

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-359-368

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ
НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ***

© 2019 г.

Фирсанов В.В., Фам В.Т.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

k906@mai.ru, pvthien88@gmail.com

Поступила в редакцию 07.07.2019

Исследуется напряженное состояние изотропной сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории. При построении математической модели оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости. Перемещения представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа – Лява. В результате минимизации уточненного значения энергетического функционала Лагранжа получены система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и естественные граничные условия. Задача приведения двумерных уравнений к обыкновенным дифференциальным осуществляется путем разложения компонент перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате.

Решение сформулированной краевой задачи проводится методами конечных разностей и матричной прогонки. В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Деформации оболочки находятся с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения получаются из соотношений закона Гука. Поперечные напряжения определяются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Приведен пример расчета полусферической оболочки, жестко защемленной по нижнему контуру основания. Оболочка находится под действием ветровой нагрузки. Сравнение результатов, полученных по уточненной теории, с данными классической теории показало, что в зоне искажения напряженного состояния нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются и поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения.

Рассмотрено влияние относительной толщины на напряженное состояние оболочки. Установлено, что толщина оболочки существенно увеличивает

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849).

погрешность классической теории при определении напряжений и оценке прочности элементов авиационных конструкций.

Ключевые слова: сферическая оболочка, вариационный принцип Лагранжа, уточненная математическая модель, уравнения равновесия и естественные граничные условия, тригонометрические ряды, краевая задача, метод конечных разностей, метод матричной прогонки, произвольная нагрузка, напряженно-деформированное состояние «погранслоя», поперечные нормальные напряжения.

Введение

В настоящее время инженерные расчеты сферических оболочек в машиностроении, в том числе в авиационной и ракетно-космической отрасли, базируются на результатах классической теории оболочек типа Кирхгофа – Лява [1–4]. На основе гипотез этой теории нормальные сдвиговые деформации приравниваются нулю, а касательными сдвиговыми деформациями пренебрегают из-за их малости.

Результаты расчета напряженно-деформируемого состояния (НДС) оболочек вблизи зон его искажения, то есть соединений, стыков, локальных и быстро изменяющихся нагрузок, по классической теории не дают удовлетворительного соответствия с практическими результатами. При построении приближенной теории оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа – Лява, получил распространение метод прямого асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости [2, 5]. Асимптотические методы нашли успешное применение в исследованиях Л.А. Агаловяна [6, 7], В.В. Болотина [8], К. Фридрихса [9], Э. Рейсснера [10].

В статьях [11, 12] задача о дополнительном НДС вблизи защемленного края по отношению к классической теории была решена В.В. Фирсановым в вариационной постановке методом Власова – Канторовича с помощью специально построенной полиномиальной аппроксимирующей функции. При рассмотрении примера расчета прямоугольной ортотропной пластинки установлено, что дополнительное самоуравновешенное НДС вблизи защемленного края, уточняющее классическую теорию, вносит существенный вклад в общее напряженное состояние.

С помощью методов простых итераций и асимптотического интегрирования Е.М. Зверевым [13–15] была решена проблема построения моделей типа Тимошенко для статических и динамических задач теории балок, пластин и оболочек. При этом асимптотические оценки, сопровождающие простые итерации, дают возможность отбросить второстепенные члены, оценить скорость сходимости итерационного процесса, доказать асимптотическую сходимость и получить простые модели задач.

Другой подход, предложенный в статьях В.В. Васильева и С.А. Лурье [16, 17], основан на представлении перемещения в виде полиномиальных рядов по нормальной координате и связывает между собой количество слагаемых в этих разложениях по тангенциальным и поперечному направлениям. На основе этого подхода в публикациях [18–20] построена уточненная теория расчета НДС на случай произвольных ортотропных оболочек, оболочек переменной толщины, а также задач о свободных колебаниях.

В настоящей статье в рамках указанного подхода [18–20] исследуется НДС сферической оболочки под действием произвольной нагрузки, а также влияние относительной толщины на напряженное состояние оболочки.

