

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-416-428

ДИНАМИКА ПОРОВЯЗКОУПРУГОЙ КОНСОЛИ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА *

© 2019 г. **Ипатов А.А.¹, Делль Изола Ф.^{1,2}, Джорджио И.²,
Рахали И.³, Югстер С.Р.⁴, Заикин А.А.⁵**

¹*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*The International Research Center for Mathematics & Mechanics
of Complex Systems (M&MoCS) Università degli Studi dell'Aquila, L'Aquila, Italy*

³*Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, Rouen, France*

⁴*Institute for Nonlinear Mechanics, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany*

⁵*University College London, London, United Kingdom*

ipatov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 06.09.2019

Исследуется распространение волн в поровязкоупругом материале. Одним из ключевых результатов в изучении распространения волн в полностью насыщенных пористых средах стало предсказание существования трех типов волн: быстрой и медленной продольных волн и поперечной волны. Быстрая продольная и поперечная волны по своей природе близки к волнам в упругой среде. Исследование посвящено моделированию медленной волны растяжения-сжатия в поровязкоупругой среде с помощью метода граничных элементов. Поровязкоупругая постановка опирается на модель Био полностью насыщенного пороупругого материала с применением принципа соответствия. Теория Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды, состоящей из упругого скелета с порами и наполнителя. Модель стандартного вязкоупругого тела используется для описания вязкоупругого поведения скелета пористого материала. Краевые задачи решаются методом граничных интегральных уравнений. Для решения граничных интегральных уравнений применяется метод граничных элементов. Для гранично-элементарной дискретизации использованы четырехугольные восьмиузловые биквадратичные элементы, применяется метод коллокации. Аппроксимация обобщенных граничных функций построена по согласованной модели. Численное интегрирование производится по квадратурным формулам Гаусса с применением алгоритмов понижения порядка и устранения особенностей. Решение исходной начально-краевой задачи строится в пространстве преобразований Лапласа, и для получения решения в явном времени применяется вариант алгоритма Дурбина численного обращения преобразования Лапласа с переменным шагом по частоте. С помощью метода граничных элементов решена задача о действии силы на торец поровязкоупругой консоли. Приведе-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-08-00895а).

ны результаты моделирования возбуждения медленной продольной волны в зависимости от проницаемости материала на решениях для перемещений и поровых давлений. Продемонстрировано влияние параметра модели вязкоупругого материала на динамические отклики перемещений и поровых давлений.

Ключевые слова: пороупругость, поровязкоупругость, метод граничных элементов, преобразование Лапласа, метод гранично-интегральных уравнений, метод Дурбина.

Введение

Широкий спектр естественных и искусственных материалов может быть рассмотрен как пористая среда, например скальные породы, почвы, некоторые биологические ткани, кости, губки и различные керамики и т.п. Под пористой средой понимается твердое тело с системой взаимосвязанных пор, заполненных жидкостью или газом. Распространение волн в насыщенных пористых средах является важным аспектом многих инженерных наук, таких как геофизика, геомеханика, сейсмология, биоинженерия. Применение упругой или вязкоупругой модели материала зачастую не может обеспечить достаточную точность результатов, и возникает необходимость создания новых моделей, методов и подходов. Таким образом, появляется задача развития математических методов и их применения к исследованию распространения волн в однородных и неоднородных пороупругих телах. Так, была разработана и используется в наши дни макроскопическая модель пороупругого материала, в которой фазы скелет и наполнитель присутствуют в каждой точке пространства. Однако в дополнение к макроскопическим эффектам поведения пористого материала существует множество зависящих от времени физических механизмов. Например, некоторые скальные породы могут демонстрировать вязкоупругое поведение сами по себе, независимо от наполняющей их жидкости. Этот эффект может быть смоделирован дополнением вязкоупругого механизма на макроуровне. Скелет пористого материала принимается вязкоупругим.

Исследование динамических процессов в пористых средах берет начало с открытия экспериментального закона фильтрации жидкости в пористом материале [1]. В статье Френкеля [2] выведена полная система динамических уравнений, которые описывают акустику изотропного пороупругого материала. Теория двухфазного пористого материала, состоящего из скелета и наполнителя, была предложена Био в публикациях [3, 4]. Теория Био является обобщением классической теории упругости для случая пороупругости. Учет вязкоупругих эффектов в пороупругой среде также был впервые предложен Био [5]. Динамическое взаимодействие пороупругих/поровязкоупругих тел и сред интенсивно исследуется в литературе [6–12].

