

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-292-304

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ
ПОЛОСТИ В СРЕДЕ С УСЛОВИЕМ ПЛАСТИЧНОСТИ
МОРА – КУЛОНА – ТРЕСКА***

© 2019 г.

Котов В.Л.¹, Тимофеев Д.Б.²

¹*Научно-исследовательский институт механики*

Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

²*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

vkotov@inbox.ru

Поступила в редакцию 27.03.2019

Получено аналитическое решение одномерной задачи о расширении сферической полости с постоянной скоростью из точки в пространстве, занимаемом пластической средой. Ударная сжимаемость среды описывается на основе линейной адиабаты Гюгонио. Пластическое деформирование подчиняется критерию текучести Мора – Кулона с ограничением на предельную величину максимальных касательных напряжений в соответствии с критерием Треска. В предположении жесткопластического деформирования (пренебрегается упругим предвестником), несжимаемости за фронтом ударной волны и равенства скоростей распространения фронтов пластической волны и плоской ударной волны, определяемой линейной адиабатой Гюгонио, сформулирована краевая задача для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных скорости и напряжения, зависящих от автомодельной переменной. Получено решение задачи в виде стационарной бегущей волны – пластической ударной волны, распространяющейся по невозмущенному полупространству. Это решение обобщает полученное ранее аналитическое решение для среды с условием пластичности Мора – Кулона.

Проведен анализ влияния ограничения предельной величины максимальных касательных напряжений на распределение безразмерных напряжений за фронтом ударной волны. Получены формулы для определения диапазона скоростей расширения полости, в котором применимо простое решение для среды с условием пластичности Треска. Полученное решение может применяться для оценки сил сопротивления высокоскоростному внедрению жестких ударников в малопрочные грунтовые среды.

Ключевые слова: сферическая полость, расширение, аналитическое решение, пластичность, условие пластичности Мора – Кулона – Треска.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№19-08-00430, 19-08-00977).

Введение

В теории высокоскоростного удара и проникания особая роль отводится определению параметров контактного взаимодействия тел. Как показывает практика [1–5], хорошей аппроксимацией давления на поверхности контакта жесткого ударника с сопротивляющейся средой является решение задачи о расширении сферической или цилиндрической полости. Для определения полей напряжений и скоростей в области пластического деформирования, примыкающей к полости, разработан эффективный алгоритм численного решения [6, 7], который позволяет получить решение задачи с достаточной для практического применения точностью. Численные решения задачи о расширении сферической полости и их применение для оценки контактных напряжений и сил сопротивления внедрению жестких тел в грунт, бетон и металл даны в статьях [6–13]. В [14, 15] получено аналитическое решение данной задачи, основанное на предположении о несжимаемости среды за фронтом ударной волны. Динамическая сжимаемость среды характеризуется ударной адиабатой, сопротивление сдвигу определяется условием пластичности Мора – Кулона. На основе предложенного аналитического решения разработана методика вычисления сил сопротивления прониканию жесткого тела в мягкий грунт [16]. Получены зависимости максимального значения силы сопротивления внедрению жесткой сферы и ударника с конической головной частью в сухой и водонасыщенный песок [17]. Сравнение результатов определения сил сопротивления прониканию, полученных аналитически, численно и экспериментально, показало их качественное и количественное хорошее соответствие друг другу при изменении скоростей удара в диапазоне от 50 до 400 м/с.

В публикациях [18–20] приводятся экспериментальные и теоретические данные, свидетельствующие об ограниченности предела текучести грунта при высоких давлениях. Как показано в [20], нелинейная зависимость предела текучести от давления с учетом разброса данных и ошибок измерений может быть представлена двузвенной ломаной – линейная зависимость при малых давлениях, как это предполагается в условии пластичности Мора – Кулона, и ограниченность максимального значения предела текучести при больших давлениях в соответствии с условием Треска. Для эффективного решения задач проникания жестких тел в мягкие грунты на основе методики расширения полости в настоящей статье получено аналитическое решение задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска.

1. Постановка краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассматривается одномерная автомодельная задача о расширении с постоянной скоростью V сферической полости из точки в безграничной упругопластической среде. Математическая модель динамического деформирования упругопластической среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения, которая записывается в сферических эйлеровых координатах r , ϕ , φ . Система дифференциальных уравнений в частных производных замыкается конечными соотношениями, определяемыми из эксперимента:

$$\sigma_r = f_1(\theta), \quad \sigma_r - \sigma_\phi = f_2(\theta), \quad (1)$$

где σ_r и $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ – радиальная, окружная и меридиональная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), $\theta = 1 - \rho_0/\rho$ – объемная деформация, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотность среды, функции f_1 и f_2 определяют уравнение состояния и условие пластичности среды.

Эксперименты [21–26] свидетельствуют, что динамическая сжимаемость многих сред характеризуется ударной адиабатой Гюгонио в виде линейного соотношения:

$$U_s = C_0 + s u_p, \quad (2)$$

связывающего скорость плоской ударной волны U_s и скорость частиц за фронтом волны u_p . Здесь C_0 соответствует скорости звука в среде при нулевом давлении, s – константа.

