УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-393-401

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛОСОВОМ ЭЛЕКТРОДЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОУПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ*

Айзикович С.М.[1], **Кудиш И.И.**[2]

[1]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*
[2]*Университет Кеттеринга, Флинт, Мичиган, США*

saizikovich@gmail.com

Поступила в редакцию 23.08.2019

Рассматривается плоская задача о полосовом электроде на поверхности функционально-градиентного пьезоэлектрического покрытия однородной полуплоскости. Покрытие и подложка трансверсально-изотропны, ось изотропии совпадает с осью поляризации и нормальна к поверхности покрытия. Предполагается, что электроупругие свойства покрытия изменяются с глубиной по произвольным, независимым друг от друга законам. На поверхности покрытия находится полосовой электрод и задана разность потенциалов, которая приводит к электроупругой плоской деформации покрытия и подложки.

С использованием интегрального преобразования Фурье задача сводится к решению парного интегрального уравнения. Для решения уравнения применен двусторонний асимптотический метод, основанный на аппроксимации Паде трансформанты ядра интегрального уравнения. Полученное приближенное парное интегральное уравнение решается в замкнутом аналитическом виде. Построены приближенные аналитические выражения для электрической индукции, вертикальных и горизонтальных смещений поверхности покрытия и распределения электрического потенциала на поверхности покрытия. Эти выражения являются асимптотически точными для больших и малых значений относительной толщины покрытия (отношение толщины покрытия к полуширине электрода).

Ключевые слова: электрод, пьезоэлектроупругость, покрытие, функционально-градиентные материалы, плоская деформация, контактная задача, аналитический метод.

Введение

Широкое распространение получили материалы, обладающие пьезоэлектрическим эффектом, – материалы, способные преобразовывать механическую энергию в

*Выполнено при поддержке РНФ (грант № 15-19-10056).

электрическую и наоборот. Они находят применение в технике и микроэлектронике, где используются в качестве датчиков, электромеханических преобразователей и др. Возрос интерес к математическому моделированию элементов конструкций из пьезоэлектрических материалов. В статьях [1, 2] представлены решения задач о вдавливании проводящих и изолированных инденторов с плоским основанием, конической и сферической формы в пьезоэлектроупругое полупространство. В [3] построено решение задачи о воздействии точечной силы и точечного заряда на пьезоэлектрический материал. Плоские и осесимметричные контактные задачи для пьезоэлектрической полуплоскости (или полупространства) с функционально-градиентным покрытием (электроупругие свойства изменяются экспоненциально с глубиной) рассматривались в статьях [4–7]. Интегральные уравнения решены численно методом коллокации. Задачи о вдавливании сферического, конического и плоского кругового инденторов в пьезоэлектрический материал с учетом трения рассмотрены в [8, 9]. Найденные решения применены для анализа результатов, полученных в сканирующей зондовой микроскопии. Взаимодействие инденторов с тонкой пьезоэлектрической пленкой, лежащей на жесткой подложке, рассмотрено в [10], а со слоистым полупространством – в [11].

Настоящая статья продолжает исследование деформирования функционально-градиентных пьезоэлектрических материалов [12, 13], электроупругие свойства которых изменяются с глубиной по произвольным общим законам. Построено решение задачи об электрическом воздействии на поверхность пьезоэлектроупругого функционально-градиентного покрытия. Получены аналитические формулы в квадратурах, описывающие распределение смещений, электрического потенциала и электрической индукции на поверхности покрытия.

1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим пьезоэлектрическую электроупругую полуплоскость с покрытием. Покрытие представляет собой функционально-градиентный слой толщиной H. Полуплоскость является однородной. Считаем, что материалы покрытия и подложки трансверсально-изотропны. Введем декартову систему координат (x, z), ось z совпадает с осью предварительной поляризации. Упругие модули c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, пьезоэлектрические модули e_{31}, e_{15}, e_{33}, диэлектрические проницаемости ε_{11}, ε_{33} описываются следующими законами:

$$\{c_{kj}, e_{kj}, \varepsilon_{kj}\} = \begin{cases} c_{kj}^{(c)}(z), e_{kj}^{(c)}(z), \varepsilon_{kj}^{(c)}(z), & -H \le z \le 0, \\ c_{kj}^{(s)}, e_{kj}^{(s)}, \varepsilon_{kj}^{(s)}, & -\infty < z < -H, \end{cases}$$

где $c_{kj}^{(c)}(z)$, $e_{kj}^{(c)}(z)$, $\varepsilon_{kj}^{(c)}(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $c_{kj}^{(s)}, e_{kj}^{(s)}, \varepsilon_{kj}^{(s)}$ – некоторые константы. Здесь и далее индексами (c) и (s) обозначены характеристики покрытия и подложки соответственно.

