

УДК 539.3

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ И ТЕРМОРАДИАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

**С.А. Капустин, В.А. Горохов, Ю.А. Чурилов, Ю.Г. Слепнев**

*Нижний Новгород*

Дано описание численной методики исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из трансверсально-изотропных материалов в условиях квазистатических силовых и терморadiационных воздействий. Предложена модель, описывающая упруговязкопластическое поведение таких материалов и алгоритмы ее реализации в задачах расчета конструкций на основе метода конечных элементов (МКЭ). Представлены результаты численного исследования НДС конструкции, выполненной из графита, обладающего свойствами трансверсально-изотропного материала, при терморadiационных воздействиях.

Многие конструкционные материалы, используемые в современной технике, являются анизотропными, их деформационные и прочностные свойства существенно зависят от выбора направления внутри материала. Одним из видов подобных материалов является трансверсально-изотропный материал, имеющий выделенное направление, в котором механические свойства отличаются от механических свойств материала в плоскости, перпендикулярной выделенному направлению. Для анализа нелинейного поведения таких материалов не удастся использовать существующие модели пластичности и ползучести, предложенные для изотропных материалов. Поэтому проблема моделирования упруговязкопластического поведения трансверсально-изотропных материалов при термосиловых и, особенно, терморadiационных воздействиях представляется чрезвычайно актуальной.

В настоящее время существуют многочисленные модели, описывающие поведение изотропных материалов в условиях пластичности и ползучести, а также мощные численные методы на основе МКЭ, позволяющие проводить анализ деформирования конструкций, выполненных из подобных материалов. В данной статье для описания анизотропии механических свойств трансверсально-изотропного материала предлагается структурно-феноменологическая модель, позволяющая представить исходный материал в виде комплекса двух совместно работающих изотропных материалов: основного материала, рассматриваемого с позиций механики сплошной среды, и материала волокон, ориентированных вдоль направления анизотропии исходного материала. При этом предполагается, что волокна воспринимают лишь осевые усилия растяжения–сжатия и деформируются совместно с основным материалом.

Рассмотрим формулировку предлагаемой структурно-феноменологической

модели трансверсально-изотропного материала и особенности организации вычислительного процесса при ее реализации на основе МКЭ. Во всех дальнейших выкладках величины с индексом “0” соответствуют основному материалу, а с индексом “v” – материалу волокон.

Приведем основные определяющие соотношения, устанавливающие в рамках предлагаемой модели связь между изменениями напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta e_{ij}$  в трансверсально-изотропном материале, находящемся в условиях термосиловых и терморadiационных воздействий. Для изотропных облучаемых материалов (конструкционный графит, нержавеющие стали) такие соотношения рассмотрены в работах [1, 2].

Полагая известными характеристики деформирования основного материала, запишем уравнения, связывающие изменения напряжений  $\Delta\sigma_{ij}^0$  и деформаций  $\Delta e_{ij}^0$  на элементарном шаге изменения внешних воздействий:

$$\Delta\sigma_{ij}^0 = 2\widehat{G}^0(\Delta e_{ij}^0 - \Delta d_{ij}^0) + \delta_{ij} \left( \widehat{K}^0 - \frac{2}{3}\widehat{G}^0 \right) (\Delta e_{ij}^0 - \Delta d_{ij}^0),$$

здесь

$$\Delta d_{ij}^0 = \Delta e_{ij}^{0i} - \frac{\Delta G^0}{2\widehat{G}^0} \overline{\sigma}_{ij}^0 + \delta_{ij} \left[ \Delta(\alpha^0 T) + \Delta\beta^0 - \frac{\Delta K^0}{3\widehat{K}^0} \overline{\sigma}^0 \right],$$

$$\Delta(\alpha^0 T) = \widehat{\alpha}^0 \widehat{T} - \overline{\alpha}^0 \overline{T}, \quad \Delta\beta^0 = \widehat{\beta}^0 - \overline{\beta}^0, \quad \Delta G^0 = \frac{\widehat{G}^0 - \overline{G}^0}{\overline{G}^0}, \quad \Delta K^0 = \frac{\widehat{K}^0 - \overline{K}^0}{\overline{K}^0},$$

