

УДК 62-50

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-429-442

**АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ
КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ
С РАЗЛИЧНЫМИ ФОРМАМИ ЭЛЕКТРОДОВ***

© 2019 г. **Петраков Е.В.¹, Лотфи Пур Х.², Дробный Е.В.³**

¹*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Zagros petrochemical company, Tabriz, Iran*

³*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*

pet.e@mail.ru

Поступила в редакцию 08.08.2019

Рассматривается эффективность гашения колебаний консольной балки, описанной в рамках гипотезы Бернулли – Эйлера и обладающей линейной вязкостью. Предложены методы гашения поперечных колебаний, реализованные динамическим гасителем из пьезоэлектрического слоя, распределенного симметрично вдоль оси симметрии балки. Пьезоэлектрические слои выполнены с треугольной и прямоугольной формой электродных обкладок, которая влияет на характер механических нагрузок при приложении электрического напряжения. Электродные обкладки представляют собой тонкие слои, реализованные из никеля или серебра толщиной несколько микрон и расположенные по нормали к оси поляризации, то есть вдоль длины пьезокерамической пластины. Управление пьезоэлектрическими слоями осуществляется изменением разности потенциалов между электродными обкладками; пьезоэлектрический материал, не покрытый электродной обкладкой с обеих сторон, бесполезно использовать как активный материал.

Математические модели воздействия пьезоэлектрических элементов на рассматриваемую консольную балку выводятся из принципа Гамильтона. Парето-эффективность гашения колебаний пьезоэлектрическими пластинами с различными электродными формами оценивается относительно двух критериев: уровня управляющего напряжения и величины максимального прогиба балки. Для сравнения результатов с наилучшим вариантом гашения колебаний в данной постановке приводится результат гашения колебаний для балки с приложенным по всей длине пьезоэлектрическим слоем. Эффективность методики подтверждается на прикладном частном примере с помощью виброграмм.

Синтез оптимальных по Парето управлений осуществлен на основе свертки Гермейера, а поиск оптимальной обратной связи основывается на приме-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-41-520002).

нении теории линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения.

Ключевые слова: гашение колебаний, распределенная система, пьезоэлектрика, модель Бернулли – Эйлера, обобщенная H_2 -норма, множество Парето, линейные матричные неравенства.

Введение

Проблема уменьшения уровня вибраций затрагивает многие области машиностроения, приборостроения и строительства. Зачастую решением проблемы является повышение прочности и устойчивости защищаемых объектов, но помимо широко известных методов виброзащиты (виброизоляция, балансировка, уравнивание машин, изменение материалов защищаемого объекта) [1] существует менее известный метод применения динамического гасителя колебаний (ДГК). Использование ДГК занимает особое место, так как оно может быть реализовано не только на стадии проектирования и создания конструкций, но и в случае, когда неудовлетворительные динамические характеристики конструкции выявлены уже при эксплуатации. Также достоинством таких гасителей является то, что при сравнительно малых затратах дополнительного материала они позволяют относительно просто получить эффект уменьшения уровня колебаний.

Для создания сил, гасящих вредные колебания защищаемого объекта, важен выбор оптимального исполнительного устройства, которое будет удовлетворять различным требованиям в нужной мере, например, таким, как компактность или масштаб генерирования сил. Известные компоненты исполнительных устройств (электромагнитные устройства, пневматические приводы, роторы и линейные двигатели [2] и т.п.) могут быть эффективно использованы в задачах гашения колебаний. В отличие от упомянутых устройств, современные технические материалы, которые часто называют умными (смарт-материалы), имеют ряд преимуществ, так как они могут быть легкими и, что еще более важно, могут быть беспрепятственно структурно интегрированы в уже спроектированную систему без изменений инерционных характеристик системы. Умные материалы – это материалы, имеющие одно или несколько свойств, которые могут быть значительно изменены управляемым способом при помощи внешних возмущений, таких, как напряжение, температура, влажность, водородный показатель pH, электрические или магнитные поля. Есть много типов умных материалов, некоторые из которых уже распространены.

Для решения поставленной задачи из-за возможности генерации сил предпочтительными оказываются пьезоэлектрические материалы. Среди множества видов пьезоэлектрических устройств особый интерес вызывают изгибные пьезоактюаторы, применение которых для гашения колебаний рассматривается в настоящей статье.

Ярким примером подобной интеграции является композитное аэроупругое крыло, оборудованное тонкими пьезоэлектрическими пластинами в структуре крыла, позволяющими подавить нежелательные колебания без добавления значительной массы и изменения формы крыла. Подобный метод гашения используется в крыле палубного самолета FA-18, оснащенного пьезоэлектрическими пластинами для вертикальной стабилизации [3] (рис. 1).

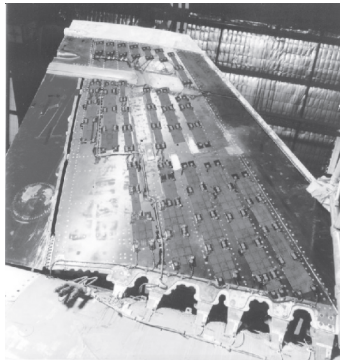


Рис. 1. Крыло палубного самолета FA-18

1. Постановка задачи

Основным объектом исследования является консольная металлическая балка (рис. 2), размеры и масса которой настолько малы по сравнению с размерами и массой основания, что влиянием балки на основание можно пренебречь.