Существует два основных подхода к применению метода граничных элементов для моделирования динамических процессов: решение системы гранично-временных интегральных уравнений непосредственно в явном времени [13] и применение преобразования Фурье или Лапласа с решением системы граничных интегральных уравнений в частотной области с последующим применением обратного преобразования [14–16]. В случае использования преобразования Лапласа возникает необходимость корректного метода получения оригинала решения. В 1974 году Дурбин предложил подход, названный быстрым обращением преобразования Лапласа для вычисления интегралов [17]. Впоследствии некоторые модификации метода Дур-

бина были предложены X. Zhao для преодоления недостатков постоянного шага интегрирования в быстром обращении преобразования Лапласа [18].

Модель Био корректно описывает процессы деформирования упругой пористой среды и поток жидкости в ней. Предполагается, что в объеме пороупругого материала содержится двухфазный материал: первая фаза – упругий скелет, вторая – наполнитель в порах. Обе фазы присутствуют в каждой точке физического пространства, а распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами типа пористости. Ключевой особенностью модели Био является предсказание существования в пористой среде двух продольных волн – быстрой и медленной. Медленная продольная волна вызвана перемещением частиц флюида пор относительно пористого скелета и свойственна только пористым средам. Быстрая продольная волна по своей природе близка к продольной волне растяжения-сжатия в упругом материале, в то время как медленная продольная волна является характеристикой именно пористого материала. Медленную продольную волну гораздо сложнее зафиксировать, она обладает значительно меньшей амплитудой, и для ее моделирования приходится искусственно завышать проницаемость материала [19]. Кроме того, фрикционное взаимодействие вязкого флюида и скелета приводит к значительной диссипации энергии в среде, которая в результате демонстрирует вязкоупругое поведение. Вязкоупругое поведение пороупругой среды также может быть обусловлено вязкоупругими свойствами скелета [20]. Одномерное аналитическое решение для поровязкоупругого стержня для модели Кельвина – Фойгта было получено в статье [10]. В настоящей статье исследуется влияние вязкости на динамические отклики в поровязкоупругом теле, в том числе в случае моделирования медленной продольной волны.

1. Математическая модель

1.1. Пороупругая постановка. Рассматривается однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$, $\Gamma = \partial\Omega$ – граница тела. Предполагается, что Ω – изотропное пороупругое тело.

Система дифференциальных уравнений теории Био в обобщенных перемещениях \bar{u}_i и поровых давлениях \bar{p}_i в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования s) имеет вид [12]:

$$G\bar{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\bar{u}_{j,ij} - (\psi - \beta)\bar{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\bar{u}_i = -\bar{F}_i, \quad (1)$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\bar{p}_{,ii} - \frac{\phi^2s}{R}\bar{p} - (\psi - \beta)s\bar{u}_{ii} = -\bar{a}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2s^2}{\phi^2s + s^2k(\rho_a + \phi\rho_f)}, \quad R = \frac{\phi^2K_fK_s^2}{K_f(K_s - K) + \phi K_s(K_s - K_f)}, \quad (3)$$

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; $\psi = 1 - K/K^s$ – коэффициент эффективных напряжений Био; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \bar{F}_i, \bar{a} – объемные силы.

Типы граничных условий:

$$\bar{u}_l(\mathbf{x}, s) = f_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s) = f_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad l = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

$$\bar{t}_l(\mathbf{x}, s) = g_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s) = g_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \quad l = \overline{1, 3}; \quad (5)$$

Γ_u и Γ_t – части границы Γ , где заданы соответствующие обобщенные перемещения \bar{u}_l и обобщенные поверхностные усилия \bar{t}_l ; $\bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s)$ – поровое давление, $\bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s)$ – поток.

1.2. Поровязкоупругая постановка. Поровязкоупругое решение строится на основе упругого решения с помощью принципа соответствия. Скелет пористого материала принимается вязкоупругим с функциями материала $\bar{K} = \bar{K}(s)$ и $\bar{G} = \bar{G}(s)$. Применяется модель стандартного вязкоупругого тела:

$$\bar{K}(s) = K^\infty \cdot \left[(\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right],$$

$$\bar{G}(s) = G^\infty \cdot \left[(\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right].$$