где  $\Delta e_{ij}^{0i}$  – изменение необратимых составляющих деформаций, которые могут включать в себя деформации пластичности, термической или радиационной ползучести;  $\overline{\sigma}_{ij}^0$ ,  $\overline{\sigma}^0$  – значения соответственно девиаторной и шаровой составляющих тензора напряжений в исходном состоянии;  $\alpha^0$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $\beta^0$  – деформация радиационного формоизменения,  $G^0$ ,  $K^0$  – модули сдвиговой и объемной деформации материала соответственно; величины со знаком “-” относятся к исходному, со знаком “^” – к текущему состоянию.

Аналогичные соотношения можно записать для изменений напряжений  $\Delta\sigma^v$  и деформаций  $\Delta e^v$  в волокнах:

$$\Delta\sigma^v = \widehat{E}^v(\Delta e^v - \Delta d^v),$$

где

$$\Delta d^v = \Delta e^{vi} - \frac{\Delta E^v}{\widehat{E}^v} \overline{\sigma}^v + \Delta(\alpha^v T) + \Delta\beta^v.$$

Здесь  $\overline{\sigma}^v$  – значение напряжения в волокнах в исходном состоянии,  $E^v$  – модуль нормальной упругости материала волокон,

$$\Delta(\alpha^v T) = \widehat{\alpha}^v T - \overline{\alpha}^v \overline{T}, \quad \Delta\beta^v = \widehat{\beta}^v - \overline{\beta}^v, \quad \Delta E^v = \frac{\widehat{E}^v - \overline{E}^v}{\overline{E}^v}.$$

Для определения связи между характеристиками реального (“исходного”) материала, материала волокон и “основного” материала рассмотрим элементарный объем, имеющий площадь  $F$  в сечении, нормальном к направлению волокон. Обозначим эффективные площади сечений, относящиеся к основному материалу и

суммарному сечению волокон,  $F^0$  и  $F^v$  соответственно. При этом  $F = F^0 + F^v$ .

Результирующая сила, действующая на этой площадке в направлении волокон, может быть записана в виде:

$$\sigma_3 F = \sigma_3^0 F^0 + \sigma^v F^v, \quad (1)$$

$\sigma_3$  – приведенные напряжения, действующие на рассматриваемой площадке в продольном направлении,  $\sigma_3^0$  – напряжения, действующие в основном материале,  $\sigma^v$  – напряжения в волокнах.

Пусть  $E_3$ ,  $E^0$ ,  $E^v$  – модули нормальной упругости исходного материала в направлении волокон, основного материала и материала волокон соответственно,  $e$  – общая упругая деформация материала в направлении волокон. Тогда из (1) следует:

$$E_3 e F = E^0 e F^0 + E^v e F^v,$$

откуда

$$E^v = \frac{E_3 F - E^0 F^0}{F^v}. \quad (2)$$

Таким образом, модуль упругости материала волокон может быть однозначно определен, если известны модули упругости исходного материала в направлении волокон  $E_3$ , основного материала  $E^0$  и отношения площадей  $F^0$  и  $F^v$  к площади  $F$ .

Следует иметь в виду, что реальными величинами, которые могут быть определены в результате проведения простейших экспериментов на исходном материале, являются модули упругости в поперечных направлениях  $E_1$ ,  $E_2$  и продольном направлении  $E_3$ . Кроме того, соотношения площадей сечений можно задаваться произвольно. При этом в зависимости от выбора этих площадей будет определяться физический смысл модулей основного материала  $E^0$  и материала волокон  $E^v$ . Например, реальное соотношение площадей основного материала  $F^0$  и волокон  $F^v$  можно определить, если известен коэффициент концентрации волокон  $h = F^v/F$ ; тогда  $F^0 = F(1-h)$ ,  $F^v = Fh$ . При этом модуль  $E^v$  можно рассматривать как модуль упругости материала реальных волокон. В то же время можно положить  $F = F^0 = F^v$ . Тогда модуль  $E^v$  будет определять дополнительную жесткость приведенного материала в направлении волокон по отношению к основному материалу, то есть  $E^v = E_3 - E^0$ .

