

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-324-332

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЦВЕТНОГО ШУМА С УЧЕТОМ
КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С БАЛКОЙ***

© 2019 г.

**Яковлева Т.В.^{1,2}, Баженов В.Г.¹,
Кружилин В.С.², Крысько В.А.²**

¹*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

yan-tan1987@mail.ru

Поступила в редакцию 12.05.2019

Построена математическая модель контактного взаимодействия пластинки, локально подкрепленной по центру балкой, находящейся под действием внешней поперечной нагрузки и внешнего аддитивного цветного шума (розовый, красный, белый). Конструкция находится в стационарном температурном поле, воздействие которого учтено по теории Дюамеля – Неймана путем решения трехмерного (для пластинки) и двумерного (для балки) уравнений теплопроводности методом конечных разностей, теплообмен между пластинкой и балкой не учитывается. Для пластинки принята модель Кирхгофа, для балки – модель Эйлера – Бернулли. Построенная математическая модель учитывает физическую нелинейность упруго деформируемого материала. Для моделирования контактного взаимодействия применена теория Б.Я. Кантора. Система дифференциальных уравнений сведена к задаче Коши методами Бубнова – Галеркина в высших приближениях или конечных разностей по пространственным переменным. Задача Коши решена методами Рунге – Кутты четвертого порядка точности или методом Ньюмарка. На каждом шаге по времени для решения физически нелинейной задачи применена итерационная процедура И.А. Биргера.

Для анализа результатов численного эксперимента использованы методы нелинейной динамики (построение сигналов, фазовых портретов, сечений Пуанкаре, спектров мощности Фурье и вейвлет-спектров Морле, анализ знака показателей Ляпунова методами Вольфа, Канца, Розенштейна). Приведены численные результаты влияния цветного шума на контактное взаимодействие пластинки и балки. Установлено, что красный аддитивный шум оказывает более существенное влияние на характер колебаний пластинчато-балочной конструкции по сравнению с розовым и белым шумами.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект №15-19-10039-П).

Ключевые слова: контактное взаимодействие, пластинка, балка, кинематические модели Кирхгофа и Эйлера – Бернулли, температурное поле, аддитивный цветной шум, физическая нелинейность, метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях, метод Рунге – Кутты, итерационная процедура И.А. Биргера.

Введение

Современные технические устройства состоят из различных элементов, каждый из которых подвержен внешнему динамическому воздействию силового и шумового характера. Этот факт свидетельствует об актуальности и значимости комплексного исследования поведения конструкций и определения их предельных состояний. Для описания случайных во времени воздействий внешней среды на конструкцию часто используется модель цветного шума. Теория индуцированных шумом реакций в области физики, химии и биологии представлена в монографии В. Хорстхемке и Р. Лефевра [1]. В области механики тонкостенных конструкций таких исследований проводилось недостаточно.

Цветовые соответствия для различных видов шумового сигнала определяются по графикам спектральной плотности, то есть через распределение мощности сигнала по частотам. Белым называется стационарный шум, спектральные составляющие которого равномерно распределены по всему диапазону задействованных частот. В электронных и механических устройствах часто присутствует розовый шум (фликкер-шум), спектральная плотность мощности которого обратно пропорциональна частоте. После [1] появились публикации, посвященные шумам, наблюдаемым в природе и технике [2–4]. В основном исследуются шумы, встречающиеся в вакуумных приборах [5], транзисторах и диодах [6–9]. Исследования статистических свойств шумов проводились физическим [10] и математическим [11] моделированием и в натуральных экспериментах [12]. Так же исследуется влияние шумов на механические распределенные конструкции, но без учета тепловых полей [13, 14]. В статьях [15, 16] изучено влияние температурного поля на механические конструкции. Настоящая статья посвящена построению математической модели нелинейных колебаний и контактного взаимодействия пластинчато-балочной конструкции с учетом влияния цветного шума, температурного поля и физической нелинейности.