1. Уравнения равновесия теории сферической оболочки в перемещениях на основе неклассической теории

Рассматривается сферическая оболочка из изотропного материала в ортогональной системе координат (θ, φ, ξ) (рис. 1). Обозначим через R характерный радиус оболочки, а через $2h$ – ее постоянную толщину.

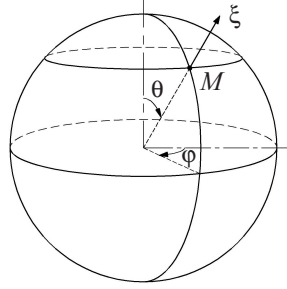


Рис. 1. Сферическая оболочка

Принимается, что на лицевых поверхностях оболочки $\xi = \pm h$ заданы граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\pm h) = q_{i3}^{\pm}(\theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

В соответствии с [18] будем предполагать, что искомые упругие перемещения U_1, U_2, U_3 имеют асимптотические представления вида:

$$\begin{aligned} U_1(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_2(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 v_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_3(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^2 w_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \end{aligned} \quad (2)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют координатам θ, φ и ξ . Разложение (2) повышает на два порядка степень полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной координате, по сравнению с классической теорией.

Подставляя геометрические уравнения и разложения (2) в условие минимума функционала Лагранжа, получим систему уравнений равновесия теории сферических оболочек в перемещениях:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_2^{v_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) v_k + \\ + \sum_{n=0}^2 Ki_1^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \theta} = Ki^{q_{13}^+} q_{13}^+ - Ki^{q_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1, 4}, \\ \sum_{m=0}^3 \left(Ki_2^{u_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_0^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\ + \sum_{n=0}^2 Ki_2^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = Ki^{q_{23}^+} q_{23}^+ - Ki^{q_{23}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 Ki_2^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n = Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 10, 11}, \quad (3)$$

с граничными условиями на жестко защемленном краю оболочки следующего вида:

$$u_m = 0, \quad (m = \overline{0, 3}); \quad v_k = 0, \quad (k = \overline{0, 3}); \quad w_n = 0, \quad (n = \overline{0, 2}) \quad \text{при } \theta = \pm \theta_0. \quad (4)$$

В уравнениях (3) величинами Ki с индексами обозначены переменные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и угла θ ; а u_m, v_k, w_n – коэффициенты разложений искомым перемещений в выражениях (2).

2. Решение краевой задачи конечно-разностным методом

Приведем систему двумерных уравнений (3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов. С этой целью представим внешние нагрузки и перемещения тригонометрическими рядами вида:

$$\begin{aligned} q_{13}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)13}^{\pm}(\theta) \cos z\varphi, \\ q_{23}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)23}^{\pm}(\theta) \sin z\varphi, \\ q_{33}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)33}^{\pm}(\theta) \cos z\varphi; \\ u_m(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(\theta) \cos z\varphi, \quad m = \overline{0, 3}, \\ v_k(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(\theta) \sin z\varphi, \quad k = \overline{0, 3}, \\ w_n(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(\theta) \cos z\varphi, \quad n = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в систему (3) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} - z^2 Ki_{22}^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left(Ki_2^{v_k} + Ki_{12}^{v_k} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) V_{kz} + \\ + \sum_{n=0}^2 Ki_1^{w_n} \frac{\partial W_{nz}}{\partial \theta} = Ki^{q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - Ki^{q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4}, \\ z \sum_{m=0}^3 \left(-Ki_2^{u_m} - Ki_{12}^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_0^{v_k} - z^2 Ki_{22}^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) V_{kz} - \\ - z \sum_{n=0}^2 Ki_2^{w_n} W_{nz} = Ki^{q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - Ki^{q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 Ki_2^{v_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} - z^2 Ki_{22}^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) W_{nz} = Ki^{q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - Ki^{q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Далее, применяя конечно-разностный метод и аппроксимируя производные 1-го и 2-го порядков уравнений (6) центральными разностями второго порядка точности, с учетом граничных условий (4) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + Ki_0^{u_m} - z^2 Ki_{22}^{u_m} \right) U_{mz}^j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{-zKi_{12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zKi_2^{v_k} V_{kz}^j + \frac{zKi_{12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-Ki_1^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = Ki^{q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - Ki^{q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4}, \\ & \sum_{m=0}^3 \left(\frac{zKi_{12}^{u_m}}{s^2} U_{mz}^{j-1} - zKi_2^{u_m} U_{mz}^j - \frac{zKi_{12}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{v_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{-2Ki_{11}^{v_m}}{s^2} + Ki_0^{v_m} - z^2 Ki_{22}^{v_m} \right) V_{kz}^j + \left(\frac{Ki_{11}^{v_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\ & - \sum_{n=0}^2 zKi_2^{w_n} W_{nz}^j = Ki^{q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - Ki^{q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \quad (7) \\ & \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-Ki_1^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + Ki_0^{u_m} U_{mz}^j + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 zKi_2^{v_m} V_{kz}^j + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} - \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + Ki_0^{w_n} - z^2 Ki_{22}^{w_n} \right) W_{nz}^j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = Ki^{q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - Ki^{q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \\ & j = \overline{1, N-1}, \quad z = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$U_{mz}^0 = U_{mz}^N = V_{kz}^0 = V_{kz}^N = W_{nz}^0 = W_{nz}^N = 0, \quad m = \overline{0, 3}, \quad k = \overline{0, 3}, \quad n = \overline{0, 2},$$

