

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-333-344

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ
ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА,
ОПИСЫВАЕМОГО УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛЬЮ КОССЕРА***

© 2019 г.

Антонов А.М.¹, Ерофеев В.И.^{1,2}

¹*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.05.2019

Рассматривается упрощенная (редуцированная) динамическая модель среды Коссера, занимающая промежуточное положение между классической динамической теорией упругости и собственно моделью среды Коссера, обладающей несимметричностью тензора напряжений и наличием моментных напряжений. В отличие от последней, в упрощенной модели три из шести констант упругости равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений.

В двумерной постановке для модели редуцированной среды решена задача о распространении упругой поверхностной волны вдоль границы полупространства. Решение уравнений находилось в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, причем у векторного потенциала отлична от нуля только одна компонента.

Показано, что такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией. В плоскости «фазовая скорость–частота» для таких волн имеются две дисперсионные ветки: нижняя (акустическая) и верхняя (оптическая). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость объемной сдвиговой волны.

Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

Ключевые слова: среда Коссера, редуцированная модель, полупространство, поверхностная волна Рэлея, фазовая скорость, дисперсия.

* Выполнено при финансовой поддержке грантом Правительства Российской Федерации (договор №14.Y26.31.0031).

1. Континуум Коссера. Общая и упрощенные модели

Выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды было опубликование в 1909 году книги французских исследователей братьев Эжена и Франсуа Коссера «Теория деформируемых тел» [1], заложившей основы механики обобщенных континуумов. На русском языке эта теория опубликована в книге [2]. Комментарии можно найти в [3, 4].

Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы (ротационными, осцилляторными) или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Уравнения динамики континуума Коссера имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} - 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\theta} &= 0, \\ I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial t^2} - (\beta + 2\gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\theta} + (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\theta} - 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} + 4\alpha \boldsymbol{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещения; $\boldsymbol{\theta}$ – вектор поворота; ρ – плотность среды; I – константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема; λ, μ – постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – новые упругие постоянные микрополярного материала, удовлетворяющие ограничениям [6]:

$$\alpha \geq 0, \quad \gamma + \varepsilon \geq 0, \quad 3\beta + 2\gamma \geq 0, \quad -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq (\gamma + \varepsilon). \quad (2)$$

В [7] найдена зависимость между этими упругими постоянными:

$$\mu(2\gamma + \beta) = (\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon). \quad (3)$$

Наряду с общим случаем рассматривается и упрощенный вариант микрополярной среды (псевдоконтинуум Коссера), в котором предполагается совпадающая с соотношениями классической теории упругости жесткая зависимость вектора по-

ворота от ротора перемещения ($\boldsymbol{\theta} = (1/2)\text{rot } \mathbf{u}$ – стесненное вращение), но при этом сохраняются моментные напряжения и несимметричность тензора напряжений. В такой среде симметричная часть тензора напряжений зависит от симметричного тензора деформаций так же, как в классической теории упругости.

Уравнения динамики псевдоконтинуума Коссера имеют вид [5]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \Delta \mathbf{u} + \frac{I}{4}\text{rot rot } \ddot{\mathbf{u}} = 0. \quad (4)$$

Кроме указанного частного случая, известен и другой частный случай модели среды Коссера – модель редуцированной среды Коссера, для которой три из шести констант упругости, а именно β , γ , ε , равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. Впервые эта модель была предложена в [8] для описания сыпучих материалов.

Для описания редуцированной среды Коссера используется следующая система уравнений динамики [8]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} + (\mu + \alpha)\text{rot rot } \mathbf{u} - 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\theta} &= 0, \\ I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial t^2} - 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} + 4\alpha \boldsymbol{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

которая сводится к одному векторному уравнению в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla*(\nabla*\mathbf{u}) - I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla*(\nabla*\mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla* = \text{rot}. \quad (6)$$

Изучению особенностей распространения объемных волн дилатации и сдвига в средах со свойствами упрощенной модели Коссера посвящены публикации [9–12].

Рассмотрим задачу о распространении упругой поверхностной волны вдоль границы полупространства, описываемого уравнением (6).