Уравнения равновесия, уравнение электростатики и линейные определяющие соотношения для электроупругого пьезоэлектрического материала имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_x = c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z = c_{13}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + e_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\tau_{xz} = c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ,$$
$$D_x = e_{15}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad D_z = e_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + e_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

На границе раздела покрытие/подложка выполнены следующие граничные условия:

$$z = -H:\ w^{(c)} = w^{(s)},\quad u^{(c)} = u^{(s)},\ \varphi^{(c)} = \varphi^{(s)}, \tag{3}$$

$$z = -H:\ \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)},\quad \tau_{xz}^{(c)} = \tau_{xz}^{(s)},\ D_z^{(c)} = D_z^{(s)}. \tag{4}$$

Использованы обозначения: u, w – горизонтальные и вертикальные смещения; σ_x, σ_z, τ_{xz} – компоненты тензора напряжений; φ – электрический потенциал; D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции.

Пусть на поверхности покрытия расположен полосовой электрод шириной $2a$. По всей площади электрода задан постоянный электрический потенциал φ_0. Вне электрода поверхность покрытия изолирована и свободна от механических нагрузок:

$$z = 0: \begin{cases} \varphi = -\varphi_0, & |x| \le a, \\ D_z = 0, & |x| > a, \\ \tau_{xz} = 0,\ \sigma_z = 0, & \forall x. \end{cases} \tag{5}$$

Требуется определить электрическую индукцию в области электрода:

$$D_z\big|_{z=0} = -q_a(x),\ |x| \le a,$$

смещения поверхности покрытия и распределение электрического потенциала на поверхности.

2. Парные интегральные уравнения и их решение

Используем преобразование Фурье:

$$f(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha,z)\exp(-i\alpha x)\,d\alpha,\quad \bar{f}(\alpha,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\exp(i\alpha x)\,dx. \tag{6}$$

Представим образы Фурье смещений и электрического потенциала в виде:

$$\{\overline{u},\overline{w},\overline{\varphi}\}(\alpha,0) = -2\left\{ i\frac{L_{13}(\alpha)}{E_{13}^{(c)}}, \frac{L_{23}(\alpha)}{E_{23}^{(c)}}, \frac{L_{33}(\alpha)}{E_{33}^{(c)}} \right\}\frac{\overline{q}_a(\alpha)}{|\alpha|}. \tag{7}$$

Здесь $E_{ij}^{(c)}$ – постоянные, зависящие от электроупругих свойств поверхности покрытия ($z=0$), или электроупругие модули поверхности покрытия; L_{ij} – функции податливости. Вычисление функций податливости сводится к решению краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В [14] описана схема построения функций податливости для более общего случая электромагнитоупругой полуплоскости. Нетрудно убедиться, что функции L_{23} и L_{33} – четные, а L_{13} – нечетная. Кроме того, выполняется

$$\lim_{\alpha\to 0} L_{ij}(\alpha) = \frac{E_{ij}^{(c)}}{E_{ij}^{(s)}},$$

где $E_{ij}^{(s)}$ – эффективные электроупругие модули подложки.

Далее используем следующие безразмерные переменные:

$$\{\lambda, x', \alpha\} = \frac{\{H, x, \alpha'\}}{a}, \quad q_0'(x') = q_a(x'a), \quad L_{kj}'(\alpha) = L_{kj}\left(\frac{\alpha}{H}\right). \tag{8}$$

Из (5), используя (6)–(8) и опуская штрихи, получим систему парных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \overline{q}_0(\alpha)\dfrac{L_{33}(\lambda\alpha)}{\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha = \pi E_{33}^{(c)}\dfrac{\varphi_0}{2a}, & |x| \le 1, \\ \int\limits_0^\infty \overline{q}_0(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha = 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{9}$$

Аппроксимируем функции податливости следующими выражениями:

$$L_{ij}(\lambda\gamma) \approx \Pi_{ij}^{+}(\lambda\gamma), \quad \Pi_{ij}^{\pm}(\lambda\gamma) = \prod_{n=1}^{N_{ij}} \frac{\lambda^2\gamma^2 \pm A_{ijn}^2}{\lambda^2\gamma^2 \pm B_{ijn}^2}. \tag{10}$$

Значения параметров A_{ijn}, B_{ijn}, $n = 1, 2, \ldots, N_{ij}$, подбираются таким образом, чтобы выполнялось $A_{ijn} \ne B_{ijm}$ и $L_{ij}(0) = \Pi_{ij}^{+}(0)$. Алгоритмы подбора параметров аппроксимации описаны в [15].