По аналогии с модулями упругости для материала волокон можно определить характеристики теплового расширения  $\alpha^v$  и необратимую деформацию  $e^{nh}$ .

Пусть  $\alpha_3$ ,  $\alpha^0$  – коэффициенты теплового расширения соответственно исходного материала в направлении волокон и основного материала,  $\Delta T$  – изменение температуры,  $e$  – общая деформация элемента в направлении волокон, тогда элементарные усилия вдоль направления волокон можно представить в виде:

$$E_3 (e - \alpha_3 \Delta T) F = E^0 (e - \alpha^0 \Delta T) F^0 + E^v (e - \alpha^v \Delta T) F^v.$$

Полагая далее  $F = F^0 = F^v$ , получим:

$$\alpha^v = \frac{E_3 \alpha_3 - E^0 \alpha^0}{E^v} = \frac{E_3 \alpha_3 - E^0 \alpha^0}{E_3 - E^0}. \quad (3)$$

Иначе говоря, для определения коэффициента теплового расширения  $\alpha^v$  материала волокон достаточно знать модули упругости  $E_3$ ,  $E^0$ , коэффициенты теплового

расширения  $\alpha_3$ ,  $\alpha^0$  исходного и основного материала.

Аналогично можно получить выражения для функции радиационного формоизменения  $\beta^v$  и необратимой деформации  $e^{vn}$  в материале волокон при известных значениях этих величин в исходном и основном материалах:

$$\beta^v = \frac{E_3\beta_3 - E^0\beta^0}{E^v},$$

$$e^{vn} = \frac{E_3e_3^n - E^0e^{0n}}{E^v}.$$

Для определения коэффициента температурного расширения основного материала предположим, что элементарный объем исходного материала находится в условиях свободного температурного расширения за счет изменения температуры на величину  $\Delta T$ . Деформации исходного материала при этом будут таковы: в направлении волокон  $e_3 = \alpha_3\Delta T$ , в поперечном направлении  $e_1 = e_2 = \alpha_1\Delta T$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  – коэффициенты температурного расширения исходного материала в поперечном и продольном направлениях соответственно. При этом в основном материале за счет различия коэффициентов температурного расширения возникнут дополнительные продольные напряжения:

$$\sigma_{33}^0 = E^0(\alpha_3 - \alpha_0)\Delta T.$$

С учетом равенства поперечных деформаций исходного и основного материала можно записать:

$$e_1 = e_2 = \alpha_1\Delta T = \alpha^0\Delta T - \nu^0 \frac{\sigma_{33}^0}{E^0}$$

или

$$\alpha_1\Delta T = \alpha^0\Delta T - \nu^0(\alpha_3 - \alpha^0)\Delta T.$$

В результате будем иметь

$$\alpha^0 = \frac{\alpha_1 + \nu^0\alpha_3}{1 + \nu^0}.$$

Производя аналогичные выкладки для характеристик формоизменения основного материала в условиях радиационных воздействий, получим

$$\beta^0 = \frac{\beta_1 + \nu^0\beta_3}{1 + \nu^0},$$

где  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\beta_3$  – деформации радиационного формоизменения исходного материала в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Величину коэффициента поперечной деформации  $\nu^0$  основного материала можно найти из условия равенства поперечных деформаций исходного и основного материалов:

$$\nu^0 = \nu_1,$$

где  $\nu_1$  – коэффициент Пуассона исходного материала в поперечном направлении.

Будем также предполагать, что модуль сдвига основного материала  $G^0$  равняется

модулю сдвига  $G_1$  исходного материала в поперечном направлении, тогда модуль нормальной упругости  $E^0$  основного материала можно выразить через механические характеристики исходного материала:

$$E^0 = 2G_1(1 + \nu_1).$$

При этом модуль нормальной упругости материала волокон  $E^v$  может быть получен в виде:

$$E^v = E_3 - 2G_1(1 + \nu_1),$$

где  $E_3$  – модуль нормальной упругости исходного материала в продольном направлении.