2. Дисперсионные зависимости для поверхностной волны

Введем скалярный φ и векторный $\boldsymbol{\psi}$ потенциалы так, чтобы вектор перемещений \mathbf{u} имел вид

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (7)$$

В случае плоской задачи у векторного потенциала будет отличной от нуля только одна компонента. Эту компоненту обозначим через ψ .

Подставим вектор перемещений (7) в (6), получим:

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \nabla* \left[\mu\Delta\psi + I\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) удовлетворяется, если каждое слагаемое из выражений в квадратных скобках равно нулю:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi + G\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Здесь введены обозначения:

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

где c_1 – скорость продольной волны, а c_2 – скорость волны сдвига в классической среде, $G = I/\mu$.

Решение уравнений будем искать в виде гармонических волн, распространяющихся в направлении оси x и имеющих неоднородную структуру по z :

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi(z) \exp(-i(\omega t - kx)), \\ \psi &= \Psi(z) \exp(-i(\omega t - kx)). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя формулы (10) в (9), получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - v_1^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - v_2^2 \Psi = 0, \quad (11)$$

где

$$v_1 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right)^{1/2}, \quad v_2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2(1 - G\omega^2)} \right)^{1/2}.$$

Из решений уравнений (11) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной:

$$\Phi = A \exp(-v_1 z), \quad \Psi = B \exp(-v_2 z). \quad (12)$$

Принятый здесь постулат об угасании волн с глубиной влечет за собой утверждение, что v_α ($\alpha = 1, 2$) должны быть величинами действительными и положительными, то есть $v_\alpha > 0$.

Окончательное решение уравнений (9) будет иметь вид:

$$\varphi = A \exp(-v_1 z - i(\omega t - kx)), \quad \psi = B \exp(-v_2 z - i(\omega t - kx)). \quad (13)$$

Предполагая, что граница $z = 0$ свободна от напряжений, имеем следующие условия:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Поскольку через перемещения эти компоненты напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + I \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} \right), \quad \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (15)$$

а связь перемещений и потенциалов (см. (7)) задается выражениями

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (16)$$

напряжения через потенциалы запишутся в виде:

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right),$$

$$\sigma_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - I \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} \right). \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражения (13) и используя граничные условия (14), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} [\lambda(v_1^2 - k^2) + 2\mu v_1^2]A - 2\mu i k v_2 B &= 0, \\ 2\mu i k v_1 A + (\mu k^2 + \mu v_2^2 - I v_2^2 \omega^2 + I \omega^2 k^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из условия совместности этой системы получим соотношение

$$[\lambda(v_1^2 - k^2) + 2\mu v_1^2][\mu(k^2 + v_2^2) + I\omega^2(k^2 - v_2^2)] - 4\mu v_1 v_2 k^2 = 0, \quad (19)$$

которое путем введения обозначений

$$\xi = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1 \quad \text{и} \quad \eta = \frac{c^2}{c_2^2}$$

и учета зависимостей

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2, \quad v_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad v_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2(1 - G\omega^2)}$$

преобразуется к виду:

$$\eta \left[\eta^3 - 8\eta^2 + \left(24 - 16 \frac{\xi}{1 - (I/\mu)\omega^2} \right) \eta - 16 \left(2 - \frac{1}{1 - (I/\mu)\omega^2} - \xi \right) \right] = 0. \quad (20)$$

Заметим, что (20) представляет собой дисперсионное уравнение для вычисления фазовой скорости c поверхностной волны Рэлея.

На рис. 1 представлены зависимости квадрата фазовой скорости поверхностной волны $\eta = c_R^2$ от безразмерной частоты $\Omega = \omega\Lambda/c_2$, где Λ – длина волны. Кривые даны в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны c^2 отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2 .