Решение парного интегрального уравнения (9) имеет вид [16, 17]:

$$\overline{q}_0(\alpha) = \frac{Q}{a}\overline{q}(\alpha), \quad \overline{q}(\alpha) = J_0(\alpha) - \sum_{i=1}^{N_{33}} C_i \alpha \frac{J_1(\alpha)\widetilde{A}_{33i}\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33i}) - \alpha J_0(\alpha)}{\alpha^2 + \widetilde{A}_{33n}^2}, \tag{11}$$

$$\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\}_{ijk} = \{A, B\}_{ijk}\lambda^{-1}, \quad \widetilde{I}(A) = \frac{I_0(A)}{I_1(A)}, \tag{12}$$

где Q – суммарный электрический заряд на электроде. Неизвестные константы C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N_{33}} C_i \frac{\widetilde{A}_{33i}K_1(\widetilde{B}_{33n})\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33i}) + \widetilde{B}_{33n}K_0(\widetilde{B}_{33n})}{\widetilde{A}_{33i}^2 - \widetilde{B}_{33n}^2} = \frac{K_0(\widetilde{B}_{33n})}{\widetilde{B}_{33n}}, \quad n = 1, \ldots, N_{33}. \tag{13}$$

В (11)–(13) использованы обозначения: $J_0(x), J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода, $I_0(x), I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода, $K_0(x), K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода.

После обращения преобразования Фурье в (11) получим:

$$q_0(x) = \frac{Q}{\pi a} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{i=1}^{N_{33}} C_i \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \widetilde{A}_{33i}\left(Z_{c1}(\widetilde{A}_{33i}, x)\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33i}) - Z_{s0}(\widetilde{A}_{33i}, x)\right)\right]\right), \tag{14}$$

$$Z_{cj}(A, x) = \int\limits_x^1 \frac{t^j \cosh(A(t-x))}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad Z_{sj}(A, x) = \int\limits_x^1 \frac{t^j \sinh(A(t-x))}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad j = 0, 1. \tag{15}$$

Доказано [15], что решение задачи(14) является асимптотически точным при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$. Погрешность при произвольном значении λ исследована ранее [18].

Установлено, что погрешность решения является величиной того же порядка малости, что и погрешность аппроксимации функции податливости L_{33}.

3. Смещения и электрический потенциал поверхности покрытия

Введем выражения, приведенные к безразмерному виду:

$$\{u, w, \varphi\}(x,0) = Q\left\{\frac{u_c}{E_{13}^{(c)}}, \frac{w_c}{E_{23}^{(c)}}, \frac{\varphi_c}{E_{33}^{(c)}}\right\}(x,0). \tag{16}$$

Используя формулы (6), (7) и (11), получим выражения для горизонтальных и вертикальных смещений и электрического потенциала на поверхности покрытия в виде некоторых квадратур:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}(x,0) \approx -\frac{2Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{q}(\alpha)}{\alpha}\begin{Bmatrix} (E_{13}^{(c)})^{-1}\Pi_{13}(\lambda\alpha)\sin\alpha x \\ (E_{23}^{(c)})^{-1}\Pi_{23}(\lambda\alpha)\cos\alpha x \\ (E_{33}^{(c)})^{-1}\Pi_{33}(\lambda\alpha)\cos\alpha x \end{Bmatrix} d\alpha. \tag{17}$$

Введем безразмерные выражения:

$$\{u_s, w_s, \varphi_s\}(x) = \frac{\{u(x,0)E_{13}^{(s)}, w(x,0)E_{23}^{(s)}, \varphi(x,0)E_{33}^{(s)}\}}{Q}, \quad \beta_{ij} = \frac{E_{ij}^{(s)}}{E_{ij}^{(c)}}. \tag{18}$$