1. Постановка задачи

Построена математическая модель контактного взаимодействия механической двухслойной конструкции, состоящей из пластинки и балки, с использованием кинематических моделей: для пластинки – модели Кирхгофа, а для балки – модели Эйлера – Бернулли. Механическая конструкция (рис. 1) находится в поле внешнего цветного шума и под действием внешней нормальной распределенной знакопеременной нагрузки, приложенной к пластинке. При этом конструкция находится в стационарном температурном поле.

Связь между напряжениями и деформациями в пластинке ($\beta_1 = 1$) и балке ($\beta_1 = 0$) записана в форме:

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \beta_1 \nu \sigma_2) + \alpha_T \theta, \quad (\overline{1, 2}), \quad \varepsilon_{12}^z = 2\beta_1 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}, \quad (\overline{1, 2}), \quad (1)$$

где модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν являются функциями: $E(x, \beta_1 y, z, \varepsilon_0, \varepsilon_i, \theta)$, $\nu(x, \beta_1 y, z, \varepsilon_0, \varepsilon_i, \theta)$, ε_0 – объемная деформация; ε_i – интенсивность деформации; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; $\theta(x, \beta_1 y, z)$ – приращение температуры (для пластинки $\beta_1 = 1$, для балки $\beta_1 = 0$). На таком представлении базируется метод переменных параметров упругости И.А. Биргера.

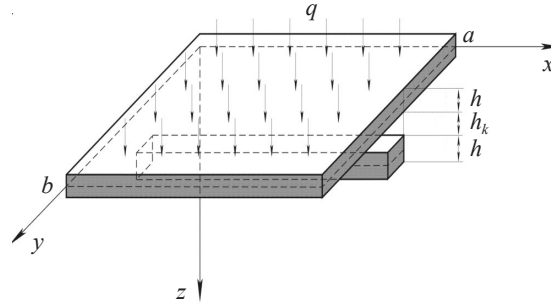


Рис. 1. Пластинчато-балочная конструкция

Уравнения движения элемента пластинки и уравнения движения элемента балки, а также граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона. Согласно этому принципу производится сравнение близких движений, приводящих систему материальных точек из начального положения в момент времени t_0 в конечное положение в момент времени t_1 . Для истинных движений должно выполняться условие:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь K – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия, W – сумма элементарных работ внешних сил.

Для моделирования контактного взаимодействия применена теория Б.Я. Кантора [17], согласно которой в уравнения движения элементов конструкции необходимо ввести слагаемое $q_k = (-1)^i K_1 (w_1 - h_k - w_2) \Psi$, где $i = 1, 2$ – индекс элемента в конструкции (1 – пластинка, 2 – балка), K_1 – коэффициент жесткости трансверсального обжатия конструкции в зоне контакта, h_k – зазор между элементами конструкции. Функция Ψ определена формулой $\Psi = [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]/2$ (если $w_1 > h_k + w_2$, то между элементами конструкции есть контакт и $\Psi = 1$; в случае отсутствия контакта $\Psi = 0$). С учетом всех предположений система уравнений пластинчато-балочной конструкции записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [-C_{1x} - C_t] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [-C_{1y} - C_t] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} C_{1xy} \right) + q_1 + q_{\text{noise}} + q_k - \\ \quad - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 M_t}{\partial x^2} + q_2 - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_2}{\partial t} + q_k = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\nabla^2(\theta_1) = 0 \quad (\beta_1 = 1), \quad \nabla^2(\theta_2) = 0 \quad (\beta_1 = 0), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_t &= \alpha_2 \int_{-h/2}^{h/2} E_2 \theta_2 z dz, & C_t &= \alpha_1 \int_{-h/2}^{h/2} \theta z (1 + \nu) dz, \\
 C_{1x} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2}{1 - \nu^2} dz + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2 \nu}{1 - \nu^2} dz, \\
 C_{1y} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2}{1 - \nu^2} dz + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2 \nu}{1 - \nu^2} dz, \\
 C_{1xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2}{1 + \nu} dz, & C_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} E_2 z^2 dz, & e_1 &= \varepsilon_{11}^z + \beta_1 \varepsilon_{22}^z,
 \end{aligned}$$

$\nabla^2(\theta_1)$ – трехмерный ($\beta_1 = 1$) и $\nabla^2(\theta_2)$ – двумерный ($\beta_1 = 0$) операторы Лапласа, ε – коэффициент диссипации. Никаких ограничений на распределение температуры по толщине пластинки и высоте балки не делается. Имеется возможность рассматривать разные диаграммы $\sigma_i(\varepsilon_i, \theta)$, описывающие зависимость напряжения для ряда материалов от деформации и температуры.