Длительные и мгновенные модули обозначаются индексами « ∞ » и «0» соответственно и связаны следующим соотношением:

$$\theta = \frac{K^0}{K^\infty} = \frac{G^0}{G^\infty}.$$

2. Методы решения

2.1. Гранично-элементный подход. Краевая задача (1)–(5) решается с использованием прямого метода граничных элементов, опирающегося на совокупное применение интегрального преобразования Лапласа, и граничных интегральных уравнений (ГИУ) для трехмерной изотропной теории пороупругости. Гранично-элементная дискретизация строится на основе регулярного представления ГИУ [15]:

$$\alpha_\Omega \bar{u}_i(\mathbf{x}, s) + \int_\Gamma (\bar{T}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{y}, s) - T_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{x}, s) - \bar{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{t}_k(\mathbf{y}, s)) d\Gamma(\mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma,$$

где \mathbf{x} – это точка коллокации, \mathbf{y} – точка наблюдения; \bar{u}_i и \bar{t}_k – обобщенные перемещения и поверхностные усилия в случае изотропной поровязкоупругости, $i, k = \overline{1, 4}$; \bar{U}_{ik} и \bar{T}_{ik} – соответствующие фундаментальные и сингулярные решения; \bar{T}_{ik}^S – статическая часть сингулярного решения; коэффициент α_Ω равен 1 в случае конечной области Ω и равен -1 в случае бесконечной области Ω .

Граничные интегральные уравнения решаются численно на базе метода граничных элементов. Для дискретизации ГИУ используется метод коллокации.

Для аппроксимации граничной поверхности рассмотрим ее разбиение на совокупность четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов, при этом треугольные элементы считаются вырожденными четырехугольными элементами (рис. 1).

Каждый из элементов отображается на эталонный: соответственно квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$.

Отображение элементов осуществляется по формуле:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, l – локальный номер узла в k -м элементе, $N^l(x)$ – функции формы.

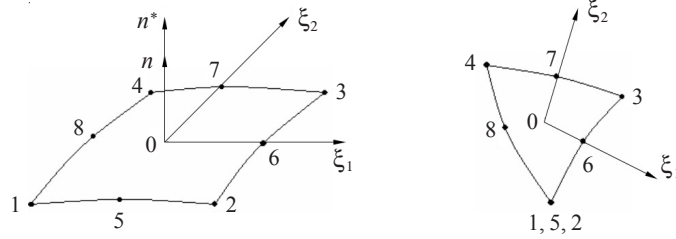


Рис. 1. Четырехугольные и треугольные граничные элементы

Узлы интерполяции неизвестных граничных функций являются подмножеством геометрических узлов наложенной гранично-элементной сетки. Локальная аппроксимация строится по согласованной интерполяционной модели Р.В. Гольдштейна [14]. Согласно модели Гольдштейна, обобщенные граничные перемещения аппроксимируются по билинейным граничным элементам, в то время как обобщенные усилия представляются на элементах постоянными. Для метода коллокации выберем множество узлов, совпадающее с множеством узлов аппроксимации исходных граничных функций. В итоге сформируются системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [15, 16]:

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{2} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} = \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k,$$

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{8} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} = \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k,$$

$$A_{ij}^{m,k,l} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R_l(\xi) \bar{T}_{ij}^m(x^m, y^k(\xi), s) - \delta_{\beta(k,l),m} \bar{T}_{ij}^S(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2))] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{m,k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{U}_{ij}(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2), s) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

где $R_l(\xi)$ – линейные функции формы для четырехугольного элемента, уравнения записаны соответственно в узлах аппроксимации обобщенных граничных перемещений и обобщенных поверхностных сил. После соответствующих преобразований получаем разрешающую СЛАУ:

$$[A]\{X\} = \{B\},$$

где $[A]$ – полностью заполненная несимметричная матрица; $\{X\}$ – вектор неизвестных величин, в котором объединены все соответствующие компоненты искомых обобщенных граничных функций; $\{B\}$ – вектор правой части. Для получения решения в явном времени применяется метод Дурбина численного обращения преобразования Лапласа [17, 18].

2.2. Обратное преобразование Лапласа. Рассмотрим функцию $f(t)$ действительного переменного t . Тогда прямое и обратное преобразование Лапласа определяются формулами:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds,$$

где s – комплексный параметр преобразования, λ – произвольное вещественное число, выбранное таким образом, что все особые точки функции $\bar{f}(t)$ лежат левее прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$.

Пусть $s = \alpha + i\omega$, тогда обратное преобразование Лапласа запишется в виде:

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] d\omega, \quad (6)$$

$$f(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\pi} \int_0^{\infty} \{ \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \sin \omega t \} d\omega, \quad t > 0. \quad (7)$$

Подход, предложенный Дурбином [16], принято называть быстрым обращением преобразования Лапласа для вычисления интегралов в уравнениях (6) и (7). Позднее была предложена модификация метода Дурбина для того, чтобы преодолеть недостатки постоянного шага интегрирования по частоте [17].