Таким образом, термомеханическое поведение трансверсально-изотропных материалов можно представить как результат совместного деформирования двух изотропных материалов – основного материала и материала волокон, воспринимающего лишь осевые усилия в направлении анизотропии, – свойства которых могут быть однозначно определены на основе известных свойств исходного материала вдоль и поперек волокон.

Численная реализация предлагаемой модели осуществляется путем дискретизации конструкции по МКЭ. В этом случае поведение деформируемой системы на шаге нагружения описывается системой разрешающих уравнений, которую можно представить в виде следующего операторного уравнения:

$$H\Delta U - \Delta R = 0,$$

где  $H = H(t)$  – линейный оператор, определяемый модулями упругости материала при температуре и уровне нейтронного облучения, характеризуемыми текущим значением параметра нагружения  $t = \hat{t}$ ;  $\Delta U$  – функция изменения перемещений точек конструкции для текущего шага нагружения;  $\Delta R$  – функция нагрузки, включающая в себя постоянную  $\Delta R^1$  и переменную  $\Delta R'$  составляющие на шаге:  $\Delta R = \Delta R^1 + \Delta R'$ .

Постоянная составляющая  $\Delta R^1 = \Delta R^1(t)$  определяется совокупностью внешних воздействий на конструкцию в виде объемных и поверхностных сил, температур, граничных смещений и их изменений на шаге нагружения. Переменная часть  $\Delta R' = \Delta R'(U, t)$  включает в себя нелинейные члены, зависящие от решения задачи, и определяется текущими значениями дополнительных деформаций  $\Delta d_{ij}$ . Для рассматриваемой структурно-феноменологической модели материала величина  $\Delta d_{33}$  будет вычисляться как сумма дополнительных деформаций  $\Delta d_{33}^0$  основного материала сплошной среды и  $\Delta d^v$  материала волокон, то есть  $\Delta d_{33} = \Delta d_{33}^0 + \Delta d^v$ , для остальных компонент  $\Delta d_{ij} = \Delta d_{ij}^0$ .

При решении задач на шаге нагружения оператор  $H$  и вектор  $\Delta R^1$  формируются в начале шага и не меняются в процессе последовательных приближений. При этом решение задачи представляется в виде:

$$U = U^1 + u,$$

где  $U^1 = U^{-1}\Delta R^1$  соответствует решению задачи в линейном приближении,  $u$  – нелинейная часть вектора решения, зависящая от вектора  $\Delta R'$ . Таким образом, согласно принятой схеме линеаризации, решение нелинейной задачи на шаге нагружения сводится к однократному нахождению вектора линейной части решения  $U^1$  и по-

следовательному уточнению нелинейного вектора  $u$  в процессе последовательных приближений из уравнения

$$u = H^{-1} \Delta R(U).$$

Оператор  $H$  в случае решения задачи методом конечных элементов является матрицей жесткости конструкции, которая формируется на основе матриц жесткостей отдельных конечных элементов. При этом для рассматриваемой структурно-феноменологической модели необходимо модифицировать матрицу коэффициентов упругости материала с учетом влияния анизотропии. В данном случае эта матрица будет представлять собой матрицу коэффициентов упругости изотропного основного материала с дополнительным слагаемым, учитывающим влияние дополнительной жесткости волокон в направлении анизотропии.

Перечисленные методические положения реализованы в виде набора программных средств исследования процессов упруговязкопластического деформирования изделий, выполненных из трансверсально-изотропных материалов при термосиловых и радиационных воздействиях в составе вычислительного комплекса УПАКС [3]. Для иллюстрации работоспособности предложенных моделей, алгоритмов и созданных на их основе программных средств ниже приводятся результаты решения ряда тестовых задач.