Вычисляя квадратуры в (17), получим выражения, справедливые при $|x| \le 1$:

$$\begin{aligned} u_s(x) = -\frac{2}{\pi}\arcsin x + \frac{2\beta_{13}}{\pi}\Bigg[\sum_{m=1}^{N_{33}} C_m \Pi_{13}^{-}(A_{33m})\big(Z_{c0}(\widetilde{A}_{33m}, x) - \widetilde{I}(\widetilde{A}_{33m})Z_{s1}(\widetilde{A}_{33m}, x)\big) + \\ + \sum_{n=1}^{N_{13}}\bigg(\frac{\pi}{2}\big(F_{13n}I_0(\widetilde{B}_{13n}) - G_{13n}I_1(\widetilde{B}_{13n})\big)\exp(-\widetilde{B}_{13n}x) + \\ + G_{13n}Z_{s1}(\widetilde{B}_{13n}, x) - F_{13n}Z_{c0}(\widetilde{B}_{13n}, x)\bigg)\Bigg], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} w_s(x) = -d_1 + \frac{2\beta_{23}}{\pi}\Bigg[\sum_{n=1}^{N_{23}}\big(F_{23n}K_0(\widetilde{B}_{23n})\cosh(\widetilde{B}_{23n}x) - G_{23n}D_1(x, \widetilde{B}_{23n})\big) + \\ + \sum_{m=1}^{N_{33}} C_m \Pi_{23}^{-}(A_{33m})\big(\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33m})D_1(x, \widetilde{A}_{33m}) - K_0(\widetilde{A}_{33m})\cosh(\widetilde{A}_{33m}x)\big)\Bigg], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\varphi_s(x) = -d_1 + \frac{2\beta_{33}}{\pi}\sum_{n=1}^{N_{33}}\big[F_{33n}K_0(\widetilde{B}_{33n})\cosh(\widetilde{B}_{33n}x) - G_{33n}D_1(x, \widetilde{B}_{33n})\big], \tag{21}$$

где

$$d_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\alpha)}{\alpha}d\alpha = \infty,$$

$$F_{ijn} = \Pi_{ijn}\left(\frac{1}{\widetilde{B}_{ijn}^2} + \sum_{m=1}^{N_{33}}\frac{C_m}{\widetilde{B}_{ijn}^2 - \widetilde{A}_{33m}^2}\right), \quad G_{ijn} = \frac{\Pi_{ijn}}{\widetilde{B}_{ijn}}\sum_{m=1}^{N_{33}}\frac{C_m \widetilde{A}_{33m}\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33m})}{\widetilde{B}_{ijn}^2 - \widetilde{A}_{33m}^2},$$

$$\Pi_{ijn} = (\widetilde{A}_{ijn}^2 - \widetilde{B}_{ijn}^2)\prod_{m=1, m\ne n}^{N_{ij}}\frac{\widetilde{A}_{ijm}^2 - \widetilde{B}_{ijn}^2}{\widetilde{B}_{ijm}^2 - \widetilde{B}_{ijn}^2}. \tag{22}$$

Для $|x|>1$ получим выражения:

$$u_s(x) = -1 + \beta_{13} \sum_{n=1}^{N_{13}} \left(F_{13n} I_0(\widetilde{B}_{13n}) - G_{13n} I_1(\widetilde{B}_{13n}) \right) \exp\left(-\widetilde{B}_{13n} x\right), \tag{23}$$

$$w_s(x) = -d_1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccosh} x + \frac{2\beta_{23}}{\pi^2} \left[\sum_{m=1}^{N_{33}} C_m \Pi_{23}^{-}(A_{33m}) \left(\widetilde{I}(\widetilde{A}_{33m}) D_1(x, \widetilde{A}_{33m}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - D_2(x, \widetilde{A}_{33m}) \right) + \sum_{n=1}^{N_{23}} \left(F_{23n} D_2(x, \widetilde{B}_{23n}) - G_{23n} D_1(x, \widetilde{B}_{23n}) \right) \right], \tag{24}$$

$$\varphi_s(x) = -d_1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccosh} x + \frac{2\beta_{33}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N_{33}} \left(F_{33n} D_2(x, \widetilde{B}_{33n}) - G_{33n} D_1(x, \widetilde{B}_{33n}) \right). \tag{25}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_1(x,B) = \frac{1}{2\pi B} \left(\int_0^1 \frac{t\left[\exp\left(-B(t+x)\right) Ei_1\left(B(t+x)\right) - \exp\left(B(t+x)\right) Ei\left(-B(t+x)\right)\right]}{\sqrt{1-t^2}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{t \operatorname{sign}(t-x)\left[\exp\left(-B|t-x|\right) Ei_1\left(B|t-x|\right) - \exp\left(B|t-x|\right) Ei\left(-B|t-x|\right)\right]}{\sqrt{1-t^2}} \right),$$

$$D_2(x,B) = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\exp\left(-B(t+x)\right) Ei_1\left(B(t+x)\right) + \exp\left(B(t+x)\right) Ei\left(-B(t+x)\right)}{\sqrt{1-t^2}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{\exp\left(-B|t-x|\right) Ei_1\left(B|t-x|\right) + \exp\left(B|t-x|\right) Ei\left(-B|t-x|\right)}{\sqrt{1-t^2}} \right),$$

Ei и Ei_1 – интегральная показательная и приведенная интегральная показательная функции соответственно.