Применяя соотношение (2) и условия Ренкина – Гюгонио, получим связь напряжения σ_r и объемной деформации θ , которая будет иметь вид $f_1(\theta) = \rho_0 C_0^2 \theta \times (1 - s\theta)^{-2}$ [21]. В этой форме записи константа s характеризует предельную сжимаемость среды.

Аналитическое решение задачи строится в области пластического течения, ограниченной радиусами $r = Vt$ и $r = ct$, при следующих допущениях:

а) среда считается жесткопластической (упругим деформированием мягкой грунтовой среды пренебрегается), то есть область пластического течения примыкает к области невозмущенной среды, где $\sigma_r = 0$ и $v = 0$, v – скорость частиц среды;

б) решение представляет собой пластическую ударную волну (УВ), распространяющуюся по невозмущенному полупространству;

в) плотность ρ_s за фронтом УВ считается постоянной, то есть предполагается несжимаемость среды за фронтом УВ, величина ρ_s зависит от скорости расширения полости;

г) скорость распространения фронта пластической волны равна скорости распространения фронта плоской УВ, определяемой линейной адиабатой Гюгонио (2), то есть полагается, что $c = U_s$.

Подобные допущения представляются оправданными для мягких грунтовых сред, обладающих малым сцеплением и высокой пористостью [17].

С помощью автомодельной подстановки $\xi = r/(ct)$ система дифференциальных уравнений в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [13].

Рассмотрим краевую задачу для системы двух ОДУ первого порядка относительно безразмерных скорости $U = v/c$ и напряжения $S = \sigma_r/(\rho_s c^2)$, которая с учетом сделанных допущений примет вид:

$$U' + 2 \frac{U}{\xi} = 0, \quad \varepsilon < \xi < 1, \quad (3)$$

$$U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon, \quad (4)$$

$$U|_{\xi=1} = \theta_s, \quad (5)$$

$$S' + 2 \frac{\tilde{f}_2}{\xi} = (\xi - U)U', \quad \varepsilon < \xi < 1, \quad (6)$$

$$S|_{\xi=1} = \theta_s - \theta_s^2, \quad (7)$$

где $\varepsilon = V/c$ – значение безразмерной координаты, соответствующее границе полости; $\tilde{f}_2 = f_2 / (\rho_s c^2)$ – безразмерная функция в условии пластичности; объемная деформация на фронте УВ принимает значение $\theta_s = (1 - C_0/c)/s$; штрихом обозначено дифференцирование по ξ .

В систему уравнений (3)–(7) наряду с безразмерными скоростью U и напряжением S входит также неизвестный параметр c – скорость распространения фронта пластической ударной волны.

2. Определение безразмерной скорости

Уравнение (3) есть уравнение с разделяющимися переменными $dU/U = -2d\xi/\xi$, решая которое получим $U = c_1/\xi^2$. Постоянная интегрирования определяется из краевого условия (4) как $c_1 = \varepsilon^3$, и безразмерная скорость имеет вид:

$$U = \frac{\varepsilon^3}{\xi^2}. \quad (8)$$

Для определения неизвестной величины ε применим краевое условие (5)

$$\varepsilon^3 = \frac{1 - C_0/c}{s} = \frac{1 - \varepsilon/M}{s},$$

откуда получается кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon}{sM} - \frac{1}{s} = 0, \quad (9)$$

где $M = V/C_0$.

Коэффициенты уравнения (9) зависят только от параметров ударной адиабаты среды C_0 , s и скорости расширения полости V .

Рассмотрим линейное приближение выражения для ε , которое следует из уравнения (9) с применением разложения в ряд Тейлора:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{s}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/3} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{s}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3M}\right),$$

откуда

$$\varepsilon \approx \frac{3M}{1 + 3M\sqrt[3]{s}}. \quad (10)$$

Используя обозначение $\varepsilon = V/c$, получаем

$$c \approx \sqrt[3]{s}V + \frac{C_0}{3}. \quad (11)$$

Ранее решение для жесткопластической среды было получено в задаче о расширении цилиндрической полости [6].

Отметим также, что безразмерная скорость среды определяется только ударной адиабатой Гюгонио и не зависит от условия пластичности среды.

3. Определение безразмерного напряжения в среде при условии текучести Мора – Кулона

Примем далее, что критерий пластичности среды описывается законом Мора – Кулона

$$f_2 = \tau_0 + \kappa p = \tau_0 + \mu \sigma_r, \quad (12)$$

где τ_0 – сцепление, κ – коэффициент внутреннего трения, $p = (\sigma_r + 2\sigma_\phi)/3$ – давление, $\mu = \kappa/(1 + 2\kappa/3)$.