Для гашения колебаний структуры, находящейся под действием внешних возмущений (рис. 2а), используются пьезоэлектрические слои, которые частично покрывают поверхность балки и имеют различные формы электродных обкладок (рис. 2б, в).

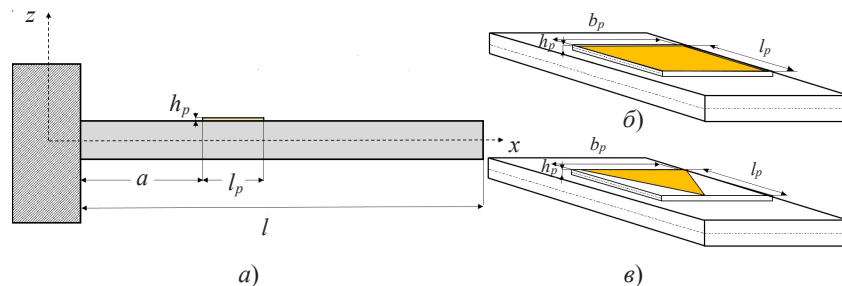


Рис. 2. Общий вид защищаемого объекта с пьезоэлектрическими слоями (а); объект с прямоугольной обкладкой (б); объект с треугольной обкладкой (в)

Пьезоэлектрический слой состоит из пьезокерамической пластины, которая покрыта электродными обкладками вдоль длины. Пластины могут иметь прямоугольную или треугольную форму электродных обкладок. Длина слоев в 5 раз меньше длины балки, а толщина меньше на порядок. Поведение балки рассматривается в рамках гипотезы Бернулли – Эйлера, влиянием толщины пьезоэлектрического слоя на момент инерции балки пренебрегается, так как он не вносит существенных изменений в жесткостные и инерционные характеристики системы, гистерезис пьезоэлектрического слоя не учитывается.

Получена математическая модель гашения колебаний упругой балки с актюаторами в виде пьезоэлектрических слоев, проводится сравнительный анализ действия пьезоэлектрических слоев с одинаковыми пьезокерамическими пластинами и электродными обкладками разной формы. Расположение пьезоэлектрического слоя выбирается из условий наиболее эффективного управления колебаниями. Эффективность гашения рассматривается относительно двух критериев: управляющего

напряжения, подаваемого на пьезоэлектрический слой, и прогиба балки на конце. Это означает, что необходимо найти парето-множество решений относительно двух критериев, при этом максимальное значение управляющего напряжения не превышает наибольшего допустимого значения напряжения для пьезоэлектрических слоев.

2. Математическая модель активного гашения поперечных колебаний балки

Для описания поперечных колебаний балки используется линейная вязкоупругая модель в рамках гипотез Бернулли – Эйлера в безразмерных переменных [4]:

$$\ddot{\omega} + \beta K \dot{\omega} + K \omega = -f(u, x_1, \dots, x_n) + v(t), \quad (1)$$

где $\omega = \omega(x, t)$ – безразмерный прогиб балки; $K = \partial^4 / \partial x^4$ – дифференциальный оператор четвертой степени; $\beta = (a/l^2)\vartheta$ – безразмерный коэффициент демпфирования системы; ϑ – коэффициент внутренней вязкости; $a^2 = EJ/(\rho A)$; E – модуль упругости; J – момент инерции сечения; ρ – плотность; A – площадь поперечного сечения балки; l – длина балки; $v(t)$ – ускорение, действующее на основание; t – время; $f(u, x_1, \dots, x_n)$ – функция управления, действующего в некоторых точках балки x_1, \dots, x_n или на интервалах между точками; u – управление.

Уравнение (1) в частных производных приводится к уравнению в главных координатах (относительно функции времени); для этого используются методы разделения переменных и нормальных форм, описанные в [5]:

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t), \quad \int_0^1 X_i X_j dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \int_0^1 K X_i X_j dx = \begin{cases} \lambda_i^4, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь λ_i – собственные числа уравнений балки, аналоги собственных частот балки в безразмерном виде. Параметры X_i являются функциями формы балки. Значения собственных чисел и функций формы находятся из краевых условий консольной балки, описываемой функцией Крылова [6]. Преобразование (1) к главным координатам определяется уравнением:

$$\ddot{T}_i + \beta \lambda_i^4 \dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = - \int_0^1 X_i f(u, x_1, \dots, x_n) dx + v(t) \int_0^1 X_i dx. \quad (3)$$

Система (3) является математической моделью управления поперечными колебаниями балки при внешнем возмущении. При решении практической задачи управление реализуется при помощи исполнительных устройств, что вносит весьма значительные изменения в математическую модель управления поперечными колебаниями.

3. Активное гашение колебаний консольной балки пьезоэлектрическим слоем

Пьезоэлектрический слой представляет собой пьезокерамическую пластину с прикрепленными к ней с обеих сторон электродными обкладками (рис. 3), через которые осуществляется управление при помощи изменения разности потенциалов между ними. Пьезокерамический материал, который не покрыт электродной обкладкой с обеих сторон, бесполезно использовать как активный материал.