Заключение

Получено решение плоской задачи о полосовом электроде на поверхности полуплоскости с функционально-градиентным пьезоэлектроупругим покрытием. Найдены приближенные аналитические формулы, описывающие смещения поверхности покрытия и распределение электрического потенциала на поверхности как в области электрода, так и вне ее. В формулах явно присутствует слагаемое, описывающее однородную полуплоскость без покрытия, и добавка, описывающая электроупругую деформацию покрытия. Аналитический вид формул позволяет провести сравнение электроупругого деформирования материалов с покрытиями и без них. Нормальные смещения поверхности и распределение электрического потенциала на поверхности определяются с точностью до бесконечной константы.

Список литературы

1. Giannakopoulos A.E., Suresh S. Theory of indentation of piezoelectric materials. *Acta Materialia.* 1999. Vol. 47. No 7. P. 2153–2164.

2. Chen W.Q., Ding H. Indentation of a transversely isotropic piezoelectric half-space by a rigid sphere. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 1999. Vol. 12. P. 114–120.

3. Karapetian E., Sevostianov I., Kachanov M. Point force and point electric charge in infinite

and semi-infinite transversely isotropic piezoelectric solids. *Philosophical Magazine*. 2000. Vol. 80. P. 331–359.

4. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch. *International Journal of Solids and Structures.* 2016. Vol. 90. P. 45–59.

5. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Fretting contact of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a conducting punch. *Smart Materials and Structures.* 2016. Vol. 25. No 2. P. 025014. DOI:10.1088/0964-1726/25/2/025014.

6. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *International Journal of Solids and Structures.* 2014. Vol. 51. P. 2791–2806.

7. Ma J., El-Borgi S., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation. *Journal of Thermal Stresses.* 2016. Vol. 39. P. 245–277.

8. Makagon A., Kachanov M., Kalinin S.V., Karapetian E. Indentation of spherical and conical punches into piezoelectric half-space with frictional sliding: Applications to scanning probe microscopy. *Physical Review B*. 2007. Vol. 76. P. 064115.

9. Makagon A., Kachanov M., Karapetian E., Kalinin S.V. Piezoelectric indentation of a flat circular punch accompanied by frictional sliding and applications to scanning probe microscopy. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. Iss. 2. P. 221–239. DOI:10.1016/j.ijengsci.2008.07.010.

10. Wang J.H., Chen C.Q., Lu T.J. Indentation responses of piezoelectric films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2008.Vol. 56. P. 3331–3351.

11. Wu Y.F., Yu H.Y., Chen W.Q. Indentation responses of piezoelectric layered halfspace. *Smart Materials and Structures*. 2013. Vol. 22. P. 015007.

12. Васильев А.С., Волков С.С., Айзикович С.М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием. *Докл. РАН*. 2018. Т. 478. №1. С. 34–39.

13. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space. *Acta Mechanica*. 2016. Vol. 227. No 1. P. 263–273.

14. Васильев А.С. Функции податливости электромагнитупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной полуплоскости и полупространства с функционально-градиентным или слоистым покрытием. *Вестник СамГТУ. Сер. Физико-математические науки.* 2019. Т. 23. №3 (в печати).

15. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений. *ПММ*. 1990. Т. 54. С. 872–877.

16. Айзикович С.М., Васильев А.С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства. *ПММ*. 2013. Т. 77. №1. С. 129–137.

17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Mitrin B.I. Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2017. Vol. 68. Iss. 1. DOI 10.1007/s00033-016-0746-8.

18. Sadyrin E.V., Vasiliev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. Vol. 122. P. 209–221.

References

1. Giannakopoulos A.E., Suresh S. Theory of indentation of piezoelectric materials. *Acta Mater.* 1999. Vol. 47. No 7. P. 2153–2164.