В первой задаче иллюстрируется работоспособность предлагаемой методики при описании эффектов анизотропии на примере расчета изгиба упругой консольной балки. Один торец балки зашпелен, на другом приложена вертикальная сила  $P$  в виде касательных напряжений, распределенных по кусочно-линейному закону. Схема нагружения и размеры балки показаны на рис. 1

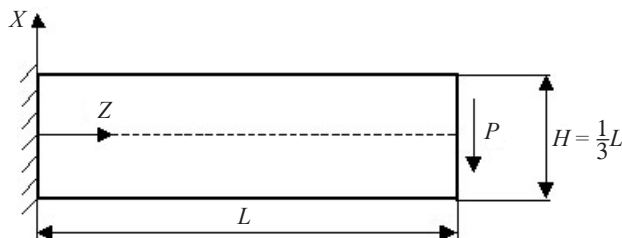


Рис. 1

Численное решение задачи строилось для балки, имеющей размеры  $L = 3$  см,  $H = 1$  см, выполненной из материала со следующими характеристиками: модуль Юнга  $E_x = E_y = 2500$  МПа,  $E_z = 3250$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu_x = \nu_y = \nu_z = 0,3$ . Величина нагрузки  $P = 1$  МПа. При конечно-элементной дискретизации балки вдоль оси  $Z$  бралось 6 элементов, вдоль оси  $X$  – 2 элемента. Величина прогиба балки  $u_x$  в точке  $X = 0, Z = L$ , полученная по предлагаемой методике, сравнивалась с решением этой задачи, полученным с помощью программного комплекса ANSYS. В том и другом случае прогиб составил  $-0,0185$  см, то есть наблюдалось полное совпадение получаемых результатов до четырех значащих цифр.

В следующей задаче рассмотрено деформирование фрагмента графитового блока кладки реактора при действии температурного поля, распределенного по объему блока по заданному закону. Блок представляет собой прямоугольный параллелепипед высотой  $h = 600$  мм, имеющий квадратное поперечное сечение размером  $200 \times 200$  мм<sup>2</sup> и сквозное круглое отверстие диаметром 66 мм. В поперечном направ-

лении центр отверстия смещен на величину  $\delta = 10$  мм. Температурное поле в блоке постоянно вдоль оси  $Z$  и меняется в поперечном направлении в зависимости от радиуса, отсчитываемого от оси отверстия согласно зависимости, приведенной на рис. 2.

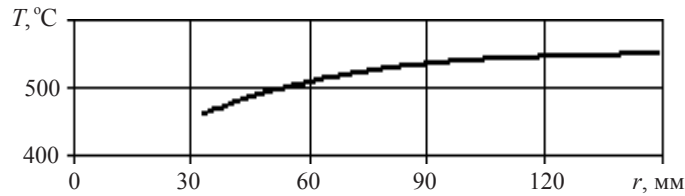


Рис. 2

Упругие характеристики материала те же самые, что и в предыдущей задаче. Значения коэффициентов температурного расширения принимались следующими:  $\alpha_x = \alpha_y = 5,4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_z = 4,0 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ . Дискретизация фрагмента блока осуществлялась с использованием пространственных 20-узловых конечных элементов. Геометрия и конечно-элементная сетка для симметричной четверти фрагмента блока изображены на рис. 3.

При решении задачи были получены значения полей перемещений, деформаций и напряжений в блоке. В табл. 1 представлены значения перемещений в точке  $A$  в мм, определенные по предлагаемой методике и с помощью программного комплекса ANSYS. Так же, как и в предыдущей задаче, можно отметить практически полное совпадение получаемых результатов.