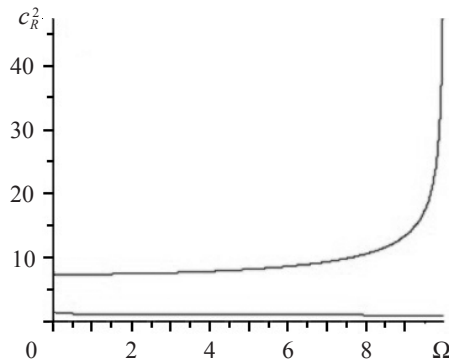


Рис. 1. Частотная зависимость квадрата фазовой скорости поверхностной волны

Из графика видно, что здесь, в отличие от классического случая [13], поверхностная волна Рэлея обладает дисперсией. В плоскости «фазовая скорость–частота» имеются две дисперсионные ветки: нижняя (акустическая) и верхняя (оптическая). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает и при $\Omega \rightarrow \infty$ квадрат скорости поверхностной волны η стре-

мится к 0,7. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Для частот $\Omega > 9$ этот рост становится неограниченным. Следовательно, верхняя дисперсионная ветка описывает волновые процессы в интервале частот $0 < \Omega < 9$, далее процесс перестает быть волновым.

Сравним скорость поверхностной волны и фазовую скорость сдвиговой волны. Плоская сдвиговая волна описывается вторым из уравнений (9) при $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + G \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Его решение будем искать в виде: $\Psi = B \exp i(\omega t - kx)$, что приведет к дисперсионному уравнению

$$-k^2 + Gk^2\omega^2 + \frac{1}{c_2^2}\omega^2 = 0. \quad (22)$$

Из (22) определяются связи между частотой и волновым числом сдвиговой волны

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_2^2}{1 + Gk^2 / c_2^2}$$

и между квадратом фазовой скорости этой волны и волновым числом

$$v_{\text{ф}\tau}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c_2^2}{1 + Gk^2 / c_2^2}.$$

На рис. 2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны c_R^2 (сплошная линия) и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны $v_{\text{ф}\tau}^2$ (штриховая линия) от частоты Ω . Кривые даны в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны классической среды c_2^2 , квадрат фазовой скорости сдвиговой волны $v_{\text{ф}\tau}^2$ также отнесен к c_2^2 .

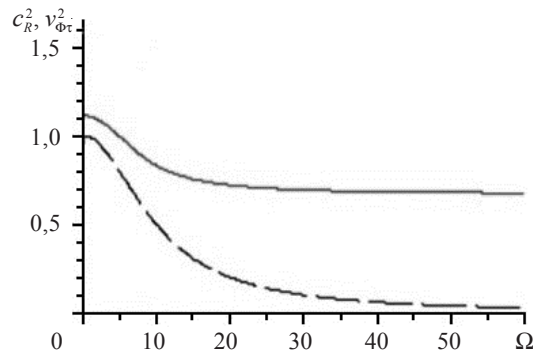


Рис. 2. Частотные зависимости квадрата скорости поверхностной волны и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны

Из графика видно, что фазовая скорость поверхностной волны во всем частотном диапазоне превосходит фазовую скорость сдвиговой волны, которая при $\omega = 0$ равна единице и монотонно стремится к нулю, а $c_R^2 \rightarrow 0,7$ при $\Omega \rightarrow \infty$.

3. Вычисление перемещений

Соотношения (13) и (16) позволяют вычислить перемещения

$$u = (Aik \exp(-v_1 z) + Bv_2 \exp(-v_2 z)) \exp i(kx - \omega t),$$

$$w = (-Av_1 \exp(-v_1 z) + Bik \exp(-v_2 z)) \exp i(kx - \omega t).$$

Постоянную A можно выразить через B , используя второе из уравнений (18):

$$B = -\frac{2iv_1 k \mu}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - Iv_2^2 \omega^2 + Ik^2 \omega^2} \cdot A,$$

тогда

$$u = \left(Aik \exp(-v_1 z) - Av_2 \frac{2iv_1 k \mu}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - Iv_2^2 \omega^2 + Ik^2 \omega^2} \exp(-v_2 z) \right) \exp i(kx - \omega t),$$

$$w = \left(-Av_1 \exp(-v_1 z) + A \frac{2v_1 k^2 \mu}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - Iv_2^2 \omega^2 + Ik^2 \omega^2} \exp(-v_2 z) \right) \exp i(kx - \omega t). \quad (23)$$