К пластинке приложена внешняя распределенная нагрузка вида $q_1(x, y, t) = q_0 \sin \omega_p t$, где q_0 – ее амплитуда и ω_p – частота. Аддитивный цветной шум добавлен в систему (3) в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью q_{noise} [18, 19]. Цветной шум сгенерирован средствами MathLab. Спектральная плотность мощности избыточных (технических) шумов подчинена степенному закону $S(\omega) = h_\gamma \omega^\gamma$, $-2 \leq \gamma \leq 2$, где h_γ – масштабный коэффициент, определяющий уровень шума. Традиционно с каждым целочисленным значением γ связан определенный цвет: $\gamma = 0$ для белого шума, $\gamma = +2$ для броуновского (красного) шума, $\gamma = +1$ для розового шума.

2. Методы решения

Рассматриваемая механическая конструкция (см. рис. 1) помещается в температурное поле, интенсивность которого в процессе динамического воздействия остается постоянной. Для оценки распределения температуры в пластинке и балке решаются трех- (для пластинки) и двумерное (для балки) уравнения теплопроводности при соответствующих граничных условиях 1-го, 2-го, 3-го рода. Стационарные уравнения теплопроводности для пластинки и балки решаются методом конечных разностей 2-го и 4-го порядков точности. Была исследована сходимость этих методов для подтверждения достоверности получаемых результатов. Система уравнений (3) сводится к задаче Коши методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях и методом конечных разностей 2-го и 4-го порядков точности. В методе Бубнова – Галеркина функции w_1 и w_2 , являющиеся решениями системы (3), аппроксимируются выражением в виде произведения функций, зависящих от времени и от координат:

$$w_1 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \varphi_{kj}(x, y), \quad w_2 = \sum_{k=1}^N A_k(t) \varphi_k(x). \quad (5)$$

Функции $\varphi_{kj}(x, y)$ и $\varphi_k(x)$ выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли

граничным условиям, были непрерывны вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно и линейно независимы. Задача Коши решается одним из методов типа Рунге – Кутты и Ньюмарка. На каждом временном шаге строится итерационная процедура метода переменных параметров упругости И.А. Биргера. Проведенные исследования дают возможность рассматривать конструкцию, представленную на рис. 1, как систему с «почти» бесконечным числом степеней свободы. Исследование результатов проводилось качественными методами теории дифференциальных уравнений и нелинейной динамики с построением сигналов, фазовых портретов, сечений Пуанкаре, применением вейвлет-анализа, фурье-анализа и методов Канца [20], Вольфа [21] и Розенштейна [22] для вычисления старшего показателя Ляпунова.

3. Численный эксперимент

В качестве примера приведены результаты численного эксперимента в случае контактного взаимодействия шарнирно опертой по контуру пластинки и шарнирно опертой по концам балки под действием цветного шума без учета физической нелинейности и температурного поля:

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1;$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1,$$
(6)

при нулевых начальных условиях:

$$w_i |_{t=0} = 0, \quad \dot{w}_i |_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Заданы следующие значения управляющих параметров в безразмерном виде: коэффициент диссипации $\epsilon = 1$, частота внешнего возбуждения $\omega_p = 5$ (выбрана близкой к собственной частоте пластинки), амплитуда внешней нагрузки $q_0 = 10$, зазор между пластинкой и балкой $h_k = 0,01$. Изучается влияние цветного шума различной природы и интенсивности на характер колебаний пластинчато-балочной конструкции.