Пусть R – некоторое большое вещественное число, тогда уравнения (6) и (7) запишутся в виде:

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] d\omega, \quad (8)$$

$$f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \{ \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \sin \omega t \} d\omega, \quad t > 0. \quad (9)$$

Определяя точки $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \omega_{n+1} = R$, уравнения (8) и (9) аппроксимируем таким образом:

$$f(0) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] d\omega, \quad (10)$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \{ \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \sin \omega t \} d\omega, \quad t > 0. \quad (11)$$

На каждом отрезке $[\omega_k, \omega_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, аппроксимируем отдельно действительную и мнимую части функции $\bar{f}(\alpha + i\omega)$:

$$\operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \approx F_k + \frac{F_{k+1} - F_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} (\omega - \omega_k), \quad (12)$$

$$\operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega)] \approx G_k + \frac{G_{k+1} - G_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} (\omega - \omega_k), \quad (13)$$

где

$$F_k = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)], \quad G_k = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)].$$

Подставляя соотношения (12) и (13) в (10) и (11) и применяя прямое интегрирование, итоговый алгоритм запишем в виде:

$$f(0) \approx \sum_{k=1}^n \left[\frac{(F_{k+1} - F_k) \Delta_k}{2\pi} \right],$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos \omega_{k+1} t - \cos \omega_k t) + \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin \omega_{k+1} t - \sin \omega_k t) \right],$$

где $t > 0$, $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$.

3. Численные результаты

3.1. Выбор алгоритма численного обращения. Рассматривается задача о трехмерном призматическом теле, жестко закрепленном с одного конца и подверженном осевой нагрузке в виде функции Хевисайда $t_2 = t_2^*H(t)$, $t_2^* = -1$ Н/м², на другом конце (рис. 2). Пороупругий материал – почва с параметрами модели Био: $K = 2,1 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 9,8 \cdot 10^7$ Н/м², $\rho = 1884$ кг/м³, $\phi = 0,48$, $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с).

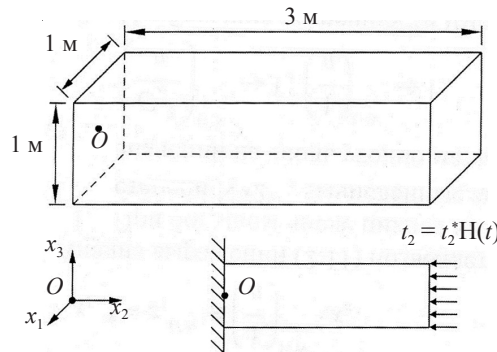


Рис. 2. Постановка задачи

В данном примере рассмотрим применение метода Дурбина и его модификаций. Для построения гранично-элементного уравнения тело покрывается гранично-элементной сеткой, состоящей из 1152 четырехугольных элементов.

Алгоритм 1: обратное преобразование Лапласа получено из соответствующего данной задаче аналитического решения на большом спектре ($k = 1, 2, \dots, 40000$, $\omega_{\max} = 1000$).

Алгоритм 2: решение во времени получено из численного гранично-элементного решения с помощью классического метода Дурбина при постоянном шаге по частоте $\Delta_k = 0,5$, $k = 1, 2, \dots, 400$, $\omega_{\max} = 200$. Время численного решения задачи составило 2093,3 с.

Алгоритм 3: решение во времени получено из численного гранично-элементного решения с помощью модифицированного метода Дурбина, когда шаг по частоте определяется по формуле: $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$, $\omega_k = e^{(kx)^m} - 1$, $k = 1, 2, \dots, 400$, $\omega_{\max} = 200$. Время численного решения задачи составило 2094 с.

На рис. 3, 4 показаны перемещения $u_2(t)$ и поровые давления $p(t)$ в точке с координатами (0,5; 1,5; 0,5).