Взяв действительную часть от уравнений (23), получим окончательные формулы для перемещений:

$$u = -Ak \left(\exp(-v_1 z) - \frac{2v_1 v_2 \mu}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - Iv_2^2 \omega^2 + Ik^2 \omega^2} \exp(-v_2 z) \right) \sin(kx - \omega t),$$

$$w = -Av_1 \left(\exp(-v_1 z) - \frac{2k^2 \mu}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - Iv_2^2 \omega^2 + Ik^2 \omega^2} \exp(-v_2 z) \right) \cos(kx - \omega t). \quad (24)$$

На рис. 3 представлены зависимости амплитуд смещений U и W в рэлеевской волне от глубины: кривая синего цвета – для нормального перемещения к поверхности в упрощенной модели Коссера, кривая коричневого цвета – для нормального перемещения к поверхности в классической модели, кривая красного цвета – для параллельного перемещения к поверхности в упрощенной модели Коссера, кривая зеленого цвета – для параллельного перемещения к поверхности в классической модели.

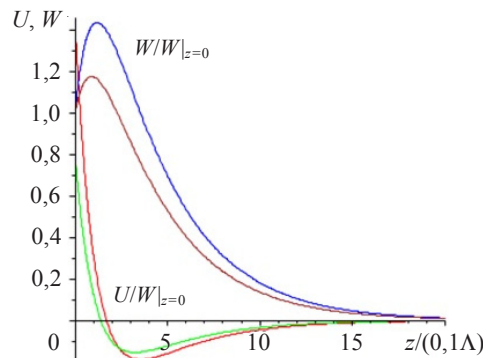


Рис. 3. Зависимости амплитуд смещений в рэлеевской волне от глубины

Расчеты по формулам (24) показывают, что амплитуда перемещения, нормального к поверхности, увеличилась по сравнению с амплитудой перемещения в клас-

сическом случае примерно на 25%. Амплитуда перемещения, параллельного поверхности, увеличилась на 90% и сменила знак на глубине $z = 0,18\lambda$. Из графика видно, что смещение, параллельное поверхности, может превосходить поперечную компоненту в тонком околоповерхностном слое. Траекториями движения частиц при прохождении поверхностной волны, как и в классическом случае, являются эллипсы.

4. Вычисление напряжений

Перемещения (24) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A \left[(\lambda(v_1^2 - k^2) + 2\mu v_1^2) \exp(-v_1 y) + \right. \\ &+ \left. \frac{4v_1 v_2 k^2 \mu^2}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - I v_2^2 \omega^2 + I k^2 \omega^2} \exp(-v_2 y) \right] \cos(kx - \omega t), \\ \sigma_{xz} &= 2A \mu v_1 k [\exp(-v_1 y) - \exp(-v_2 y)] \sin(kx - \omega t), \\ \sigma_{zz} &= A \left[(\lambda(v_1^2 - k^2) + 2\mu v_1^2) \exp(-v_1 y) - \right. \\ &- \left. \frac{4v_1 v_2 k^2 \mu^2}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - I v_2^2 \omega^2 + I k^2 \omega^2} \exp(-v_2 y) \right] \cos(kx - \omega t), \\ \sigma_{zx} &= 2A \mu v_1 k \left[\exp(-v_1 y) - \frac{\mu k^2 + \mu v_2^2 + I v_2^2 \omega^2 - I k^2 \omega^2}{\mu k^2 + \mu v_2^2 - I v_2^2 \omega^2 + I k^2 \omega^2} \exp(-v_2 y) \right] \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (25)$$

На рис. 4 представлены кривые изменения напряжений σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zz} , σ_{zx} в рэлеевской волне в зависимости от глубины полупространства. Видно, что σ_{xx} меняет знак, тогда как σ_{xz} , σ_{zz} , σ_{zx} достигают максимума приблизительно при $z = 1,5$ и затем экспоненциально убывают с глубиной. Также видно, что тензор напряжений в данном случае является несимметричным: напряжение σ_{xz} достигает большего значения, чем σ_{zx} . Нормальные напряжения в рассматриваемом случае уменьшаются с глубиной полупространства аналогично тому, как это происходит с нормальными напряжениями для классической волны Рэлея.