где s – шаг конечно-разностной схемы, $(N+1)$ – число узлов.

Коэффициенты системы уравнений (7) можно представить в виде матрицы одиннадцатого порядка и решить ее методом матричной прогонки.

В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Деформации в различных точках оболочки находятся с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются

из соотношений закона Гука. Поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

3. Пример расчета

В качестве примера расчета рассматривается полусферическая оболочка, жестко защемленная по нижнему контуру основания, со следующими параметрами: радиус $R = 0,8$ м, относительная полутолщина $h/R = 1/100$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Оболочка находится под действием ветровой нагрузки (рис. 2):

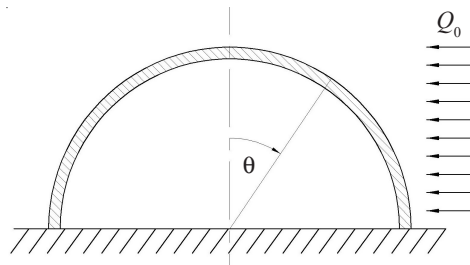


Рис. 2. Полусферическая оболочка под действием ветровой нагрузки

В этом случае $q_{33}^+(\theta, \varphi) = Q_0 \sin \theta \cos \varphi$, $q_{13}^{\pm} = q_{23}^{\pm} = q_{33}^- = 0$, $z = 1$. На рис. 3–6 показаны результаты расчета в сечении $\varphi = 0$. На рисунках индекс «кл» соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализ полученных результатов (рис. 3–6) показывает, что при удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов. Напряжения в краевой зоне существенно увеличиваются: нормальные меридиональные напряжения σ_{11} – на 23% (см. рис. 4) и окружные σ_{22} – на 25% (см. рис. 5). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 44% и максимальное касательное напряжение σ_{13} – 20% от основного изгибного напряжения σ_{11} (см. рис. 3).