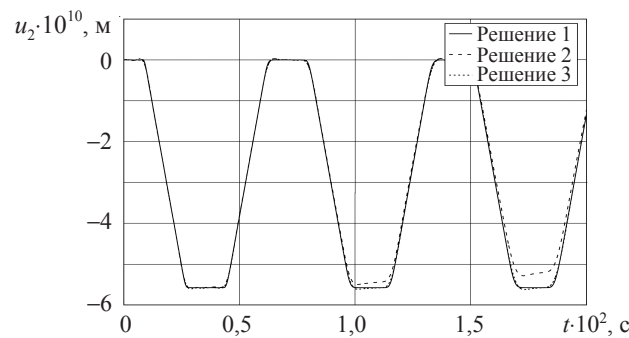


Рис. 3. Перемещения $u_2(t)$ в точке с координатами (0,5; 1,5; 0,5)

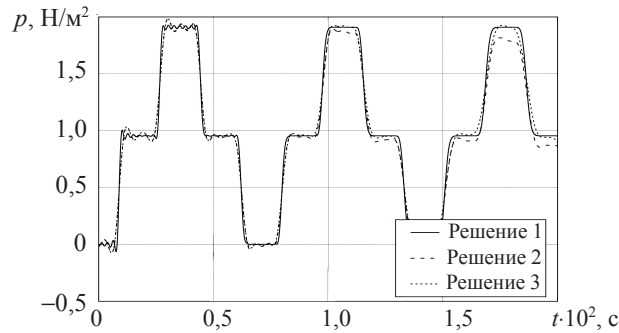


Рис. 4. Поровые давления $p(t)$ в точке с координатами (0,5; 1,5; 0,5)

Решения 1–3 получены соответственно приведенным алгоритмам 1–3. Предложенная модификация демонстрирует точность и эффективность по сравнению с классическим методом Дурбина. Результат по алгоритму 3 ближе к аналитическому решению, но время решения задачи существенно не увеличилось. Далее все результаты были получены с помощью алгоритма 3.

3.2. Поровязкоупругие результаты. Рассматривается трехмерная поровязкоупругая консоль. Один конец консоли жестко закреплен, на другой действует сила в виде функции Хевисайда $t_2 = t_2^*H(t)$, $t_2^* = -1$ Н/м² (см. рис. 2). Ширина консоли 1 м, длина 3 м. Базовый пороупругий материал – почва с параметрами модели Био: $K = 2,1 \cdot 10^8$ Н/м², $G = 9,8 \cdot 10^7$ Н/м², $\rho = 1884$ кг/м³, $\phi = 0,48$, $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м², $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с). Гранично-элементная сетка состоит из 1152 четырехугольных элементов.

Для получения поровязкоупругого решения применяется модель стандартного вязкоупругого тела со значениями параметров $\theta = 10$, $\gamma = 10; 1; 0,1$.

На рис. 5, 6 приведены результаты для перемещений и поровых давлений при различных значениях вязкости материала.

Принципиальные различия могут наблюдаться при моделировании медленной продольной волны. Эта волна имеет большую дисперсию, и ее трудно идентифицировать, поэтому для ее обнаружения численно-аналитическими методами необходимо искусственно установить высокие значения коэффициента проницаемости. На рис. 7, 8 приведены результаты расчетов с различными значениями проницаемости. На рис. 8 продемонстрирован эффект возникновения медленной продольной волны в пористом материале при коэффициенте проницаемости $k = 3,55 \cdot 10^{-5}$ м⁴/(Н·с).

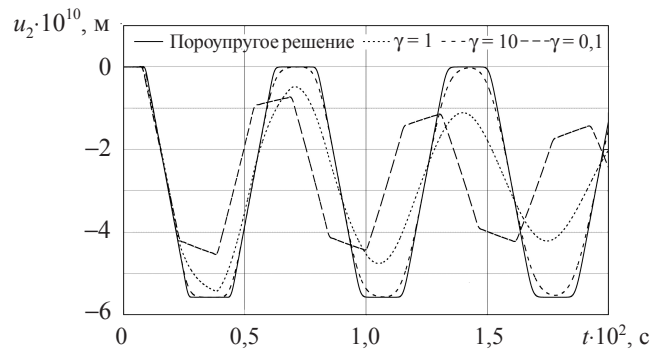


Рис. 5. Перемещения $u_2(t)$ в точке (0,5; 1,5; 0,5) при различных значениях вязкости

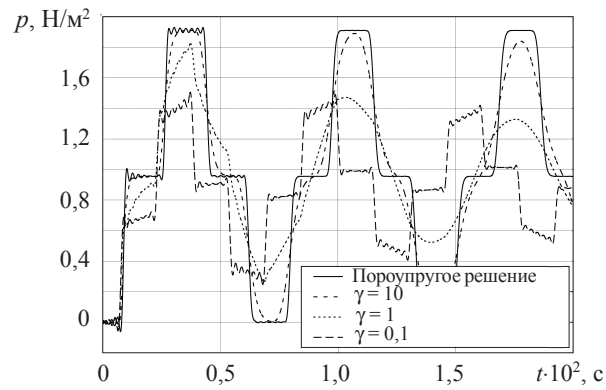


Рис. 6. Поровые давления $p(t)$ в точке (0,5; 1,5; 0,5) при различных значениях вязкости материала