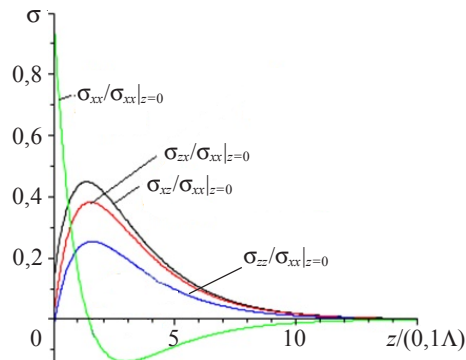


Рис. 4. Зависимости напряжений в рэлеевской волне от глубины

Заключение

Рэлеевские волны ультразвукового диапазона успешно применяются в акустической дефектоскопии. С их помощью можно выявить поверхностные и околоповерхностные дефекты в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов. Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последнее для определения остаточных напряжений поверхностного слоя материала, термических и механических свойств поверхностного слоя образца [14–18]. Проведенное исследование показало, что использование в расчетном сопровождении метода неразрушающего контроля вместо классической модели деформируемого тела обобщенных моделей, в частности модели Коссера, будет способствовать повышению точности метода.

Изучению поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободных границ твердых тел, в рамках других моделей обобщенных континуумов посвящены публикации [19–25].

Список литературы

1. Cosserat E. et F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 226 p.
2. Коссера Э., Коссера Ф. Заметка о теории евклидовского действия. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2013. Т. 5. №1. С. 5–76.
3. Ерофеев В.И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. № 4. С. 5–10.
4. Ерофеев В.И., Герасимов С.И. Континуум Коссера сто лет спустя. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2013. Т. 5. №1. С. 3–4.
5. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. *Волновые процессы в сплошных средах*. Саров: Изд-во РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2012. 260 с.
6. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. *Разрушение*. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–751.
7. Деев В.М. Системный анализ уравнений пространственной задачи несимметричной теории упругости в перемещениях. *Математическое моделирование в естественных науках: Тез. докл. 10-й Всероссийской конференции молодых ученых*. Пермь, 2001. С. 14.
8. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials. *Physical Review Letters*. 1984. Vol. 52. No 10. P. 831–834.
9. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Сдвиговые упругие волны в периодической среде со свойствами упрощенной модели Коссера. *Известия Национальной академии наук Армении. Механика*. 2014. Т. 67. № 4. С. 3–9.
10. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 21. No 1. P. 73–93.
11. Grekova E.F. Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term. *Advanced Structured Materials*. 2018. Vol. 87. P. 143–156.
12. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials. *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 103. P. 253–268.
13. Викторов И.А. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах*. М.: Наука, 1981. 288 с.
14. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. Ультразвуковой контроль. *Неразрушающий контроль: Справочник. В 7 т. Т. 3*. Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
15. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. *Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации*. Ред. Ф.М. Митенков. М.: Наука, 2009. 280 с.
16. Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Никитина Е.А., Родюшкин В.М. Пути повышения

чувствительности метода акустического зондирования при исследовании структуры металла. *Дефектоскопия*. 2018. № 2. С. 11–14.

17. Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Никитина Е.А., Родюшкин В.М. Исследование дефектной структуры металла методом ультразвукового зондирования. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2019. № 1. С. 109–114.

18. Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Никитина Е.А., Пахомов П.А., Родюшкин В.М. Метод ультразвукового зондирования при оценке предельного состояния металлоконструкций, связанного с появлением пластических деформаций. *Физическая мезомеханика*. 2019. Т. 22. №3. С. 65–70.

19. Ерофеев В.И., Шешенина О.А. Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией. *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69. № 1. С. 61–74.

20. Марков М.Г. Распространение волны Рэлея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью. *Акустический журнал*. 2006. Т. 52. № 4. С. 502–508.

21. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Моделирование поверхностных волн на границе порупругого полупространства. *Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 19–24 июня 2010 г.* Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2010. С. 129–133.

22. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н., Петров А.Е. Гранично-элементное исследование поверхностных пористо-упругих волн. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 2. С. 137–144.

23. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2018. № 4. С. 72–85.