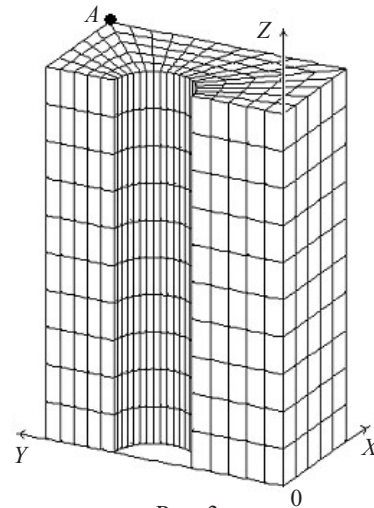


Рис. 3

Таблица 1

Перемещение	Предлагаемая методика	ANSYS
$U_x$	0,277	0,277
$U_y$	0,551	0,552
$U_z$	0,619	0,619
$ U $	0,862	0,862

Далее рассмотрим результаты решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния показанного выше блока при дополнительном действии нейтронного облучения, величина которого достигает величины  $2,18 \cdot 10^{22}$  н/см<sup>2</sup> на внутренней поверхности и монотонно убывает по направлению к внешней поверхности. В расчетах учитывалась зависимость модулей упругости и коэффициента линейного температурного расширения от уровня нейтронного облучения, эффекты радиационного формоизменения и радиационной ползучести. На рис. 4 представлена деформированная конфигурация конструкции на фоне исходной с масштабом перемещений 5:1.

В табл. 2 приведены значения перемещений в точке  $A$  в мм, полученные по предлагаемой методике и с использованием допущения об изотропии механических

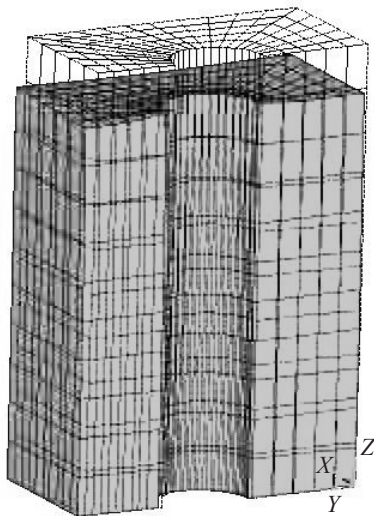


Рис. 4

характеристик материала графита, которые принимались как среднее арифметическое между значениями в продольном и поперечном направлениях.

Видно существенное различие в полученных результатах, что объясняется значительной разницей деформаций радиационного формоизменения материала графита в продольном и поперечном направлениях при высоких значениях флюенса.

Результаты решения рассмотренных задач показывают, что разработанная структурно-феноменологическая модель материала и реализованные на ее основе программные средства позволяют проводить исследование процессов деформирования конструкций, выполненных из трансверсально-изотропных материалов.

Таблица 2

Перемещение	Изотропный вариант	Анизотропный вариант
$U_x$	-0,884	0,441
$U_y$	-1,881	1,129
$U_z$	-3,008	-6,817

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-08-00360-а) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

#### Литература

1. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния изделий из графита при терморadiационных воздействиях / В.А. Горохов, С.А. Капустин, Ю.А. Чурилов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб. / Н. Новгород. – 2004. – Вып. 66. – С. 51–61.
2. Численное моделирование процессов деформирования изделий из нержавеющей стали в условиях терморadiационных воздействий / В.А. Горохов, С.А. Капустин, Ю.А. Чурилов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб. / Н. Новгород. – 2005. – Вып. 67. – С. 26–36.
3. Вычислительный комплекс УПАКС. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 147 от 31.10.2002.

[15.08.2006]

### NUMERICALLY MODELING THE BEHAVIOUR OF STRUCTURES MADE OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC MATERIALS UNDER QUASI-STATIC STRESS LOADING AND A THERMAL-RADIATIONAL EFFECT

S.A. Kapustin, V.A. Gorokhov, Yu.A. Churilov, Yu.G. Slepnev

A numerical method for analyzing the stressed-strained state of structures made of transversally isotropic materials under quasi-static stress loading and a thermal-radiational effect is described. A model is introduced that describes the elastic-viscoplastic behaviour of such materials, as well as algorithms for implementing it in problems of FE structural analysis. The results of numerically analyzing the stressed-strained state of a structure made of graphite exhibiting the properties of a transversally isotropic material under a thermal-radiational effect are presented.