2. Chen W.Q., Ding H. Indentation of a transversely isotropic piezoelectric half-space by a rigid sphere. *Acta Mech. Solida Sin.* 1999. Vol. 12. P. 114–120.

3. Karapetian E., Sevostianov I., Kachanov M. Point force and point electric charge in infinite and semi-infinite transversely isotropic piezoelectric solids. *Phil. Mag*. 2000. Vol. 80. P. 331–359.

4. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch. *Int. J. Solids Struct*. 2016. Vol. 90. P. 45–59.

5. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Fretting contact of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a conducting punch. *Smart Mater. Struct.* 2016. Vol. 25. No 2. 025014. DOI: 10.1088/0964-1726/25/2/025014.

6. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *Int. J. Solids Struct*. 2014. Vol. 51. P. 2791–2806.

7. Ma J., El-Borgi S., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation. *J. Therm. Stresses.* 2016. Vol. 39. P. 245–277.

8. Makagon A., Kachanov M., Kalinin S.V. and Karapetian E. Indentation of spherical and conical punches into piezoelectric half-space with frictional sliding: Applications to scanning probe microscopy. *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 76. 064115.

9. Makagon A., Kachanov M., Karapetian E., Kalinin S.V. Piezoelectric indentation of a flat circular punch accompanied by frictional sliding and applications to scanning probe microscopy. *Int. J. Eng. Sci.* 2009. Vol. 47. Iss. 2. P. 221–239. DOI:10.1016/j.ijengsci.2008.07.010.

10. Wang J.H., Chen C.Q., Lu T.J. Indentation responses of piezoelectric films. *J. Mech. Phys. Solids.* 2008. Vol. 56. P. 3331–3351.

11. Wu Y.F., Yu H.Y., Chen W.Q. Indentation responses of piezoelectric layered halfspace. *Smart Mater. Struct*. 2013. Vol. 22. P. 015007.

12. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. An approximate analytic solution to the problem of indentation of conductive stamp into an electroelastic half-space with an inhomogeneous coating. 2018. *Doklady Physics*. Vol. 63. Iss. 1. P. 18–22.

13. VasilievA.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space. *Acta Mech*. 2016. Vol. 227. No 1. P. 263–273.

14. Vasiliev A.S. Funktsii podatlivosti elektromagnituprugoy p'yezoelektricheskoy p'yezo-magnitnoy poluploskosti i poluprostranstva s funktsional'no-gradientnym ili sloistym pokrytiem [Compliance functions of electromagnetoelastic piezoelectric and piezomagnetic half-plane and half-space with functionally graded or layered coatings]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*]. 2019. Vol. 23. No 3 (In print). (In Russian).

15. Aizikovich S.M. An asymptotic solution of a class of coupled equations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1990. Vo1. 54. No 5. P. 719–724.

16. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem for the torsion of an elastic halfspace inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 77. No 1. P. 91–97.

17. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Mitrin B.I. Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.* 2017. Vol. 68. Iss. 1. DOI 10.1007/s00033-016-0746-8.

18. Sadyrin E.V., Vasiliev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019. Vol. 122. P. 209–221.

APPROXIMATED ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT AN ELECTRODE ON THE PIEZOELECTROELASTIC HALF-PLACE WITH PIEZOELECTROELASTIC FUNCTIONALLY GRADED COATING

Aizikovich S.M.[1,], Kudish I.I.[2]

[1]*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[2]*Kettering University, Flint, Michigan, USA*

The paper addresses to the plane contact problem on an electrode on the surface of a functionally graded piezoelectric coating glued with no friction with a homogeneous piezoelectric half-plane. The coating and the substrate are assumed to be transversely isotropic, the axis of isotropy coincides with the axis of polarization and normal to the surface of the coating. Arbitrary independent variation of the electroelastic properties of the coating in depth is considered. Plane electrode is placed on the surface of the coating and potential difference is applied which leads to an el ectroelastic deformation of the coating and substrate.
Using the integral transformation technique, the problem is reduced to the solution of the dual integral equation. This equation is solved by the bilateral asymptotic method, based on an idea of using Pade approximation of the kernel transform of the integral equation. An approximated dual integral equation is solved in a closed analytical form. Approximated analytical expressions for electric induction and potential, vertical and horizontal displacements on the surface of the coating are constructed. These expressions are asymptotically exact both for big and small values of the relative coating thickness (relation of the coating thickness to electrode half-width).

Keywords: electrode, piezoelectroelasticity, coating, functionally graded materials, plane deformation, contact problem, analytical method.