Линейные уравнения электростатики и деформации для пьезокерамики можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\{S\} &= [s]\{T\} + [d]\{E\}, \\ \{D\} &= [d]^T\{T\} + [\varepsilon]\{E\},\end{aligned}\quad (4)$$

где $\{S\}$, $\{T\}$ – векторы деформации и напряжения, $[s]$ – матрица упругой податливости, $[d]$ – тензор пьезоэлектрических констант, $[\varepsilon]$ – тензор диэлектрических констант, $\{E\}$ – вектор напряженности электрического поля, $\{D\}$ – вектор электрической индукции. В уравнениях (4) первое уравнение описывает обратный эффект, а второе – прямой. Так как переменные взаимосвязаны попарно, то любая пара механической и электрической переменных может быть выбрана в качестве независимой пары [7].

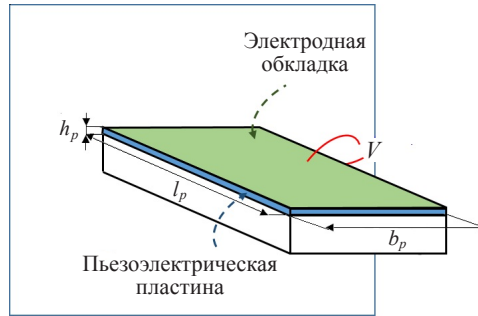


Рис. 3. Консольная балка с пьезоэлектрическим слоем вдоль всей ее длины

Электрическая энергия пьезоэлектрического элемента находится из выражения:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\{E\}^T [\varepsilon] \{E\} + 2\{S\} [e] \{E\} - \{S\}^2 [c] \{S\}) d\Omega,$$

где $[c]$ – матрица упругости, $[e]$ – матрица пьезоэлектрических констант.

Для случая пьезоэлектрической пластины, поляризованной вдоль оси z , работающей на чистый изгиб ($S_1 = -z\omega''$), приложенной к балке на интервале $[x_1^0, x_2^0]$, энергия запишется как

$$W_e^* = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A (\varepsilon_{33} E_3^2 - 2\omega'' z H(x_1^0, x_2^0) e_{31} E_3 - c_{11} \omega^{(IV)}) dA dx, \quad (5)$$

где c_{11} – модуль упругости пьезокерамики, $e_{31} = d_{31} c_{11}$; $H(x_1^0, x_2^0)$ – функция Хевисайда, описывающая местоположение пьезоэлектрического слоя. Применяя принцип наименьшего действия Гамильтона, для рассматриваемой балки получим следующее уравнение:

$$\int_0^l \int_0^1 \frac{1}{2} (\rho A \delta \dot{\omega}^2 - 2e_{31} z_m b_p(x) H(x_1^0, x_2^0) V \delta \omega'' + EI \delta \omega''^2) dx dt = 0, \quad (6)$$

где $V = E_3 h_p$ – напряжение, подаваемое на пьезослой; h_p – высота пьезослоя; b_p – ширина электродной обкладки. В дальнейшем будем рассматривать случаи изменения ширины, поэтому принимаем $b_p^0 = \max b_p(x)$, $b_p(x) = b_p^0 \bar{b}_p(x)$, $\bar{b}_p(x)$ – безразмерная функция изменения ширины электродной обкладки вдоль длины. Таким образом, уравнение поперечных колебаний балки в безразмерных переменных с учетом трения и приложенным пьезоэлектрическим слоем с электродной обкладкой произвольной формы на интервале (x_1^0, x_2^0) примет следующий вид:

$$\ddot{\omega} + \beta K \dot{\omega} + K \omega = \gamma (\overline{b_p(x)} H(x_1, x_2))'' U, \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{l b_p^0 z_m e_{31} V_0}{EI}$$

– безразмерный коэффициент влияния пьезоэлектрического слоя;

$$(x_1, x_2) = \frac{(x_1^0, x_2^0)}{l}$$

– безразмерный интервал приложения пластины; U – безразмерное напряжение, подаваемое на пьезоэлектрический слой, являющееся управлением:

$$U = \sum_{i=1}^m (\theta_i^{(1)} T_i + \theta_i^{(2)} \dot{T}_i), \quad (8)$$

$\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}$ – коэффициенты обратной связи при перемещении и скорости соответственно, m – число первых рассматриваемых мод.

Количественная оценка гашения колебаний конструкции обычно основывается на результатах решения двух задач: первая из них связана с рассмотрением свободных колебаний, где диссипация системы проявляется в затухании колебаний, а скорость затухания количественно оценивает диссипативные свойства системы, а вторая задача связана с рассмотрением вынужденных установившихся колебаний [8]. Также гашение колебаний системы проявляется в ограничении резонансных амплитуд. На рис. 4 приведены виброграммы для пьезоэлектрического слоя с электродной обкладкой, распределенной вдоль всей длины балки (см. рис. 3).