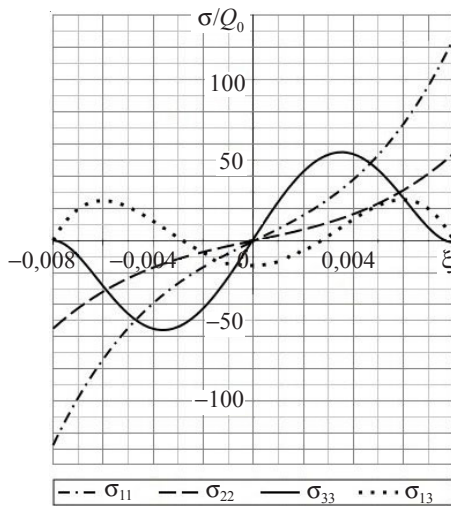


Рис. 3. Изменение напряжений по толщине на краю $\theta = \pi/2$

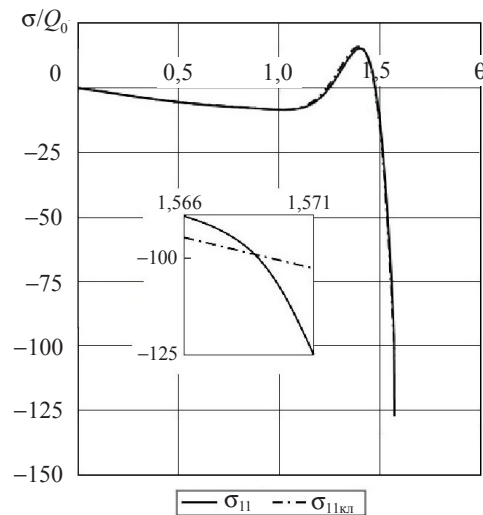


Рис. 4. Изменение σ_{11} по углу θ

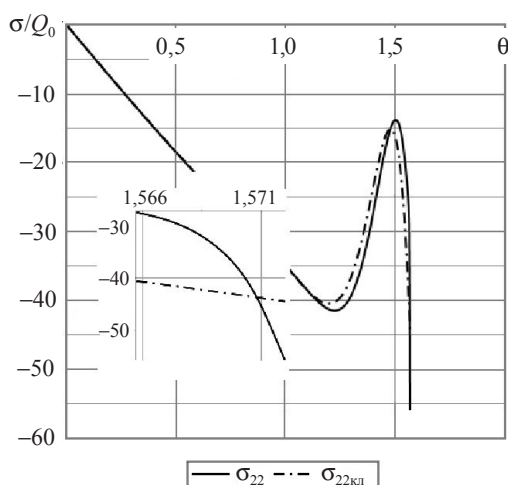


Рис. 5. Изменение σ_{22} по углу θ

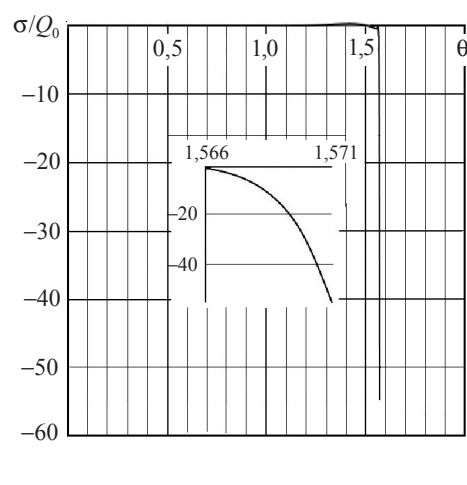


Рис. 6. Изменение σ_{33} по углу θ

В таблице 1 приведены результаты расчета максимальных напряжений при различных значениях относительной толщины. В таблице обозначено: Кл – классическая теория оболочек, Утч – уточненная теория.

Таблица 1

h/R		σ_{11}/Q_0	σ_{22}/Q_0	σ_{33}/Q_0	σ_{13}/Q_0
0,005	Кл	201,73	86,46	0	0
	Утч	238,59	103,47	113,92	41,7
0,008	Кл	128,21	54,95	0	0
	Утч	156,08	67,33	70,06	29,87
0,01	Кл	103,44	44,29	0	0
	Утч	127,57	54,83	55,82	25,3
0,02	Кл	52,85	22,65	0	0
	Утч	68	29,18	28	15,02
0,04	Кл	26,9	11,53	0	0
	Утч	36,35	15,59	14,45	8,91
0,06	Кл	21,59	9,26	0	0
	Утч	29,73	12,74	11,75	7,56

Из анализа данных таблицы 1 видно, что при изменении относительной толщины оболочки в пределах от 0,005 до 0,06 погрешность классической теории по напряжениям составляет: для σ_{11} – 19–38%, для σ_{22} – 19–38%, для σ_{33} – 40–48%, для σ_{13} – 18–25% от основного изгибного напряжения σ_{11} .

Заключение

На основании уточненной теории построена краевая задача сферической оболочки под действием произвольной нагрузки.

Приведены результаты расчетов напряженного состояния сферической оболочки под действием ветровой нагрузки и сравнение НДС оболочки по классической и уточненной теориям. Установлено, что в зоне искажения напряженного состояния

нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются. Дополнительные по отношению к классической теории поперечные нормальные напряжения оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения.