24. Antonov A.M., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Generation of perturbations by a focused source driving with constant down speed along the border of the gradient-elastic half-space. *Problems of Strength and Plasticity*. 2018. Vol. 80. No 4. P. 438–445.

25. Чен Ле Тхай, Гарлаковский Д.В. Упругое моментное полупространство под действием осесимметричных нестационарных поверхностных кинематических возмущений. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 1. С. 40–52.

References

1. Cosserat E. et Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 226 p.

2. Cosserat E. et Cosserat F. Note sur la théorie de l'action euclidienne. In P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*. Vol. III. Paris. 1909. P. 557–629.

3. Erofeev V.I. Bratya Kossera i mekhanika obobshchennykh kontinuumov [The Cosserat brothers and generalized continuum mechanics]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2009. Vol. 2. No 4. P. 5–10 (In Russian).

4. Erofeev V.I., Gerasimov S.I. Kontinuum Kossera sto let spustya [Cosserat Continuum a hundred years later]. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnyye tekhnologii* [Radio Electronics. Nanosystems. Information Technology]. 2013. Vol. 5. No 1. P. 3–4 (In Russian).

5. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh* [Wave Processes in Continuous Media]. Sarov. RFNC – VNIIEF Publ. 2012. 260 p. (In Russian).

6. Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity. *Fracture*. Vol. 2. 1968. P. 621–729.

7. Deev V.M. Sistemnyy analiz uravneniy prostranstvennoy zadachi nesimmetrichnoy teorii uprugosti v peremeshcheniyakh [System analysis of the equations of the spatial problem of the asymmetric theory of elasticity in displacements]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh. Tezisy dokladov 10 Vserossiyskoy konferentsii molodykh uchenykh* [Mathematical Modeling in the Natural Sciences. Abstracts of the reports of the 10th All-Russian Conference of Young Scientists]. Perm. 2001. P. 14 (In Russian).

8. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials. *Phys. Rev. Lett*. 1984. Vol. 52. No 10. P. 831–834.

9. Ambartsumyan S.A., Belubekyan M.V., Kazaryan K.B. Sdvigovye uprugie volny v periodicheskoy srede so svoystvami uproshchennoy modeli Kossera [Shear elastic waves in a periodic medium with the Cosserat simplified model properties]. *Izvestiya Natsionalnoy akademii nauk Armenii*.

Mekhanika [Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia: Mechanics]. 2014. Vol. 67. Iss. 4. P. 3–9 (In Russian).

10. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains. *Math. Mech. Solids*. 2016. Vol. 21. No 1. P. 73–93.

11. Grekova E.F. Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term. *Advanced Structured Materials*. 2018. Vol.87. P. 143–156.

12. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials. *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 103. P. 253–268.

13. Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh [Sound Surface Waves in Solids]*. Moscow. Nauka Publ. 1981. 288 p. (In Russian).

14. Ermolov I.N., Lange Yu.V. Ultrazvukovoy kontrol. *Nerazrushayushchiy kontrol. Spravochnik. V 7 t. T. 3 [Non-Destructive Testing. Handbook in 7 vols. Vol. 3. Ultrasonic control]*. Ed. V.V. Klyuev. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2004. 864 p. (In Russian).

15. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskii kontrol oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii [Acoustic Control of Equipment during Manufacture and Operation]*. Ed. F.M. Mitenkov. Moscow. Nauka Publ. 2009. 280 p.

16. Erofeev V.I., Ilyakhinskiy A.V., Nikitina E.A., Rodyushkin V.M. Puti povysheniya chuvstvitelnosti metoda akusticheskogo zondirovaniya pri issledovanii struktury metalla [Means for increasing the sensitivity of acoustic probing when studying the structure of metals]. *Defektoskopiya [Russian Journal of Nondestructive Testing]*. 2018. No 2. P. 11–14 (In Russian).

17. Erofeev V.I., Ilyakhinskiy A.V., Nikitina E.A., Rodyushkin V.M. Issledovanie defektnoy struktury metalla metodom ultrazvukovogo zondirovaniya [Study of the defective structure of metal by the method of ultrasonic sounding]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]*. 2019. No 1. P. 109–114 (In Russian).