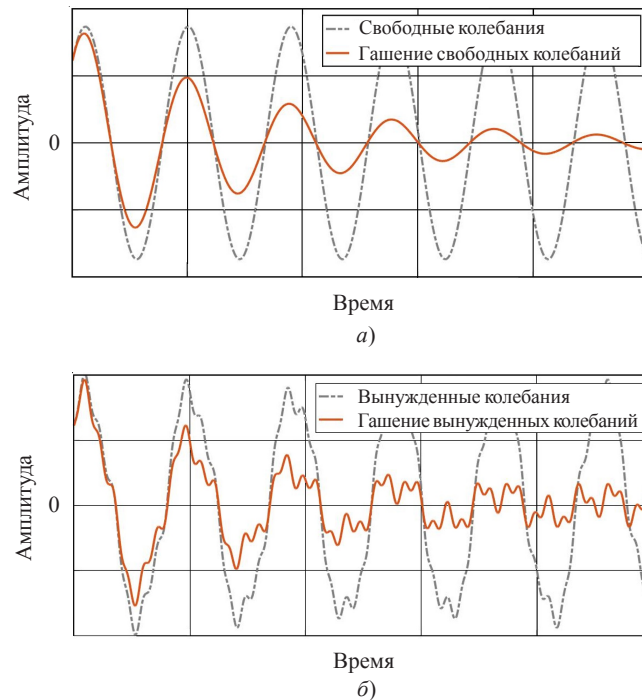


Рис. 4. Виброграммы свободных (а) и вынужденных (б) колебаний системы

Из приведенных виброграмм собственных и вынужденных колебаний балки с пьезоэлектрическим слоем, распределенным вдоль всей длины, очевидно воздействие управления. Но выбор при минимальных затратах управления такой обратной связи, которая обеспечивает максимально возможное уменьшение амплитуды, является более сложной задачей, чем задача однокритериальной оптимизации.

4. Постановка двухкритериальной задачи управления

Необходимость перехода поставленной в п. 1 задачи к задаче теории управления обуславливается тем, что поиск аналитическим способом оптимального множества решений относительно критериев эффективности гашения (перемещение конца балки и управляемое напряжение) хотя бы для трех мод является крайне громоздким, трудно осуществимым, а решение методом перебора не всегда может дать оптимальные решения. Поэтому система уравнений (3) сводится к каноническому виду управляемой линейной системы с двумя выходами:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= AT + B_u V + B_v v, \\ z_1 &= CT, \\ z_2 &= Du, \end{aligned} \quad (9)$$

где $T = (T_1 \dots T_m, \dot{T}_1 \dots \dot{T}_m)^T$ – вектор состояния; A – матрица управления; B_u, B_v – векторы управления и возмущения; v – внешнее воздействие на систему; z_1, z_2 – выходные значения системы – перемещение свободного конца балки и напряжение, генерируемое обратной связью (критерии эффективности гашения). Для поиска оптимальной обратной связи относительно двух критериев используется теория линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения, реализованных в пакете MATLAB.

Несмотря на то, что за последние два десятилетия достигнут прогресс в решении задач оптимального управления с такими критериями, как H_∞ - и H_2 -нормы, имеющими корректные физические интерпретации в виде уровней гашения детерминированных или стохастических возмущений из различных классов, рассмотрение многокритериальных задач с этими критериями вызывает значительные трудности. В основном эти трудности связаны со сложностью характеристики множества Парето и нахождения соответствующей скалярной многоцелевой функции, которая бы определяла это множество. Кроме того, задача осложняется тем, что каждый из критериев характеризуется своей квадратичной функцией Ляпунова с матрицей, являющейся решением уравнения Риккати или линейных матричных неравенств, а скалярная оптимизация многоцелевой функции в виде той или иной свертки приводит в общем случае к билинейной системе неравенств относительно матриц этих функций Ляпунова и матрицы обратной связи регулятора. Для решения такой системы зачастую вводится дополнительное условие о равенстве между собой всех функций Ляпунова, что вносит консерватизм в рассматриваемую задачу [9–13]. При этом без ответа остается главный вопрос: в какой мере получаемые законы управления отличаются от оптимальных по Парето?

В публикациях [14–18] по многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞ - и γ_0 -норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето законами не превышают $1 - \sqrt{N}/N$, где

N – число критериев. Поэтому будем использовать обобщенную H_2 -норму [19, 20]. Использование двух конкурирующих выходов связано с приведением задачи к практической реализации, так как ограниченность ресурса управления накладывает определенные ограничения на значения обратной связи.

