанная уточненная модель вязкоупругопластического деформирования «плоско»-перекрестно армированных пологих оболочек позволяет более точно, чем в рамках традиционных неклассических теорий Рейсснера и Редди, рассчитывать

остаточные перемещения и остаточные деформации компонентов композиции при их интенсивном кратковременном нагружении.

Расчеты показали, что даже для относительно тонких искривленных КМ-панелей расчет по теории Редди (которая с математической точки зрения точнее теории Рейсснера [9]) не гарантирует получения величины остаточных деформаций компонентов композиции с точностью до 10%. Для относительно толстых армированных конструкций различие результатов расчетов, выполненных по уточненной теории и теории Редди, становится еще больше, причем это различие может превышать 5% даже для остаточных прогибов.

Форма и величина остаточных прогибов, а также вид остаточного напряженно-деформированного состояния в компонентах композиции тонких армированных панелей существенно зависит от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается динамическая кратковременная нагрузка.

Список литературы

1. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 686 p.
2. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 8. No 2. P. 187–200. DOI: 10.1007/s11465-013-0262-x.
3. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
4. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
5. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
6. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
7. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
8. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрияшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
9. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9. №3. С. 279–297.
10. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
11. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. P. 807–817.
12. Янковский А.П. Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест». *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. Т. 10. № 3. С. 276–292.
13. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник*. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
14. Фрейденгаль А., Гейрингер Х. *Математические теории неупругой сплошной среды*. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
15. Янковский А.П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019. Т. 12. №1. С. 80–97. DOI:10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.
16. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.

17. *Справочник по композитным материалам*. В 2 кн. Кн. 1. Ред. Дж. Любин. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.

18. *Композиционные материалы: Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.

References

1. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 686 p.

2. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 8. No 2. P. 187–200. DOI: 10.1007/s11465-013-0262-x.

3. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [*Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells*]. Riga. Zinatne Publ. 1987. 295 p. (In Russian).

4. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [*Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs*]. Nizhny Novgorod. NNSU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).

5. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton. CRC Press. 2004. 831 p.

6. Andreev A.N. *Uprugost i termouprugost sloistyykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [*Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and some Aspects of the Numerical Analysis*]. Saarbrücken (Deutschland). Palmarium Academic Publishing. 2013. 93 p. (In Russian).

7. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 412 p.

8. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [*Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2014. 408 p. (In Russian).

9. Yankovskii A.P. Applying the explicit time central difference method for numerical simulation of the dynamic behavior of elastoplastic flexible reinforced plates. *Journal of Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. No 7. P. 1223–1241.

10. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost i kolebaniya* [*Multilayered Anisotropic Shells and Plates. Bending, Stability and Vibration*]. Novosibirsk. Nauka Publ. 2001. 287 p. (In Russian).

11. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. NonLin. Mech.* 2011. Vol. 46. P. 807–817.

12. Yankovskii A.P. Utochnennaya model uprugoplasticheskogo izgibnogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek, postroennaya na osnove yavnoy skhemy tipa “krest” [A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit “cross” scheme]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [*Computational Continuum Mechanics*]. 2017. Vol. 10. No 3. P. 276–292 (In Russian).

13. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Vibropogloshchayushchie svoystva konstruksionnykh materialov. Spravochnik* [*Vibration Absorption Properties of Structural Materials: a Handbook*]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1971. 375 p. (In Russian).

14. Freudental A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. In: *Handbuch der Physik. Bd.VI*. Berlin. Göttingen. Heidelberg. Springer-Verlag. 1958. P. 229–433.

15. Yankovskii A.P. Modelirovanie vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin s uchetoм slabogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu [Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [*Computational Continuum Mechanics*]. 2019. Vol. 12. No 1. P. 80–97 (In Russian). DOI:10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.

16. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.

17. *Handbook of Composites*. Ed. G. Lubin. New York. Van Nostrand Reinhold Company Inc. 1982. 786 p.

18. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite Materials. Reference Book]* Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).

REFINED MODEL OF VISCO-ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF REINFORCED FLEXIBLE SHALLOW SHELLS

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

The initial-boundary value problem of the visco-elastic-plastic behavior of flexible shallow shells reinforced along parallel surfaces is formulated. The inelastic behavior of the materials of the components of the composition is described by the equations of the theory of plastic flow with isotropic hardening. Viscoelastic deformation is determined by the relations of the Maxwell – Boltzmann model. Geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The obtained resolving equations and boundary conditions allow with varying degrees of accuracy to determine the stress-strain state (including the residual state) in the components of the composition of curved panels. The low resistance of the reinforced structure to transverse shear is taken into account. In the first approximation, the equations and boundary conditions corresponding to the traditional non-classical Reddy theory follow from the relations obtained. The numerical solution of the formulated initial-boundary value problem is based on an explicit “cross” scheme. The features of visco-elastic-plastic dynamic deformation of an orthogonal reinforced cylindrical rectangular panel under the action of a load caused by an air blast wave are investigated. It is shown that in some cases even for relatively thin reinforced shallow shells, Reddy's theory is unacceptable for obtaining adequate results of calculations of their visco-elastic-plastic dynamic behavior. It has been demonstrated that the shape and size of the residual deflections of curved composite panels substantially depend on which face surface of the structure (convex or concave) an external load is applied. It was found that in both cases of loading, residual deflections lead to the formation of longitudinal folds in a thin cylindrical reinforced panel.

Keywords: shallow shells, criss-cross-reinforcement, visco-elastic-plastic deformation, geometric nonlinearity, Reddy's theory, refined theories of bending, dynamic loading, “cross” scheme.