ОДУ (6) и краевое условие (7) при учете решения (8) и критерия текучести (12) запишутся в виде:

$$S' + 2 \frac{T_0 + \mu S}{\xi} = -2 \left(\xi - \frac{\varepsilon^3}{\xi^2} \right) \frac{\varepsilon^3}{\xi^3} = -2 \frac{\varepsilon^3}{\xi^2} + 2 \frac{\varepsilon^6}{\xi^5}, \quad \varepsilon < \xi < 1, \quad (13)$$

$$S|_{\xi=1} = \varepsilon^3 - \varepsilon^6, \quad (14)$$

где обозначено $T_0 = \tau_0/(\rho_s c^2)$.

Перенесем члены с величиной S в уравнении (13) в левую часть, а остальные члены – в правую часть и умножим левую и правую части уравнения на величину $\xi^{2\mu}$:

$$\left(S' + 2 \frac{\mu S}{\xi} \right) \xi^{2\mu} = \left(-2 \frac{T_0}{\xi} - 2 \frac{\varepsilon^3}{\xi^2} + 2 \frac{\varepsilon^6}{\xi^5} \right) \xi^{2\mu}.$$

После преобразований получим уравнение с разделяющимися переменными

$$d(S \xi^{2\mu}) = (-2T_0 \xi^{2\mu-1} - 2\varepsilon^3 \xi^{2\mu-2} + 2\varepsilon^6 \xi^{2\mu-5}) d\xi,$$

решение которого зависит от произвольной постоянной c_2 :

$$S = -\frac{T_0}{\mu} - 2 \frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} + c_2 \xi^{-2\mu}.$$

С учетом граничных условий (14) безразмерное напряжение принимает вид:

$$S(\xi) = -\frac{T_0}{\mu} - 2 \frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} + \left(\frac{T_0}{\mu} + 2 \frac{\varepsilon^3}{2\mu-1} - \frac{\varepsilon^6}{\mu-2} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6 \right) \xi^{-2\mu}. \quad (15a)$$

Уравнение (15a) не определено при $\mu = 0$ и $\mu = 0,5$. Решение в этих случаях можно получить предельным переходом в (15a) при стремлении μ к 0 и 0,5 соответственно:

$$S(\xi) = -2T_0 \ln \xi - \varepsilon^3 \left(1 - \frac{2}{\xi} \right) - \frac{\varepsilon^6}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi^4} \right), \quad \mu = 0, \quad (15б)$$

$$S(\xi) = -2T_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \varepsilon^3 \left(2 \frac{\ln \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi} \right) - \frac{\varepsilon^6}{3} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{2}{\xi^4} \right), \quad \mu = 0,5. \quad (15в)$$

В размерном виде зависимость напряжения от автомодельной переменной имеет вид:

$$\sigma_r(\xi) = \tau_0 \left(\frac{\xi^{-2\mu} - 1}{\mu} \right) + \frac{\rho_0 V^2 \varepsilon}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{2}{2\mu-1} \cdot \frac{\xi^{-2\mu+1} - 1}{\xi} + \frac{\varepsilon^3}{\mu-2} \cdot \frac{1 - \xi^{-2\mu+4}}{\xi^4} + (1 - \varepsilon^3) \xi^{-2\mu} \right). \quad (16)$$

В выражении (16) использовалось равенство $\rho_s = \rho_0/(1 - \theta_s) = \rho_0/(1 - \varepsilon^3)$, которое следует из граничного условия (5) при учете решения (8).

Безразмерное напряжение на границе полости ($\xi = \varepsilon$) в зависимости от значений коэффициента внутреннего трения μ определяется следующим образом:

$$S = T_0 \frac{\varepsilon^{-2\mu} - 1}{\mu} + \frac{3\varepsilon^2}{(2\mu - 1)(\mu - 2)} + \varepsilon^3 \left(\frac{2}{2\mu - 1} - \frac{\varepsilon^3}{\mu - 2} + 1 - \varepsilon^3 \right) \varepsilon^{-2\mu}.$$

В размерном виде напряжение на границе полости, расширяющейся со скоростью V , имеет вид:

$$\sigma_r|_{\xi=\varepsilon} = \tau_0 \frac{\varepsilon^{-2\mu} - 1}{\mu} + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{(\mu - 2)(2\mu - 1)} + \frac{2\mu + 1}{2\mu - 1} \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \varepsilon^{4-2\mu} \right), \quad (17a)$$

$$\sigma_r|_{\xi=\varepsilon} = -2\tau_0 \ln \varepsilon + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{2} \right), \quad \mu = 0, \quad (17б)$$

$$\sigma_r|_{\xi=\varepsilon} = 2\tau_0 (\varepsilon^{-1} - 1) + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} \right), \quad \mu = 0,5. \quad (17в)$$

В уравнениях (16), (17) величина ε определяется на основе уравнений (10). Таким образом, получены зависимости, позволяющие определить напряжение в среде с условием пластичности Мора – Кулона.