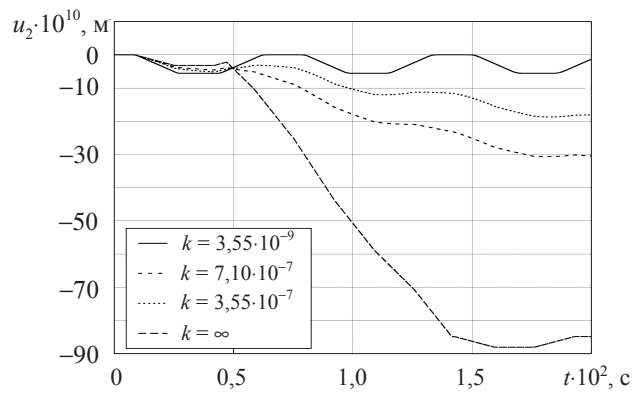


Рис. 7. Перемещения $u_2(t)$ в точке (0,5; 1,5; 0,5) при различных значениях проницаемости материала

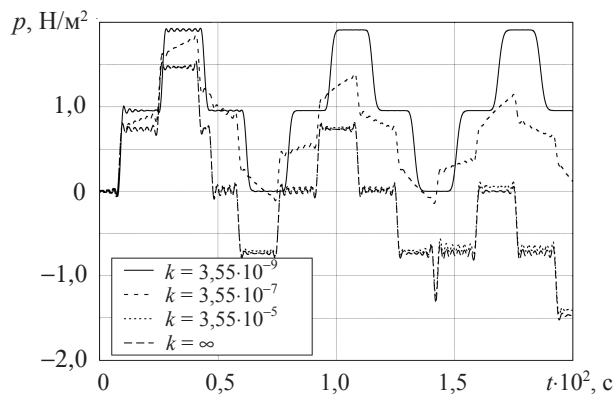


Рис. 8. Поровые давления $p(t)$ в точке (0,5; 1,5; 0,5) при различных значениях проницаемости материала

На рис. 9, 10 приведены отклики поровых давлений, когда изменяется параметр вязкости скелета пористого материала при фиксированном значении коэффициента проницаемости.

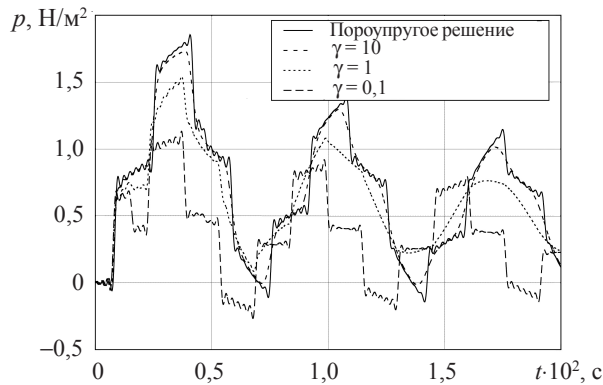


Рис. 9. Поровые давления $p(t)$ при различных значениях вязкости, $k = 3,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$

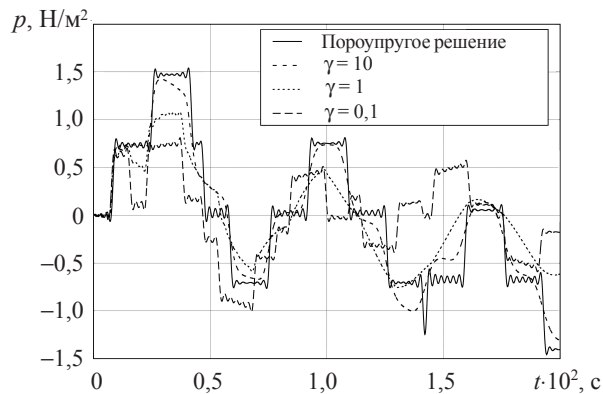


Рис. 10. Поровые давления $p(t)$ при различных значениях вязкости, $k = 3,55 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$