18. Erofeev V.I., Ilyakhinskiy A.V., Nikitina E.A., Pakhomov P.A., Rodyushkin V.M. Metod ultrazvukovogo zondirovaniya pri otsenke predelnogo sostoyaniya metallokonstruktsiy, svyazanogo s poyavleniem plasticheskikh deformatsiy [Ultrasonic sensing method for evaluating the limit state of metal structures associated with the onset of plastic deformation]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]*. 2019. Vol. 22. No 3. P. 65–70 (In Russian).

19. Yerofeev V.I., Sheshenina O.A. Waves in a gradient-elastic medium with surface energy. *J. Appl. Math. Mech.* 2005. Vol. 69. Iss. 1. P. 57–69.

20. Markov M.G. Rayleigh wave propagation along the boundary of a non-newtonian fluid-saturated porous medium. *Acoustical Physics*. 2006. Vol. 52. Iss. 4. P. 429–434.

21. Igumnov L.A., Karelin I.S. Modelirovanie poverkhnostnykh voln na granitse porouprugogo poluprostranstva [Modeling of surface waves at the boundary of a poroelastic half-space]. *Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoy sredy. Trudy XIV Mezhdunar. konf. Rostov-na-Donu, 19–24 iyunya 2010 g. [Modern problems of continuum mechanics. Proceedings of the XIV Intern. conf. Rostov-on-Don, June 19–24, 2010]*. Rostov-on-Don. TVVR Publ. 2010. P. 129–133 (In Russian).

22. Igumnov L.A., Karelin I.S., Petrov A.N., Petrov A.E. Granichno-elementnoe issledovanie poverkhnostnykh poristo-uprugikh voln [Boundary-element analysis of surface poroelastic waves]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Vol. 75. Pt 2. P. 137–144 (In Russian).

23. Antonov A.M., Erofeev V.I. Rayleigh wave on the boundary of gradient-elastic semi-space. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2018. Iss. 4. P. 59–72.

24. Antonov A.M., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Generation of perturbations by a focused source driving with constant down speed along the border of the gradient-elastic half-space. *Problems of Strength and Plasticity*. 2018. Vol. 80. No 4. P. 438–445.

25. Tran Le Thai, Tarlakovskii D.V. Uprugoe momentnoe poluprostranstvo pod deystviem osesimmetrichnykh nestatsionarnykh poverkhnostnykh kinematicheskikh vozmushcheniy [Elastic moment half-space under the action of axisymmetric non-stationary surface kinematic perturbations]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 1. P. 40–52 (In Russian).

**DISTRIBUTION OF THE RAYLEIGH WAVE ALONG THE BORDER
OF THE HALF-SPACE, DESCRIBED BY THE SIMPLIFIED MODEL
OF THE COSSERAT**

Antonov A.M.¹, Erofeev V.I.^{1,2}

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch
of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

We consider a simplified (reduced) dynamic model of a Cosserat medium, which occupies an intermediate position between the classical dynamic theory of elasticity and the proper Cosserat medium model, which has asymmetry in the stress tensor and the presence of moment stresses. In contrast to the latter, in the simplified model, three of the six elastic constants are zero and, as a result, there is no moment stress tensor.

In the two-dimensional formulation for the model of a reduced medium, the problem of the propagation of an elastic surface wave along the half-space boundary was solved. The solution of the equations was described as the sum of the scalar and vector potentials, and only one component of the vector potential is nonzero.

It is shown that such a wave, in contrast to the classical surface Rayleigh wave, has a dispersion. In the plane “phase velocity–frequency” for such waves there are two dispersion branches: the lower (acoustic) and upper (optical). With increasing frequency, the phase velocity of the wave related to the lower dispersion branch decreases. The phase velocity of the wave related to the upper dispersion branch increases with increasing frequency. The phase velocity of the surface wave in the entire frequency range exceeds the phase velocity of the bulk shear wave.

The stresses and displacements arising in the zone of propagation of the surface wave are calculated.

Keywords: Cosserat medium, reduced model, half-space, Rayleigh surface wave, phase velocity, dispersion.