4. Определение безразмерного напряжения в среде при условии текучести Мора – Кулона – Треска

Функция пластичности для условия Мора – Кулона при учете ограничения на максимальную величину предела текучести Треска имеет вид:

$$f_2 = \begin{cases} \tau_0 + \mu \sigma_r, & 0 < \sigma_r \leq \sigma_M, \\ \tau_M, & \sigma_r > \sigma_M, \end{cases}$$

где $\sigma_M = (\tau_M - \tau_0)/\mu$. В безразмерном виде это уравнение примет вид

$$\tilde{f}_2 = \begin{cases} T_0 + \mu S, & 0 < S \leq S_M, \\ T_M, & S > S_M, \end{cases}$$

где введены безразмерные величины $T_M = \tau_M/(\rho_s c^2)$, $S_M = (T_M - T_0)/\mu$.

Напряжение S монотонно убывает при изменении безразмерной координаты ξ от ε до 1, то есть минимальное значение напряжения достигается при $\xi = 1$. Определим значение скорости расширения полости V_M , при котором $S|_{\xi=1} = S_M$.

Из соотношений на УВ при $\xi = 1$ следует $\sigma_r = \rho_0 c v = \rho_0 c^2 \theta$. Обозначим величины скорости УВ c , объемной деформации θ и ε , соответствующие $V = V_M$, через c_M , θ_M и ε_M . Примем для определения c_M формулу (11), тогда

$$c_M = \sqrt[3]{s} V_M + \frac{C_0}{3}, \quad \theta_M = \varepsilon_M^3 = \frac{V_M^3}{c_M^3}, \quad \sigma_M = \rho_0 c_M^2 \theta_M = \rho_0 \frac{V_M^3}{c_M}$$

и для определения V_M получается кубическое уравнение

$$\frac{\tau_M - \tau_0}{\mu} \left(\sqrt[3]{s} V_M + \frac{C_0}{3} \right) = \rho_0 V_M^3. \quad (18a)$$

Аналогично максимальное значение напряжения достигается при $\xi = \varepsilon$. Обозначим символом V_0 значение скорости расширения полости, при котором выпол-

няются равенства $S_r|_{\xi=\varepsilon} = S_M$ или $\sigma_r|_{\xi=\varepsilon} = \sigma_M$. Подставим значение $V = V_0$ в уравнение (17): $\sigma_M = \sigma_r|_{\xi=\varepsilon, V=V_0}$, получим нелинейное уравнение для определения V_0 :

$$\frac{\tau_M - \tau_0}{\mu} = \frac{\tau_0}{\mu} (1 - \varepsilon_0^{-2\mu}) + \frac{\rho_0 V_0^2}{1 - \varepsilon_0^3} \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \varepsilon_0^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \varepsilon_0^{4-2\mu} \right), \quad (18б)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_0 = \frac{V_0}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt[3]{sV_0 + \frac{C_0}{3}}.$$

При изменении скорости расширения полости в интервале $V_0 < V < V_M$ необходимо определить значение безразмерной координаты $\xi = \xi_M$, в которой значение безразмерного напряжения $S|_{\xi=\xi_M} = S_M$.

В итоге безразмерное напряжение будет определяться следующим образом:

$$S(\xi) = \begin{cases} -\frac{T_0}{\mu} - 2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} + \left(\frac{T_0}{\mu} + 2\frac{\varepsilon^3}{2\mu-1} - \frac{\varepsilon^6}{\mu-2} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6 \right) \xi^{-2\mu}, & \begin{matrix} (0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \varepsilon \leq \xi \leq 1) \cup \\ \cup \left(\begin{matrix} \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_M, \\ \xi_M \leq \xi \leq 1 \end{matrix} \right); \end{matrix} \\ S_M + T_M \ln \left(\frac{\xi_M}{\xi} \right)^2 + 2\varepsilon^3 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_M} \right) - \frac{\varepsilon^6}{2} \left(\frac{1}{\xi^4} - \frac{1}{\xi_M^4} \right), & \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_M, \varepsilon \leq \xi \leq \xi_M; \\ -2T_M \ln \xi - \varepsilon^3 \left(1 - \frac{2}{\xi} \right) - \frac{\varepsilon^6}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi^4} \right), & \varepsilon > \varepsilon_M, \varepsilon \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Размерное напряжение на границе полости $\sigma_C = S|_{\xi=\varepsilon} \rho_s c^2$,

$$\sigma_r(V) = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\mu} (\varepsilon^{-2\mu} - 1) + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \varepsilon^{4-2\mu} \right), & 0 < V < V_0; \\ \sigma_M + \tau_M \ln \left(\frac{\xi_M}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{2} - \frac{2\varepsilon}{\xi_M} + \frac{\varepsilon^4}{2\xi_M^4} \right), & V_0 \leq V \leq V_M, \quad (20) \\ -2\tau_M \ln \varepsilon + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{2} \right), & V > V_M. \end{cases}$$

В выражениях (19), (20) величина ε определяется на основе соотношения (10).

Таким образом, получены зависимости, позволяющие определить напряжение в среде с условием пластичности Мора – Кулона с ограничением Треска.

5. Результаты решения задачи о полости в среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска

В таблице 1 приводятся значения параметров уравнения состояния сухого и водонасыщенного песка, полученные ранее по результатам серии ударных экспериментов и численных расчетов [17].