Заключение

Представлены результаты численного моделирования поровязкоупругой среды. Моделирование поровязкоупругого материала основано на теории пороупругости Био в сочетании с принципом соответствия упругой и вязкоупругой реакции. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов применены для решения трехмерных краевых задач. Вязкие свойства скелета пористого материала описывались моделью стандартного вязкоупругого тела. Для анализа трехмерных поровязкоупругих задач была представлена формулировка метода граничных элементов в пространстве преобразований Лапласа, основанная на интегральных представлениях фундаментальных решений. Модифицированный метод Дурбина применен для обращения преобразования Лапласа и получения решения во времени. Проведен анализ эффективности предложенной модификации. Получены численные решения задачи о нагрузке типа Хевисайда, действующей на поровязкоупругую консоль. Смоделирован эффект возбуждения медленной продольной волны в поровязкоупругом материале. Исследовано влияние вязкоупругих параметров на отклики перемещений и поровых давлений на примере задачи о призматическом поровязкоупругом теле под действием силы в виде функции Хевисайда. Предложенный подход является точным и эффективным методом, хорошо подходящим для задач линейной поровязкоупругости.

Список литературы

1. Darcy H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Exposition et Application des Principes a Suivre et des Formules a Employer dans les Questions de Distribution Eau*. Paris. 1856. 647 p.
2. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *Journal of Engineering Mechanics*. 1944. Vol. 3. Iss. 4. P. 230–241.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 179–191. DOI 10.1121/1.1908241.
5. Biot M.A. General theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*. 1956. Vol. 27. No 5. P. 459–467.
6. Detournay E., Cheng A.D. Fundamentals of poroelasticity. In: *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. Vol. II. Analysis and Design Method*. Oxford: Pergamon Press, 1993. P. 113–171. DOI: 10.1016/b978-0-08-040615-2.50011-3.
7. De Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. *Applied Mechanics Reviews*. 1996. Vol. 49. No 4. P. 201–262. DOI: doi.org/10.1115/1.3101926.
8. Schanz M., Cheng A.H.-D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mechanica*. 2000. Vol. 145. P. 1–8.
9. De Boer R., Wolfqang E., Liu Z.F. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. *Archive of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 63. P. 59–72.
10. Schanz M., Cheng A.H.-D. Dynamic analysis of a one-dimensional poroviscoelastic column. *Journal of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 68. P. 192–198. DOI: 10.1115/1.1349416.
11. Banks H.T., Bekele-Maxwell K., Bociu L., Noorman M., Guidoboni G. Sensitivity analysis in poro-elastic and poro-visco-elastic models with respect to boundary data. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 75. No 4. P. 697–735.
12. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 170 p.
13. Mansur W.J., Brebbia C.A. Transient elastodynamics using a time-stepping technique. In: *Boundary Elements*. Berlin: Springer-Verlag, 1983. P. 677–698.
14. Гольдштейн Р.В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред. Метод граничных интегральных уравнений. *Вычислительные аспекты и приложения в механике* М.: Мир, 1978. С. 183–209.
15. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. *Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела*. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.
16. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
17. Durbin F. Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer Journal*. 1974. Vol. 17. No 4. P. 371–376.
18. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. No 13. P. 3653–3674.
19. Игумнов Л.А., Петров А.Н., Ипатов А.А. Сравнение численного построения оригинала решения одномерной пороупругой задачи на основе шагового метода и метода Дурбина. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 273–279.
20. Ehlers W., Markert B. On the viscoelastic behaviour of fluid-saturated porous materials *Granular Matter*. 2000. Vol. 2. Iss. 3. P. 153–161.