При отсутствии шумового поля ($q_{\text{noise}} = 0$) колебания пластинки гармонические на частоте внешнего возбуждения $\omega_p = 5$. Балка в этом случае находится в покое, так как контактного взаимодействия не происходит. На рис. 2 приведены график колебаний пластинки (сплошная линия) и положение балки (пунктир) – рис. 2а, спектр мощности Фурье – рис. 2б и 2D вейвлет-спектр Морле – рис. 2в.

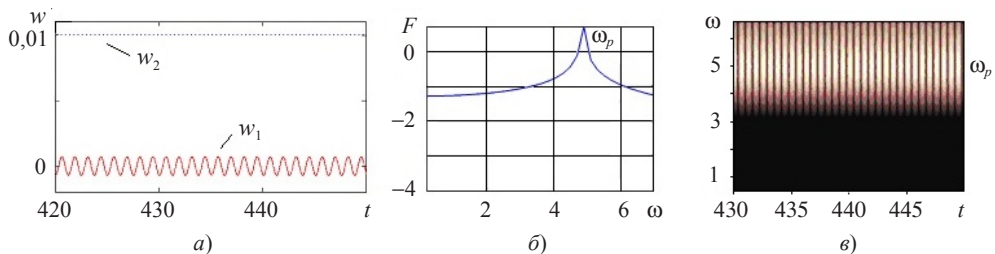


Рис. 2. Колебания пластинки при нагрузке $q_0 = 10$ и отсутствии шума ($q_{\text{noise}} = 0$)

При добавлении к внешней нагрузке розового шума ($\gamma = +1$), начиная с интенсивности $q_{\text{noise}} = 40$, колебания пластины происходят на трех основных частотах: $\omega_p = 5$, $\omega_1 = \omega_p/3 = 1,6$ и $\omega_2 = 2\omega_p/3 = 3,3$. При $q_{\text{noise}} = 43$ наступает контактное взаимодействие пластины и балки, колебания пластины становятся хаотическими.

При добавлении к внешней нагрузке красного шума ($\gamma = +2$), начиная с $q_{\text{noise}} = 0,2$, колебания пластины осуществляются на трех основных частотах: $\omega_p = 5$, $\omega_1 = \omega_p/3 = 1,6$ и $\omega_2 = 2\omega_p/3 = 3,3$. При $q_{\text{noise}} = 7$ происходит первоначальное контактное взаимодействие пластины и балки, колебания пластины становятся хаотическими.

При добавлении к внешней нагрузке белого шума ($\gamma = 0$) при $q_{\text{noise}} = 1$ колебания пластины осуществляются на двух основных частотах: $\omega_p = 5$ и $\omega_1 = \omega_p/3 = 1,6$. При $q_{\text{noise}} = 5$ колебания пластины осуществляются на трех основных частотах: $\omega_p = 5$, $\omega_1 = \omega_p/3 = 1,6$ и $\omega_2 = 2\omega_p/3 = 3,3$. При $q_{\text{noise}} = 100$ колебания пластины становятся хаотическими. Первоначальное контактное взаимодействие пластины и балки наступает при $q_{\text{noise}} = 244$, колебания пластины происходят хаотически. На рис. 3 показаны график совместных колебаний пластины (сплошная линия) и балки (пунктирная линия) – рис. 3а, спектр мощности Фурье – рис. 3б и 2D вейвлет-спектр Морле – рис. 3в. Старший показатель Ляпунова, вычисленный по трем методам – Канда [20], Вольфа [21] и Розенштейна [22], – положительный.