Таблица 1

Параметры уравнения состояния для сухого и водонасыщенного песка

№	ρ_0 , кг/м ³	C_0 , м/с	s	τ_0 , МПа	μ	τ_M , МПа	σ_M , МПа
1	1730	460	2,3	0,042	0,6	180	300
2	2080	1700	3,4	0,021	0,25	25	1000

Первая строка таблицы 1 соответствуют сухому, вторая строка – водонасыщенному песку. Расчеты проводились при значениях скорости расширения полости 400 м/с для сухого и 250 м/с для водонасыщенного песка.

Значения параметров V_0 и V_M , определенные по формулам (18), и значения других параметров сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Границы выделенных диапазонов в уравнениях (19), (20)

№	V , м/с	V_0 , м/с	V_M , м/с	ε_0	ε_M	ξ_M	S_M
1	400	296	528	0,544	0,607	0,795	0,298
2	250	150	380	0,19	0,305	0,58	0,053

На рис. 1 представлены распределения безразмерных напряжений в зависимости от автомодельной переменной при скорости расширения полости 400 и 250 м/с для сухого (а) и водонасыщенного (б) песка. Сплошная линия соответствует расчетам по формуле (19) при условии текучести Мора – Кулона – Треска, штриховая линия соответствует результатам расчетов по формуле (15а) при условии текучести Мора – Кулона. Отличие кривых наблюдается при изменении автомодельной переменной в диапазоне $\varepsilon \leq \xi \leq \xi_M$.

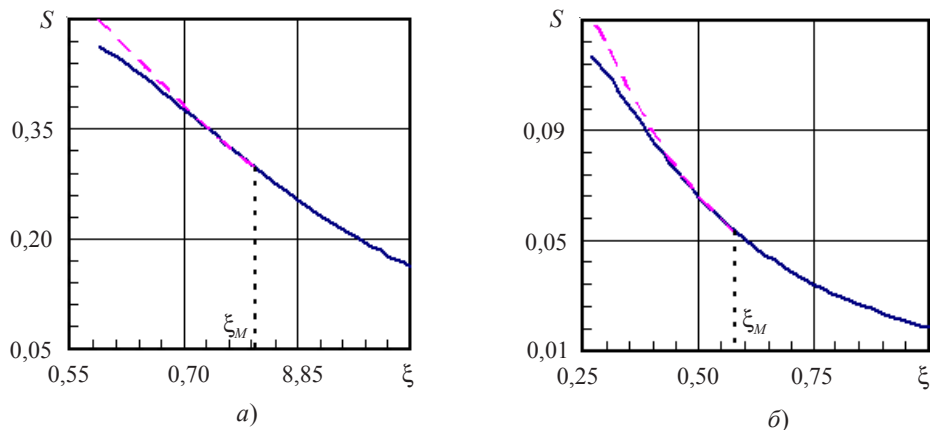


Рис. 1

На рис. 2 маркерами представлены нормированные зависимости напряжения на границе полости от скорости ее расширения при высоких давлениях: квадратами и ромбами показаны результаты, полученные при использовании уравнений состояния сухого и водонасыщенного песка соответственно, линейные аппроксимации методом наименьших квадратов показаны сплошными линиями.

При использовании критерия текучести Мора – Кулона напряжения получены по формуле (17а) при $M > 0,4$ и нормированы следующим образом: $\sigma = \sigma_r|_{\xi=\varepsilon} / (\rho_0 V C_0)$ (рис. 2а). При выбранной нормировке видно, что при критерии текучести Мора –

Кулона напряжения, действующие на стенку полости, зависят от скорости как $\sigma_r/\rho_0 = a_2V^2 + b_1VC_0$. Полученные значения безразмерных констант линейной аппроксимации $a_2 = 1,37$ и $1,35$, $b_1 = 0,36$ и $0,18$ для сухого и водонасыщенного грунтов соответственно.

При использовании критерия текучести Треска напряжения на границе полости (рис. 2б) получены по формуле (17б) при $\tau_0 = \tau_M$ и $V > V_M$, при этом использовалась нормировка $\sigma = \sigma_r|_{\xi=\varepsilon}/(\rho_0C_0^2)$. Зависимость напряжений от скорости определяется функцией $\sigma_r/\rho_0 = a_2V^2 + a_0C_0^2$, причем $a_2 = 1$ и $1,07$, $a_0 = 0,53$ и $0,02$ соответственно для сухого и водонасыщенного грунтов.