References

1. Darcy H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Exposition et Application des Principes a Suivre et des Formules a Employer dans les Questions de Distribution Eau*. Paris. 1856. 647 p. .
2. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *J. Eng. Mech.* 1944. Vol. 3. Iss. 4. P. 230–241.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. No 2. P. 168–178. DOI 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. No 2. P. 179–191. DOI 10.1121/1.1908241.
5. Biot M.A. General theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *Appl. Phys.* 1956. Vol. 27. No 5. P. 459–467.
6. Detournay E., Cheng A.D. Fundamentals of poroelasticity. In: *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. Vol. II. Analysis and Design Method*. Oxford. Pergamon Press. 1993. P. 113–171. DOI: 10.1016/b978-0-08-040615-2.50011-3.
7. De Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. *Appl. Mech. Rev.* 1996. Vol. 49. No 4. P. 201–262. DOI: doi.org/10.1115/1.3101926.
8. Schanz M., Cheng A.H.-D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mech.* 2000. Vol. 145. P. 1–8.
9. De Boer R., Wolfqang E., Liu Z.F. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. *Arch Appl Mech.* 1993. Vol. 63. P. 59–72.
10. Schanz M., and Cheng A. H.-D. Dynamic analysis of a one-dimensional poroviscoelastic column. *J. Appl. Mech.* 2001. Vol. 68. P. 192–198. DOI: 10.1115/1.1349416.
11. Banks H.T., Bekele-Maxwell K., Bociu L., Noorman M., Guidoboni G. Sensitivity analysis in poro-elastic and poro-visco-elastic models with respect to boundary data. *Q. Appl. Math.* 2017. Vol. 75. No 4. P. 697–735.
12. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach*. Berlin. Springer-Verlag. 2001. 170 p.
13. Mansur W.J., Brebbia C.A. Transient elastodynamics using a time-stepping technique. In: *Boundary Elements*. Berlin. Springer-Verlag. 1983. P. 677–698.
14. Goldshteyn R.V. K voprosu o primeneniі metoda granichnykh integralnykh uravneniy dlya resheniya zadach mekhaniki sploshnykh sred. Metod granichnykh integralnykh uravneniy [On the application of the method of boundary integral equations for solving problems of continuum mechanics. Method of boundary integral equations]. *Vychislitelnye aspekty i prilozheniya v mekhanike [Computational Aspects and Applications in Mechanics]*. Moscow. Mir Publ. 1978. P. 183–209 (In Russian).
15. Ugodchikov A.G., Khutoryanskiy N.M. *Metod granichnykh elementov v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Boundary-Element Method in Mechanics of Deformable Solids]*. Kazan. Kazan State University Publ. 1986. 296 p. (In Russian).
16. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami [Boundary Integral Equations & Boundary Element Methods in Treating the Problems of 3D Elastodynamics with Coupled Fields]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).
17. Durbin F. Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Comput. J.* 1974. Vol. 17. No 4. P. 371–376.
18. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *Int. J. Solids Struct.* 2004. Vol. 41. No 13. P. 3653–3674.
19. Igumnov L.A., Petrov A.N., Ipatov A.A. Sravnenie chislennogo postroeniya originala resheniya odnomernoy porouprugoy zadachi na osnove shagovogo metoda i metoda Durbina [Comparison of numerical solution originals for 1D poroelastic problem based on the time-step method and the Durbin method]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Iss. 75. Pt. 4. P. 273–279 (In Russian).

20. Ehlers W., Markert B. On the viscoelastic behaviour of fluid-saturated porous materials *Granul. Matter.* 2000. Vol. 2. Iss. 3. P. 153–161.

DYNAMICS OF POROVISCOELASTIC PRISMATIC SOLID FOR VARIOUS VALUES OF MATERIAL PERMEABILITY

Ipatov A.A.¹, dell'Isola F.^{1,2}, Giorgio I.², Rahali Y.³, Eugster Simon R.⁴, Zaikin A.A.⁵

¹*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*The International Research Center for Mathematics & Mechanics
of Complex Systems (M&MoCS) Università degli Studi dell'Aquila, L'Aquila, Italy*

³*Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, Rouen, France*

⁴*Institute for Nonlinear Mechanics, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany*

⁵*University College London, London, United Kingdom*

In present paper wave propagation poroviscoelastic solids is studied. Study of wave propagation in saturated porous media is an important issue of engineering sciences. The poroelasticity theory was developed and nowadays is an important to engineering applications. Also research is dedicated to modeling of a slow compressional wave in poroviscoelastic media by means of boundary-element method. Poroviscoelastic formulation is based on Biot's model of fully saturated poroelastic media with a correspondence principal usage. Standard linear solid model is employed in order to describe viscoelastic behavior of the skeleton in porous medium. The boundary-value problem of the three-dimensional dynamic poroviscoelasticity is written in terms of Laplace transforms. Direct approach of the boundary integral equation method is employed. The boundary-element approach is based on the mixed boundary-element discretization of surface with generalized quadrangular elements. Subsequent application of collocation method leads to the system of linear equations, and then to the solution in Laplace domain. Numerical inversion of Laplace transform is used to obtain time-domain solution. The problem of the load acting on a poroelastic prismatic solid is solved by means of developed software based on boundary element approach. An influence of permeability of porous material on dynamic responses is studied. Slow wave phenomena appearance is demonstrated. Viscosity parameter influence on dynamic responses of displacements and pore pressure is studied.

Keywords: poroelasticity, poroviscoelasticity, boundary element method, Laplace transformation, boundary integral equations, Durbin method.