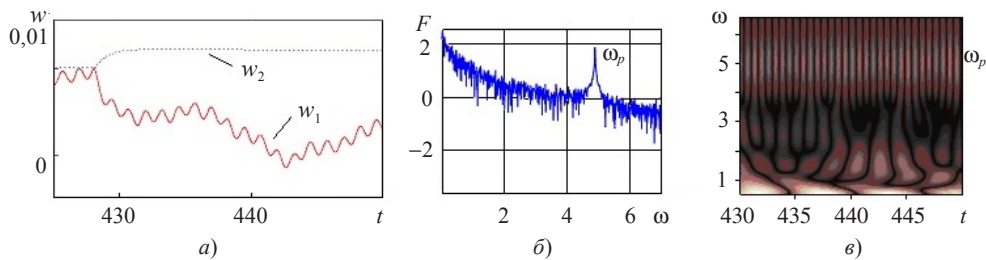


Рис. 3. Колебания пластины при нагрузке $q_0 = 10$ и белом шуме ($\gamma = 0$), $q_{\text{noise}} = 244$

Заключение

Построена математическая модель нелинейных колебаний и контактного взаимодействия пластины, локально подкрепленной балкой, находящейся в аддитивном цветном шуме и температурном поле, с учетом физической нелинейности. Проведенный анализ показал, что по сравнению с розовым и белым шумами более существенное влияние на характер колебаний пластинчато-балочной конструкции оказывает красный шум.

Список литературы

1. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 1984. 107 p.
2. Salmon J. et al. Poisson noise reduction with non-local PCA. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2014. Vol. 48. No 2. P. 279–294.
3. Chien J.C. et al. A pulse-position-modulation phase-noise-reduction technique for a 2-to-16 GHz injection-locked ring oscillator in 20nm CMOS. *IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC)*. 2014. P. 52–53.
4. Галимуллин Д.З., Сибгатуллин М.Э., Камалова Д.И., Салахов М.Х. Влияние цветного шума на обработку оптических сигналов с помощью алгоритма роевого интеллекта. *Изв. РАН. Сер. Физическая*. 2016. Т. 80. №7. С. 934–937.

5. Белов Д.А., Гертель С.Н., Кочемасов В.Н., Строганова Е.П. Мультипликатор в радиоэлектронной аппаратуре спутниковых сегментов систем связи. *Научно-технические технологии в космических условиях Земли*. 2017. Т. 9. №1. С. 10–16.
6. Шумовые и деграционные процессы в полупроводниковых приборах. *Матер. докл. междунаро. науч.-техн. семинаров*. М.: МЭИ, 1993–2000.
7. Santosa H. et al. Noise reduction in functional near-infrared spectroscopy signals by independent component analysis. *Review of Scientific Instruments*. 2013. Vol. 84. No 7. P. 073106.
8. Шаповалов А.С., Ляшенко А.В. Модуляционные спектры флуктуаций сигнала многодиодного генератора СВЧ. *Гетеромагнитная микроэлектроника*. 2018. №24. С. 27–42.
9. Емельянов А.М., Крутов А.В., Ребров А.С. Особенности зондовых измерений коэффициента шума транзистора в миллиметровом диапазоне длин волн. *Электроника и микроэлектроника СВЧ*. 2016. Т. 1. С. 319–323.
10. Анисимов М.П., Черевко А.Г. *Флуктуационные явления в физико-химическом эксперименте*. Новосибирск: Наука, 1986. 113 с.
11. Потемкин В.В., Степанов А.В. О стационарном характере шума $1/f$ в низкочастотном диапазоне. *Радиотехника и электроника*. 1980. Т. 25. №6. С. 1269–1275.
12. Restle R. Tests of Gaussian statistical properties of $1/f$ noise. *Journal of Applied Physics*. 1983. Vol. 54. No 10. P. 5844.
13. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Erofeev N.P., Dobriyan V., Barulina M.A., Krysko V.A. Quantifying chaos by various computational methods. Part 2: Vibrations of the Bernoulli-Euler beam subjected to periodic and colored noise. *Entropy*. 2018. Vol. 20. No 3. P. 170.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Zakharov V.M., Erofeev N.P., Krylova E.Yu. et al. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2016. No 79. P. 225–253.
15. Яковлева Т.В., Крысько-мл. В.А. Контактное взаимодействие физически нелинейной трехслойной пластинчато-балочной конструкции в температурном поле. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. №6. С. 9–14.
16. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Kutepov I.E., Krysko V.A. Stability of curvilinear Euler – Bernoulli beams in temperature fields. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. No 94. P. 207–215.
17. Кантор Б.Я. *Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения*. Киев: Наукова думка, 1990. 100 с.
18. Баженов В.Г., Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В. Нелинейные колебания пластины, подкрепленной локальным набором ребер, в условиях аддитивного белого шума. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №3. С. 259–266.
19. Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. №4. С. 259–272.
20. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. No 16. P. 285–317.
21. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. No 65. P. 117–134.
22. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*. 1994. No 185. P. 77–87. DOI: 10.1016/0375-9601(94)90991-1.