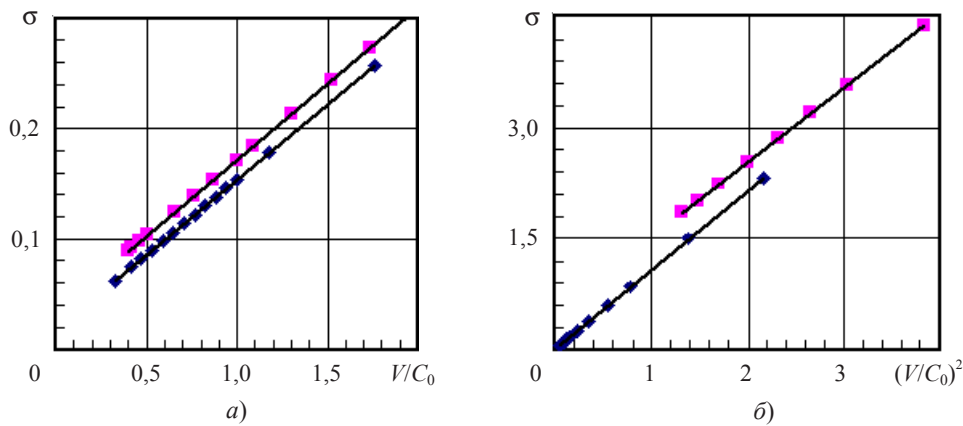


Рис. 2

На рис. 3 представлены графики изменения напряжения на границе полости в зависимости от скорости ее расширения в сухом (рис. 3а) и водонасыщенном (рис. 3б) песке: сплошная линия, штриховая линия с треугольником, штрихпунктирная линия и штриховая линия с квадратом соответствуют результатам, полученным с применением уравнений (20), (17а), (17б) и уравнения (17б) при $\tau_0 = \tau_M$.

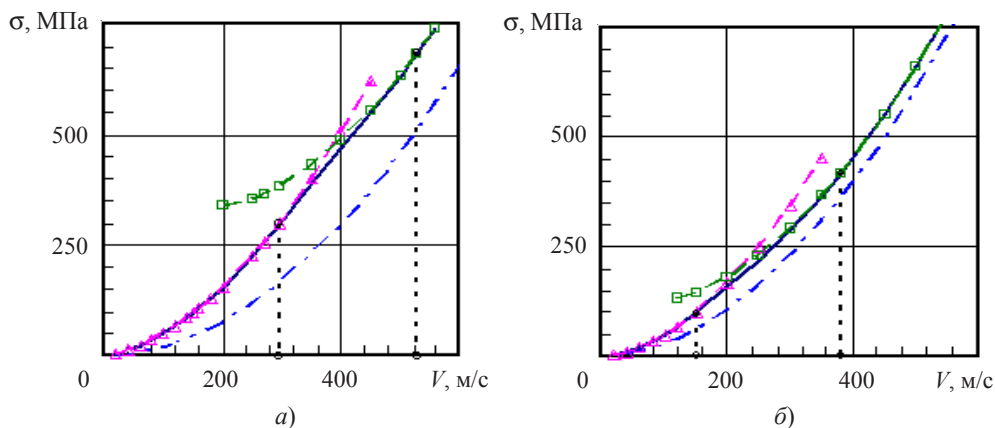


Рис. 3

Напряжения на границе полости в среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска с достаточной для практического применения точностью можно определить без использования уравнений (19), (20), применяя выпуклую интерполя-

цию кубическими полиномами Эрмита или Безье [27] в диапазоне скоростей расширения полости $V_0 \leq V \leq V_M$.

Заключение

Получено аналитическое решение задачи о расширении сферической полости в жесткопластической среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. Проведен анализ влияния ограничения предельной величины максимальных касательных напряжений на распределение безразмерных напряжений за фронтом ударной волны. Получены формулы для определения максимальной скорости расширения полости, ограничивающей сверху возможные значения скоростей расширения полости, при которых справедливо решение с условием пластичности Мора – Кулона, и минимальной скорости, при превышении которой справедливо условие пластичности Треска. Полученное обобщенное решение может применяться для оценки сил сопротивления высокоскоростному внедрению жестких ударников в малопрочные грунтовые среды.

Список литературы

1. Рахматуллин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. *Вопросы динамики грунтов*. М.: Изд-во МГУ, 1964. 239 с.
2. Сагомоян А.Я. *Проникание*. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
3. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. *Прикладная теория проникания*. М.: Наука, 1992. 105 с.
4. *Высокоскоростное взаимодействие тел*. Под ред. В.М. Фомина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review. *Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. P. 355–371.
6. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. Iss. 4. P. 285–295.
7. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*. 1992. Vol. 12. Iss. 3. P. 427–444. [https://doi.org/10.1016/0734-743X\(92\)90167-R](https://doi.org/10.1016/0734-743X(92)90167-R).
8. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 73. P. 112–122. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010>.
9. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Keling Zhang, Yihao Cheng, Xiaojuan Zhang. Semi-analytical model for rigid and erosive long rods penetration into sand with consideration of compressibility. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 83. P. 1–10.
10. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 100. P. 13–22.
11. Qiran Sun, Yuxin Sun, Yixin Liu, Ruiyu Li, Yayun Zhao. Numerical analysis of the trajectory stability and penetration ability of different lateral-abnormal projectiles for non-normal penetration into soil based on modified integrated force law method. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 103. P. 159–168.
12. Котов В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник–грунт». *Проблемы прочности и пластичности*. 2008. Вып. 70. С. 123–131.
13. Котов В.Л. Аппроксимация напряжений в окрестности полости, расширяющейся с постоянной скоростью в среде с условием пластичности Мора – Кулона. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 2. С. 177–190.
14. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А., Макарова А.А. Анализ приближенных

решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 58–63.

15. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

16. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. №4. С. 114–125.

17. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2018. Vol. 122. P. 197–208.

18. Григорян С.С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах. *ПММ*. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1070–1082.

19. Баженов В.Г., Котов В.Л. Метод идентификации упругопластических свойств грунтовых сред при внедрении ударников. *Изв. РАН. МТТ*. 2008. № 4. С. 184–190. <https://doi.org/10.3103/S002565440804016X>.

20. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50. №6. С. 115–125. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0135-6>.

21. Лагунов В.А., Степанов В.А. Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях. *Прикладная механика и техническая физика*. 1963. №1. С. 88–96.

22. Дианов М.Д., Златин Н.А., Мочалов С.М. и др. Ударная сжимаемость сухого и водонасыщенного песка. *Письма в ЖТФ*. 1977. №2. С. 207–208.

23. Брагов А.М., Грушевский Г.М. Влияние влажности и гранулометрического состава на ударную сжимаемость песка. *Письма в ЖТФ*. 1993 Т. 19. С. 385–386.

24. Arlery M., Gardou M., Fleureau J.M., Mariotti C. Dynamic behaviour of dry and water-saturated sand under planar shock conditions. *International Journal of Impact Engineering*. 2010. Vol. 37. P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.07.009>.

25. Брагов А.М., Ломунов А.К., Сергеичев И.В. и др. Методика определения основных физико-механических свойств мягких грунтов при скоростях деформации 10^3 – 10^5 с⁻¹ и амплитудах нагрузок до нескольких гигапаскалей. *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31. №12. С. 83–87. <https://doi.org/10.1134/1.1969791>.

26. Баландин В.В., Брагов А.М., Игумнов Л.А. и др. Динамическое деформирование мягких грунтовых сред: экспериментальные исследования и математическое моделирование. *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 3. С. 69–77. <https://doi.org/10.3103/S002565441503005X>.

27. Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В. и др. Исследование волновых процессов в грунтовой среде при взрыве накладного заряда. *Изв. РАН. МТТ*. 2001. №2. С. 70–78.

References

1. Rakhmatulin Kh.A., Sagomonian A.Ia., Alekseev N.A. *Voprosy dinamiki gruntov [Ground Dynamics Issues]*. Moscow. MGU Publ. 1964. 239 p. (In Russian).

2. Sagomonian A.Ia. *Pronikaniye [Penetration]*. Moscow. MGU Publ. 1974. 299 p. (In Russian).

3. Aptukov V.N., Murzakaev R.T., Fonarev A.V. *Prikladnaya teoriya pronikaniya [Applied Penetration Theory]*. Moscow. Nauka Publ. 1992. 105 p. (In Russian).

4. *Vysokoskorostnoye vzaimodeystviye tel [High-Speed Interaction of Bodies]*. Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk. SB RAS Publ. 1999. 600 p. (In Russian).

5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics – A review. *Appl. Mech. Rev.* 2005. Vol. 58. P. 355–371.

6. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mech. Maters.* 1982. Vol. 1. Iss. 4. P. 285–295.

7. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *Int. J. Imp. Eng.* 1992. Vol. 12. Iss. 3. P. 427–444. [https://doi.org/10.1016/0734-743X\(92\)90167-R](https://doi.org/10.1016/0734-743X(92)90167-R).

8. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *Int. J. Imp. Eng.* 2014. Vol. 73. P. 112–122. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010>.
9. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Keling Zhang, Yihao Cheng, Xiaojuan Zhang. Semi-analytical model for rigid and erosive long rods penetration into sand with consideration of compressibility. *Int. J. Imp. Eng.* 2015. Vol. 83. P. 1–10.
10. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model. *Int. J. Imp. Eng.* 2017. Vol. 100. P. 13–22.
11. Qiran Sun, Yuxin Sun, Yixin Liu, Ruiyu Li, Yayun Zhao. Numerical analysis of the trajectory stability and penetration ability of different lateral-abnormal projectiles for non-normal penetration into soil based on modified integrated force law method. *Int. J. Imp. Eng.* 2017. Vol. 103. P. 159–168.
12. Kotov V.L. Issledovanie primenimosti avtomodelnogo resheniya zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v szhimaemoy srede dlya opredeleniya davleniya na poverkhnosti kontakta “udarnik–grunt” [Studying the applicability of the auto-modeling analysis of the problem of expansion of a spherical cavity in a compressible medium for determining the pressure on the surface of the striker-soil contact]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2008. Iss. 70. P. 123–131 (In Russian).
13. Kotov V.L. Approksimatsiya napryazheniy v okrestnosti polosti, rasshiryayushcheyesa s postoyannoy skorostyu v srede s usloviem plastichnosti Mora – Kulona [Approximating stresses in the vicinity of a cavity expanding at a constant velocity in a medium with the Mohr – Coulomb plasticity condition]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. №2. P. 177–190 (In Russian).
14. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A., Makarova A.A. Analiz priblizhennykh resheniy zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede [The analysis of approximate solutions for a spherical cavity expansion in a soil medium problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 58–63 (In Russian).
15. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Resheniye zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede v predpolozhenii neszhimayemosti za frontom udarnoy volny [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2012. Iss. 74. P. 49–58 (In Russian).
16. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu., Balandin V.V. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. Vol. 54. Iss. 4. P. 612–621. <https://doi.org/10.1134/S0021894413040123>.
17. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *Int. J. Imp. Eng.* 2018. Vol. 122. P. 197–208.
18. Grigorian S.S. K resheniyu zadachi o podzemnom vzryve v myagkikh gruntakh [To the solution of the problem of an underground explosion in soft soils]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1964. Vol. 28. Iss. 6. P. 1070–1082 (In Russian).
19. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Method for identifying elastoplastic properties of ground media by penetration of impactors. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. Iss. 4. P. 678–686. <https://doi.org/10.3103/S002565440804016X>.
20. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental-theoretical study of the penetration of rigid projectiles and identification of soil properties. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2009. Vol. 50. Iss. 6. P. 1011–1019. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0135-6>.
21. Lagunov V.A., Stepanov V.A. Izmereniye dinamicheskoy szhimaemosti peska pri vysokikh davleniyakh [Measurements of the dynamic compressibility of sand under high pressures]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [J. Appl. Mech. Tech. Phys]*. 1963. Vol. 4. Iss. 1. P. 88–96 (In Russian).
22. Dianov M.D., Zlatin N.A., Mochalov S.M. et al. Udarnaya szhimayemost sukhogo i vodonasyschennogo peska [Shock compressibility of dry and water-saturated sand]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Technical Physics Letters]*. 1977. No 2. P. 207–208 (In Russian).

23. Bragov A.M., Grushevskii G.M. Vliyaniye vlazhnosti i granulometricheskogo sostava na udarnuyu szhimayemost peska [Influence of the moisture content and granulometric composition on the shock compressibility of sand]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Technical Physics Letters]*. 1993. Vol. 19. P. 385–386 (In Russian).

24. Arlery M., Gardou M., Fleureau J.M., Mariotti C. Dynamic behaviour of dry and water-saturated sand under planar shock conditions. *Int. J. Imp. Eng.* 2010. Vol. 37. P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.07.009>.

25. Bragov A.M., Lomunov A.K., Sergeichev I.V. et al. A method for determining the main mechanical properties of soft soils at high strain rates (10^3 – 10^5 s⁻¹) and load amplitudes up to several gigapascals. *Technical Physics Letters*. 2005. Vol. 31. Iss. 6. P. 530–531. <https://doi.org/10.1134/1.1969791>.

26. Balandin V.V., Bragov A.M., Igumnov L.A. et al. Dynamic deformation of soft soil media: experimental studies and mathematical modeling. *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50. Iss. 3. P. 286–293. <https://doi.org/10.3103/S002565441503005X>.

27. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V. et al. On wave processes in soil subjected to a surface charge explosion. *Mechanics of Solids*. 2001. Vol. 36. Iss. 2. P. 62–68.

ANALYZING THE SPHERICAL CAVITY EXPANSION PROBLEM IN A MEDIUM WITH MOHR – COULOMB – TRESCA'S PLASTICITY CONDITION

Kotov V.L.¹, Timofeev D.B.²

¹*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

An analytical solution of the one-dimensional problem of a spherical cavity expanding at a constant velocity from a point in a space occupied by a plastic medium has been obtained. Impact compressibility of the medium is described using linear Hugoniot's adiabat. Plastic deformation obeys the Mohr – Coulomb yield criterion with constraints on the value of maximum tangential stresses according to Tresca's criterion. In the assumption of rigid-plastic deformation (the elastic precursor being neglected), incompressibility behind the shockwave front and the equality of the propagation velocities of the fronts of the plastic wave and the plane shockwave defined by linear Hugoniot's adiabat, a boundary-value problem for a system of two first-order ordinary differential equations for the dimensionless velocity and stress depending on the self-similar variable is formulated. A closed-form solution of this problem has been obtained in the form of a stationary running wave – a plastic shockwave propagating in an unperturbed half-space. This solution is a generalization of the earlier obtained analytical solution for a medium with the Mohr – Coulomb plasticity condition. The effect of constraining the limiting value of maximal tangential stresses on the distribution of dimensionless stresses behind the shockwave front has been examined. Formulas for determining the range of cavity expansion velocities, within which a simple solution for a medium with Tresca's plasticity condition is applicable, have been derived. The obtained solution can be used for evaluating resistance to high-velocity penetration of rigid strikers into low-strength soil media.

Keywords: spherical cavity, expansion, analytical solution, elasticity, plasticity, Mohr – Coulomb – Tresca's plasticity condition.