Для решения двухкритериальной задачи минимизации необходимо использовать функционал, объединяющий оба критерия, для этого обычно используется свертка. В рассматриваемой задаче реализована свертка Гермейера, так как решение в рамках свертки Гермейера для обобщенной H_2 -нормы дает оптимальные решения:

$$J_\alpha(\theta) = \max \left\{ \frac{J_1(\theta)}{\alpha}, \frac{J_2(\theta)}{1-\alpha} \right\}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (10)$$

Поиск оптимального множества решений относительно двух критериев реализуется линейными матричными неравенствами, описывающими нахождение обобщенной H_2 -нормы:

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & C_\alpha^T \\ C_\alpha & \alpha^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y & Z^T D_\alpha^T \\ D_\alpha Z & (1-\alpha)^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0,$$

где $Z = \Theta Y$, $Y = X^{-1}$ – обратная матрица Ляпунова. Результатом решения будет парето-множество оптимальных решений относительно двух выходов – прогиба конца балки и значения управления, которые находятся из выражений:

$$J_1 = \|H_{z_1 v}\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\|z_1(t)\|_{g_\infty}}{\|v\|_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \geq 0} |z_1(t)|_{g_\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{\max}^{1/2}(CYC^T), \quad (11)$$

$$J_2 = \|H_{z_2 v}\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\|z_2(t)\|_{g_\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{\max}^{1/2}(D\Theta Y \Theta^T D^T).$$

Таким образом описывается математический аппарат поиска оптимальных параметров, и необходимо найти математическую модель активного гашения балки пьезоэлектрическими слоями с различной формой электродных обкладок.

5. Математическая модель активного гашения колебаний балки пьезоэлектрическими слоями различной формы

Рассмотрим частные случаи приложения пьезоэлектрических слоев, используя модель активного гашения колебаний при произвольной форме электродной обкладки (7) (рис. 5).

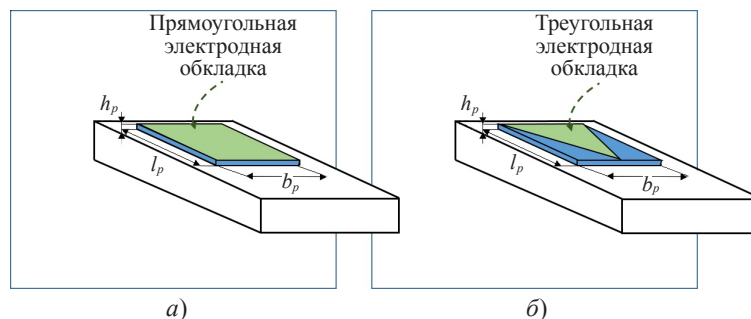


Рис. 5. Приложение пьезоэлектрических слоев с прямоугольной (а) и треугольной (б) формами электродных обкладок

Для пьезоэлектрического слоя с электродной обкладкой, основываясь на полученных с помощью (7) результатах, можно вывести уравнение в главных координатах:

$$\ddot{\omega} + \beta K \dot{\omega} + K \omega = \gamma(-\delta'(x - x_1) + \delta'(x - x_2))U. \quad (12)$$

После открытия пьезоэлектрического эффекта при исследовании электрических свойств твердых диэлектриков кристаллической структуры Пьер Кюри сформулировал достаточно общий принцип, который теперь называется принципом Кюри. Смысл его состоит в том, что явление обладает всеми признаками симметрии, которыми обладает причина, их породившая; асимметрия явления предопределена асимметрией причины. Если учесть, что пьезоэлектрический материал является самоуравновешивающимся, то возникает вопрос о поведении пьезоэлемента для случая поперечной асимметрии. Например, каково будет поведение и влияние пьезоэлектрического слоя при изменении формы электродных обкладок и, следовательно, генерируемых механических нагрузок? От формы поверхностных электродных обкладок зависит характер механической нагрузки, представленной пьезоэлектрическим слоем. Поэтому рассмотрим пьезоэлектрический слой, покрытый треугольной электродной обкладкой с двух сторон (рис. 6).

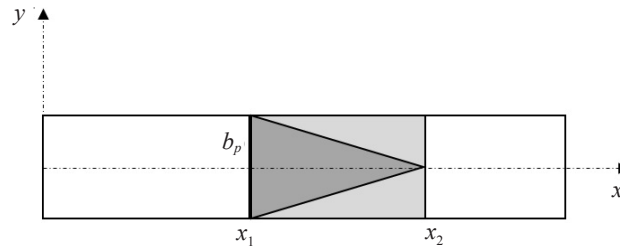


Рис. 6. Пьезоэлектрический слой с треугольной электродной обкладкой

Уравнения поперечных колебаний балки с треугольной накладкой запишутся так:

$$\ddot{\omega} + \beta K \dot{\omega} + K \omega = \gamma \left(-\delta'(x - x_1) - \frac{l}{l_p} \delta(x - x_1) + \frac{l}{l_p} \delta(x - x_2) \right) U. \quad (13)$$

Таким образом, пьезоэлектрические слои в зависимости от формы обкладок при подаче напряжения можно описать как механические нагрузки, находящиеся под управлением внешнего источника энергии с ограниченным ресурсом:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_i + \beta \lambda_i^4 \dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i &= -M_p X'_i(1)U + v(t), \\ \ddot{T}_i + \beta \lambda_i^4 \dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i &= -M_p (X'_i(x_2) - X'_i(x_1))U + v(t), \\ \ddot{T}_i + \beta \lambda_i^4 \dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i &= -(F_p (X_i(x_2) - X_i(x_1)) - M_p X'_i(x_1))U + v(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Первое уравнение описывает поведение пьезоэлектрического слоя, равномерно распределенного вдоль всей длины балки (рис. 7а), – своего рода наиболее эффективный и предельный случай. Второе и третье уравнения описывают поведение пьезоэлемента с прямоугольной и треугольной обкладками соответственно (рис. 7б, в).