Толщина оболочки существенно влияет на погрешность классической теории при определении напряжений.

Список литературы

1. Власов В.З. *Избранные труды. Общая теория оболочек*. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
2. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *ПММ*. 1963. Т. 27. №4. С. 593–608.
6. Агаловян Л.А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек*. М.: Наука, 1997. 414 с.
7. Агаловян Л.А. Применение метода асимптотического интегрирования к построению приближенной теории анизотропных оболочек. *ПММ*. 1966. Т. 30. №2. С. 388–398.
8. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. *Известия АН СССР. Инженерный сборник*. 1961. Т. 31. С. 3–14.
9. Friedrichs K.O. Kirchoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. N.Y. Amer. Math. Soc. P. 117–124.
10. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12. No 2. P. A66–A77.
11. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2002. Т. 8. №1. С. 28–64.
12. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 5. No 6. P. 515–522.
13. Зверьяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений в теории тонких упругих оболочек. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1997. Т. 3. №2. С. 3–19.
14. Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *ПММ*. 2008. Т. 72. №2. С. 308–321.
15. Зверьяев Е.М. Непротиворечивая теория тонких упругих оболочек. *ПММ*. 2016. Т. 80. №5. С. 580–596.
16. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1990. №2. С. 158–167.
17. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. *Изв. АН. МТТ*. 1990. №6. С. 139–146.
18. Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии. *Вестник МАИ*. 2011. Т. 18. №1. С. 194–207.
19. Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н., Хиёу Л.Ч. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины. *Вестник МАИ*. 2013. Т. 20. №4. С. 198–211.
20. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2015. Vol. 6. Iss. 2. P. 135–166.

References

1. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. Obshchaya teoriya obolochek* [Selected Works. General Theory of Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1962. 528 p. (In Russian).
2. Gol'denveyzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 512 p. (In Russian).
3. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1962. 432 p. (In Russian).
4. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 636 p. (In Russian).
5. Gol'denveyzer A.L. Postroenie priblizhennoy teorii obolochek pri pomoshchi asimptoticheskogo integrirvaniya uravneniy teorii uprugosti [Construction of an approximate theory of shells using asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1963. Vol. 27. No 6. P. 593–608 (In Russian).
6. Agalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1997. 414 p. (In Russian).
7. Agalovyan L.A. Primenenie metoda asimptoticheskogo integrirvaniya k postroeniyu priblizhennoy teorii anizotropnykh obolochek [Application of the method of asymptotic integration to the construction of an approximate theory of anisotropic shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. Appl. Math. Mech.]. 1966. Vol. 30. No 2. P. 388–398 (In Russian).
8. Bolotin V.V. Dinamicheskiy kraevoy effekt pri uprugikh kolebaniyakh plastinok [Dynamic edge effect with elastic vibrations of plates]. *Inzhenernyy sbornik Akademii nauk SSSR* [Engineering Review]. 1961. Vol. 31. P. 3–14 (In Russian).
9. Friedrichs K.O. Kirchoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Proc. Sym. in Appl. Math.* 1950. Vol. 3. N.Y. Amer. Math. Soc. P. 117–124.
10. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* 1945. Vol. 12. No 2. P. A66–A77.
11. Firsanov V.V. Ob utochnenii klassicheskoy teorii pryamougol'nykh plastinok iz kompozitsionnykh materialov [On the refinement of the classical theory of rectangular plates made of composite materials]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 2002. Vol. 8. No 1. P. 28–64 (In Russian).
12. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 5. No 6. P. 515–522.
13. Zveryaev E.M. Dekompozitsionnye svoystva printsipa szhatykh otobrazheniy v teorii tonkikh uprugikh obolochek [Decomposition properties of the principle of compressed mappings in the theory of thin elastic shells]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 1997. Vol. 3. No 2. P. 3–19 (In Russian).
14. Zveryaev E.M., Makarov G.I. Obshchiy metod postroeniya teoriy tipa Timoshenko [General method of construction of Timoshenko-type theories]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. Appl. Math. Mech.]. 2008. Vol. 72. No 2. P. 308–321 (In Russian).
15. Zveryaev E.M. Neprotivorechivaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek [A consistent theory of thin elastic shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. Appl. Math. Mech.]. 2016. Vol. 80. No 5. P. 580–596 (In Russian).
16. Vasil'yev V.V., Lur'ye S.A. K probleme postroeniya neklassicheskoy teorii plastin [To the problem of building a non-classical theory of plates]. *Izvestiya RAN, Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1990. No 2. P. 158–167 (In Russian).
17. Vasil'yev V.V., Lur'ye S.A. K probleme utochneniya teorii pologikh obolochek [To the problem of clarifying the theory of shallow shells]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1990. No 6. P. 139–146 (In Russian).
18. Firsanov Val. V., Doan Ch.N. Energeticheski soglasovanny podkhod k issledovaniyu uprugikh obolochek proizvolnoy geometrii [Energetically consistent approach to the study of elastic shells of arbitrary geometry]. *Vestnik MAI* [Aerospace MAI Journal]. 2011. Vol. 18. No 1. P. 194–207 (In Russian).
19. Firsanov Val. V., Doan Ch.N., Khieu L.Ch. Utochnennaya teoriya rascheta napryazhenno-