References

1. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. Springer-Verlag. 1984. 107 p.
2. Salmon J. et al. Poisson noise reduction with non-local PCA. *J. Math. Imaging Vis.* 2014. Vol. 48. No 2. P. 279–294.
3. Chien J.C. et al. A pulse-position-modulation phase-noise-reduction technique for a 2-to-16 GHz injection-locked ring oscillator in 20nm CMOS. *IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC)*. 2014. P. 52–53.

4. Galimullin D.Z., Sibgatullin M.E., Kamalova D.I., Salakhov M.Kh. Effect of color noise on the processing of optical signals using the swarm intellect algorithm. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2016. Vol. 80. Iss. 7. P. 855–858.
5. Belov D.A., Gertel' S.N., Kochemasov V.N., Stroganova E.P. Multiplikator v radioelektronnoy apparature sputnikovykh segmentov sistem svyazi [Multiplier in the radio-electronic equipment of satellite segments of communication systems]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh usloviyakh Zemli [H&ES Research]*. 2017. Vol. 9. No 1. P. 10–16 (In Russian).
6. Shumovye i degradatsionnye protsessy v poluprovodnikovyykh priborakh [Noise and degradatsionnye processes in semiconductor devices]. *Materialy dokladov mezhdunarodnykh nauchno-tekhnicheskikh seminarov [Materials of Reports of the International Scientific and Technical Seminars MEI]*. Moscow. MEI Publ. 1993–2000 (In Russian).
7. Santosa H. et al. Noise reduction in functional near-infrared spectroscopy signals by independent component analysis. *Rev. Sci. Instrum.* 2013. Vol. 84. No. 7. P. 073106.
8. Shapovalov A.S., Lyashenko A.V. Modulyatsionnye spektry fluktuatsiy signala mnogodiodnogo generatora SVCh [Modulation spectrums of the signal fluctuations of the multidiode microwave generator]. *Geteromagnitnaya mikroelektronika [Heteromagnetic Microelectronics]*. 2018. Vol. 24. P. 27–42 (In Russian).
9. Emel'yanov A.M., Krutov A.V., Rebrov A.S. Osobennosti zondovykh izmereniy koeffitsienta shuma tranzistora v millimetrovom diapazone dlin voln [Features of probe measurements of the noise coefficient of the transistor in the millimeter wavelength range]. *Elektronika i mikroelektronika SVCh [Electronics and Microelectronics Microwave]*. 2016. Vol. 1. P. 319–323 (In Russian).
10. Anisimov M.P., Cherevko A.G. *Fluktuatsionnye yavleniya v fiziko-khimicheskoy eksperimente [Fluctuation Phenomena in a Physicochemical Experiment]*. Novosibirsk. Nauka Publ. 1986. 113 p. (In Russian).
11. Potemkin V.V., Stepanov A.V. O statsionarnom kharaktere shuma $1/f$ v nizkochastotnom diapazone [On the stationary nature of $1/f$ noise in the low-frequency range of the experiment]. *Radiotekhnika i elektronika [Journal of Communications Technology and Electronics]*. 1980. Vol. 25. No 6. P. 1269–1275 (In Russian).
12. Restle R. Tests of gaussian statistical properties of $1/f$ noise. *J. Appl. Phys.* 1983. Vol. 54. No 10. P. 5844.
13. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Erofeev N.P., Dobriyan V., Barulina M.A., Krysko V.A. Quantifying chaos by various computational methods. Part 2: Vibrations of the Bernoulli – Euler beam subjected to periodic and colored noise. *Entropy*. 2018. Vol. 20. No 3. P. 170.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Zakharov V.M., Erofeev N.P., Krylova E.Yu. et al. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise. *Mech. Syst. Signal Process.* 2016. No 79. P. 225–253.
15. Yakovleva T.V., Krysko Jr. V.A. Kontaknoe vzaimodeystvie fizicheski nelineynoy trekh-sloynoy plastinchato-balochnoy konstruksii v temperaturnom pole [Mathematical simulation of contact interaction of physically nonlinear three-layered plate-beam structure in temperature field]. *Deformatsiya i razrushenie materialov [Mechanics of Deformation and Fracture]*. 2017. No 6. P. 9–14 (In Russian).
16. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Kutepov I.E., Krysko V.A. Stability of curvilinear Euler-Bernoulli beams in temperature fields. *Int. J. Nonlin. Mech.* 2017. No 94. P. 207–215.
17. Kantor B.Ya. *Kontaknyye zadachi nelineynoy teorii obolochek vrashcheniya [Contact Problems of the Nonlinear Theory of Shells of Revolution]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1990. 100 p. (In Russian).
18. Bazhenov V.G., Krylova E.Yu., Yakovleva T.V. Nelineynye kolebaniya plastiny, podkrep-lennoy lokalnym naborom reber, v usloviyakh additivnogo belogo shuma [Nonlinear vibrations of a plate stiffened with a local set of ribs in the conditions of additive white noise]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 3. P. 259–266 (In Russian).
19. Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova C.Y. Kontaknoe vzaimodeystvie plastiny s sistemoy balok pri nalichii zazorov s uchedom belogo shuma [Contact interaction plates, reinforced by ribs, with gaps under the influence of white noise]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 4. P. 259–272 (In Russian).

20. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. No 16. P. 285–317.

21. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. No 65. P. 117–134.

22. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett. A*. 1994. No 185. P. 77–87. DOI: 10.1016/0375-9601(94)90991-1.

**MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR VIBRATIONS OF A PLATE
WITH EXPOSURE TO COLOR NOISE TAKING INTO ACCOUNT
OF CONTACT INTERACTION WITH THE BEAM**

Yakovleva T.V.^{1,2}, Bazhenov V.G.¹, Kruzhilin V.S.², Krysko V.A.²

¹*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

A theory of contact interaction of a plate locally supported by a beam, under the influence of external lateral load and external additive color noise (pink, red, white) was constructed. Also described design is in a stationary temperature field. For the plate, the Kirchhoff kinematic model was adopted; for the beam, Euler–Bernoulli, the physical nonlinearity is taken into account according to the theory of small elastic-plastic deformations. The temperature field is taken into account according to the Duhamel–Neumann theory, and there are no restrictions on the temperature distribution over the plate thickness and the height of the beam. The temperature field is determined from the solution of the three-dimensional (plate) and two-dimensional (beam) heat conduction equations. The theory of B.Ya. Cantor. The heat conduction equations are solved by the finite difference method of the second and fourth order of accuracy. The system of differential equations is reduced to the Cauchy problem by the Bubnov–Galerkin methods in higher approximations and finite differences in spatial variables. Next, the Cauchy problem is solved by the fourth-order Runge–Kutta method and the Newmark method. At each time step, the iterative procedure of I. Birger was applied. The results of a numerical experiment are given. To analyze the results, the methods of nonlinear dynamics were used (construction of signals, phase portraits, Poincaré sections, Fourier power spectra and Morlet wavelet spectra, analysis of the sign of Lyapunov indices by three methods: Wolf, Kantz, Rosenstein). The effect of color noise on the contact interaction between the plate and the beam has been studied. It has been established that red additive noise has the most significant effect on the oscillation pattern of the lamellar-beam structure compared to pink and white noise.

Keywords: plate, beam, contact interaction, Kirchhoff and Euler–Bernoulli kinematic models, temperature field, additive color noise, physical nonlinearity, Bubnov–Galerkin method in higher approximations, Runge–Kutta method, I. Birger iterative procedure.