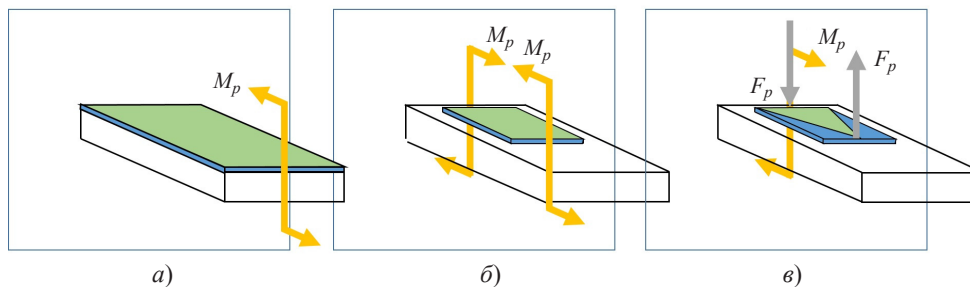


Рис. 7. Механические нагрузки пьезослоев с обкладками различных форм: распределенной вдоль всей длины (а); прямоугольной (б); треугольной (в)

6. Результаты

Все расчеты приводились для значения коэффициента $\gamma = 0,0516$ (см. (7)). На рис. 8 приведены оптимальные множества решений относительно критериев (11).

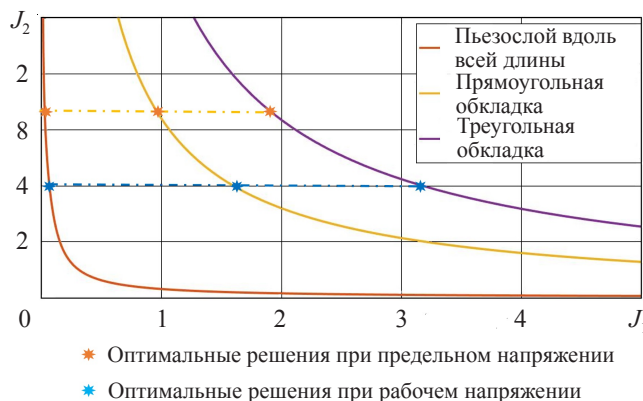


Рис. 8. Оптимальные множества решений

Судя по приведенным оптимальным парето-множествам, эффективность пьезослоя с прямоугольной обкладкой выше, чем у пьезослоя с треугольной обкладкой, при обоих режимах эксплуатации. Казалось бы, что возможно говорить о неэффективном использовании пьезослоя с треугольной обкладкой для задач активного гашения консольной балки, но далее приводится виброграмма для обоих случаев эксплуатации относительно вынужденных колебаний системы (рис. 9).

Из виброграмм видно, что при рабочем напряжении (рис. 9а) разница между виброграммами для различных обкладок минимальна, но при предельном напряжении отличия виброграмм (рис. 9б) заметнее, но все равно незначительны. Длина пьезоэлектрических слоев была в 5 раз меньше длины балки, а толщина слоев меньше на порядок.

Таким образом, при использовании тонких пьезослоев существует возможность существенно уменьшить амплитуду колебаний в случае внешнего воздействия на консольную металлическую балку как для случая предельного напряжения пьезоэлектрического слоя, так и для рабочего напряжения.

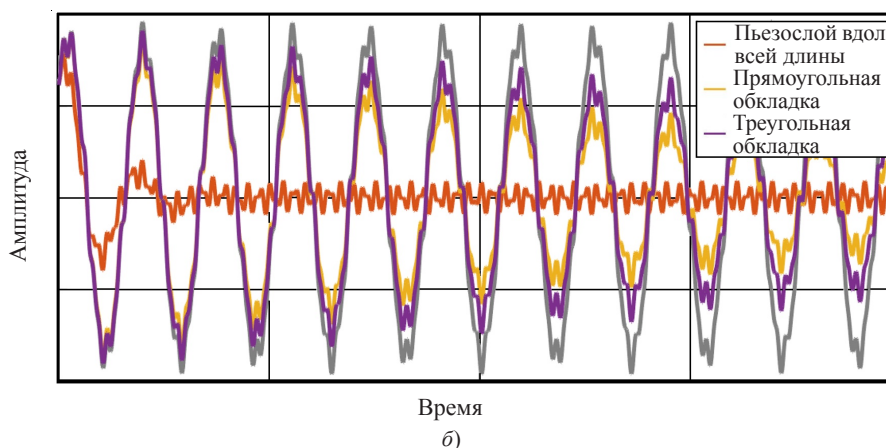
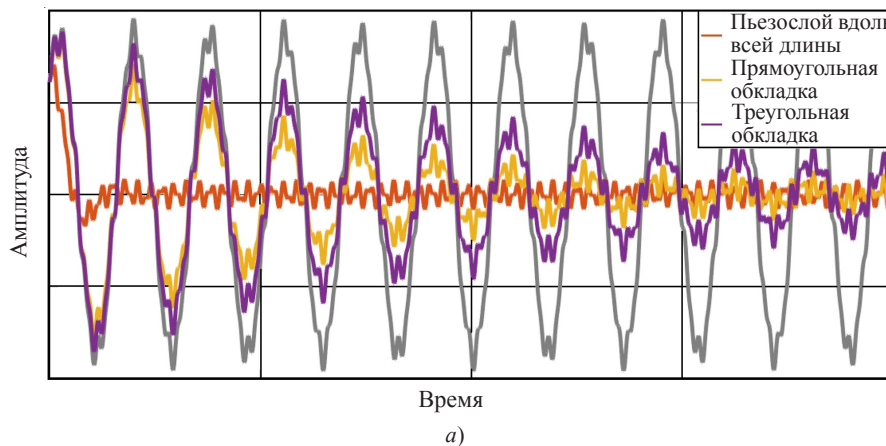