deformirovannogo sostoyaniya tsilindricheskoy obolochki peremennoy tolshchiny [Refined theory of calculating the stress-strain state of a cylindrical shell of variable thickness]. *Vestnik MAI [Aerospace MAI Journal]*, 2013. Vol. 20. No 4. P. 198–211 (In Russian).

20. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2015. Vol. 6. Iss. 2. P. 135–166.

STRESS-STRAIN STATE OF THE SPHERICAL SHELL EXPOSED TO AN ARBITRARY LOAD BASED ON A NON-CLASSICAL THEORY

Firsanov V.V., Pham V.T.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Considered is the stress state of an isotropic spherical shell exposed to an arbitrary load based on a non-classical theory. When building a mathematical model of the shell, three-dimensional equations of the theory of elasticity are applied. Displacements are represented in the form of polynomials along the coordinate normal to the middle surface two degrees higher relative to the classical theory of the Kirchhoff-Love type. As a result of minimization of the refined value of the Lagrange energy functional, a system of differential equilibrium equations in displacements and natural boundary conditions are obtained. The task of reducing two-dimensional equations to ordinary differential equations is carried out by decomposing the components of displacements and external loads into trigonometric series in the circumferential coordinate. Displacements are represented in form of polynomials along the coordinate normal to the middle surface by two degrees higher relative to the classical theory of the Kirchhoff-Love type. Resulting from minimization of the refined value of the Lagrange energy functional, a system of differential equilibrium equations in displacements and natural boundary conditions are received. The task of reducing two-dimensional equations to ordinary differential equations is carried out by decomposing the components of the displacements and the external loads into trigonometric series as per the circumferential coordinate. The formulated boundary problem is solved by the methods of finite differences and matrix sweep. As a result, displacements are obtained in the grid nodes, for approximation of which splines are used. The shell deformations are found using geometric relationship; tangential stresses are received from the correlations of Hooke's law. One of the features of this paper lies in the fact that the transverse stresses are determined by the direct integration of the equilibrium equations of the three-dimensional theory of elasticity.

An example of the calculation of a hemispherical shell rigidly restrained along the lower base contour is brought. The shell is exposed to the wind load. Comparison of the results received by the refined theory with the data of the classical theory has shown that in the zone of distortion of the stressed state, the normal tangential stresses are substantially revised and the transverse normal stresses, which are neglected in the classical theory, are of the same magnitude with the maximum values of the main bending stress.

Considered is the influence of the relative thickness on the stress state of the shell. It was discovered that the shell thickness significantly increases the error of the classical theory, while determining the stresses and assessing the strength of the elements of the aircraft structures.

Keywords: spherical shell, Lagrange variational principle, refined mathematical model, equilibrium equations, natural boundary conditions, trigonometric series, boundary value problem, finite difference method, matrix run method, arbitrary load, stress-strain state “boundary layer”, transverse normal stresses.