Рис. 9. Виброграммы при рабочем (а) и при предельном (б) напряжениях

Заключение

Рассмотрено использование пьезоэлектрических слоев в системе активного гашения колебаний консольной балки. Для решения задачи эффективности использования пьезоэлектрических слоев в качестве исполнительного устройства активного гашения введены два связанных критерия: уровень напряжения, подаваемого на пьезослой, и уровень прогиба конца балки. Проведено сравнение относительно выбранных критериев для прямоугольной и треугольной форм обкладок, которые сравнивались с вариантом равномерно распределенного по всей длине пьезослоя.

Исходя из принципа Гамильтона, было выведено влияние электродной формы на генерирование пьезоэлектрическим слоем различных механических нагрузок (7). Получено, что относительно двух критериев парето-эффективность пьезоэлектрической пластины стандартных размеров с прямоугольной формой электродной обкладки показывает лучший результат по сравнению с треугольной обкладкой.

Список литературы

1. Корнев Б.Г., Резников Л.М. *Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения*. М.: Наука, 1988. 304 с.

2. Бобцов А.А., Бойков В.И., Быстров С.В., Григорьев В.В. *Исполнительные устройства и системы для микроперемещений*. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 131 с.
3. Moheimani R.S.O., Fleming A.J. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. Wien: Springer-Verlag, 2006. 272 p.
4. Петраков Е.В. Оптимальное гашение поперечных колебаний консольной балки. *Проблемы прочности и пластичности*. Т. 81. №1. 2019. С. 94–102.
5. Хазанов Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: Изд-во Самар. госуд. аэрокосмич. ун-та, 2002. 80 с.
6. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. М.: Машиностроение, 1985. 530 с.
7. Preumont A. *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Brussels: Springer, 2006. 215 p.
8. Матвиенко В.П., Клигман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Демпфирование механических колебаний зашунтированными пьезоэлектрическими структурными элементами. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2011. №2. С. 23–35.
9. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, 1971. 384 с.
10. Bernstein D.S., Haddad W.M. LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989. Vol. 34. No 3. P. 293–305. <http://dx.doi.org/10.1109/9.16419>.
11. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1991. Vol. 36. No 7. P. 824–831. DOI: 10.1016/S1000-9361(11)60038-1.
12. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. Vol. 42. No 7. P. 896–911.
13. Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P. Multiobjective H_2/H_∞ -optimal control via finite dimensional Q-parametrization and linear matrix inequalities. *Proceedings of the American Control Conference*. Philadelphia, USA. 1998. P. 3244–3249.
14. Chen X., Zhou K. Multiobjective H_2/H_∞ control design. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2001. Vol. 40. No 2. P. 628–660.
15. Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto suboptimal solutions in control and filtering problems under multiple deterministic and stochastic disturbances. *Proceedings of the European Control Conference*. Aalborg. Denmark. 2016. P. 2263–2268.
16. Баландин Д.В., Коган М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
17. Баландин Д.В., Коган М.М. О множестве Парето в задачах управления и фильтрации при стохастических и детерминированных возмущениях. *Автоматика и телемеханика*. 2017. №1. С. 35–58.
18. Balandin D.V., Ezhov E.N., Petrakov E.V., Fedotov I.A. Multi-criteria problems for optimal protection of elastic constructions from vibration. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40. Iss. 2. P. 239–245.
19. Федотов И.А., Ежов Е.Н., Петраков Е.В. Синтез динамических гасителей колебаний высотных сооружений. *Процессы в геосредах*. 2016. №8. С. 65–70.
20. Kasagi M., Fujita K., Tsuji M., Takewaki I. Automatic generation of smart earthquake-resistant building system: Hybrid system of base isolation and building-connection. *Heliyon*. 2016. Vol 2. Iss. 2. P. 1–20. DOI: 10.1016/j.heliyon.2016.e00069.

References

1. Korenev B.G., Reznikov D.M. *Dinamicheskie gasiteli kolebaniy: Teoriya i tekhnicheskie prilozheniya* [Mass Damper]. Moscow. Nauka Publ. 1988. 304 p. (In Russian).
2. Bobtsov A.A., Boykov V.I., Bystrov S.V., Grigoryev V.V. *Ispolnitelnye ustroystva i sistemy dlya mikroperemeshcheniy* [Actuators and Systems for Micro-Displacements]. Saint-Petersburg. SPBGU ITMO Publ. 2011. 131 p. (In Russian).
3. Moheimani R.S.O., Fleming A.J. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. Wien. Springer-Verlag. 2006. 272 p.

4. Petrakov E.V. Optimalnoe gashenie poperechnykh kolebaniy konsolnoy balki [Optimal transverse vibrations damping of a console beam]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 1. P. 94–102 (In Russian).
5. Hazanov H.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi parametrami [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]*. Samara. SSAU Publ. 2002. 80 p. (In Russian).
6. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver Jr.W. *Vibration Problems in Engineering*. N-Y. Wiley-Interscience. 1990. 624 p.
7. Preumont A. *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Brussels. Springer. 2006. 215 p.
8. Matvienko V.P., Kligman E.P., Urlov M.A., Urlova N.A. Dempfirovanie mekhanicheskikh kolebaniy zashuntirovannymi p'yezoelektricheskimi strukturnymi elementami [Damping of mechanical vibrations with shunted piezoelectric structural elements]. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation]*. 2011. No 2. P. 23–35 (In Russian).
9. Germeyer Yu.B. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsiy [Introduction to Operations Research Theory]*. Moscow. Nauka Publ. 1971. 384 p. (In Russian).
10. Bernstein D.S., Haddad W.M. LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989. Vol. 34. No 3. P. 293–305. <http://dx.doi.org/10.1109/9.16419>.
11. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1991. Vol. 36. No 7. P. 824–831. DOI: 10.1016/S1000-9361(11)60038-1.
12. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. Vol. 42. No 7. P. 896–911.
13. Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P. Multiobjective H_2/H_∞ -optimal control via finite dimensional Q-parametrization and linear matrix inequalities. *Proc. Amer. Control Conf.* Philadelphia. USA. 1998. P. 3244–3249.
14. Chen X., Zhou K. Multiobjective H_2/H_∞ control design. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2001. Vol. 40. No 2. P. 628–660.
15. Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto suboptimal solutions in control and filtering problems under multiple deterministic and stochastic disturbances. *Proc. Europ. Control Conf.* Aalborg. Denmark. 2016. P. 2263–2268.
16. Balandin D.V., Kogan M.M. *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv [Synthesis of Control Laws Based on Linear Matrix Inequalities]* Moscow. Fizmatlit Publ. 2007. 280 p. (In Russian).
17. Balandin D.V., Kogan M.M. On Pareto set in control and filtering problems under stochastic and deterministic disturbances. *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78. Iss. 1. P. 29–49.
18. Balandin D.V., Ezhov, E.N., Petrakov, E.V., Fedotov I.A. Multi-criteria problems for optimal protection of elastic constructions from vibration. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40. Iss. 2. P. 239–245.
19. Fedotov I.A., Ezhov E.N., Petrakov E.V. Sintez dinamicheskikh gasiteley kolebaniy vysotnykh sooruzheniy [Synthesis of dynamic vibration absorber for high-rise buildings]. *Protsessy v geosredakh [Processes in Geomedia]*. 2016. No 8. P. 65–70 (In Russian).
20. Kasagi M., Fujita K., Tsuji M., Takewaki I. Automatic generation of smart earthquake-resistant building system: Hybrid system of base isolation and building-connection. *Heliyon*. 2016. Vol 2. Iss. 2. P. 1–20. DOI: 10.1016/j.heliyon.2016.e00069.

**ACTIVE DAMPING OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF CONSOLE BEAM
BY PIEZOELECTRIC LAYER WITH DIFFERENT ELECTRODE SHAPES
OF DAMAGED MEDIA**

Petrakov E.V.¹, Lotfi Pour H.², Drobny E.V.³

¹*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Zagros petrochemical company, Tabriz, Iran*

³*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus*

The damping efficiency is considered for a console beam described by a linear viscosity Bernoulli–Euler model. The article presents the methods of damping transverse vibrations implemented by a dynamic damper from a piezoelectric layer distributed symmetrically along the axis of symmetry of the beam. Piezoelectric layers with a triangular and rectangular shape of electrode plates are considered, which affects the nature of mechanical stresses upon application of electrical voltage. The electrode plates are thin layers made of nickel or silver several microns thick and located normal to the polarization axis, that is, along the length of the piezoceramic plate. The control of the piezoelectric layers is realized by changing the potential difference between the electrode plates, while the piezoelectric material uncoated by the electrode plate on both sides is useless to use as an active material. Mathematical models of the effect of piezoelectric elements on the cantilever beam are derived from the Hamilton principle. The Pareto-efficiency of quenching by piezoelectric plates with different electrode shapes is evaluated relative to two criteria: the level of control voltage and the maximum deflection of the beam. To compare the results with the best variant of vibration damping, in this formulation, the result of vibration damping for a beam with piezoelectric layer applied along the entire length is given. The damping efficiency was confirmed in an applied and particular example by means of vibrograms. The synthesis of Pareto-optimal controls is based on the Germeier convolution, and the search for optimal feedback is based on the application of the theory of linear matrix inequalities and effective algorithms for solving them.

Keywords: vibration damping, distributed system, piezoelectrics, Bernoulli–Euler model, generalized H_2 -norm, Pareto set, linear matrix inequalities.