

УДК 532.5+539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА*)

В.Ф. Овчинников, Л.В. Смирнов

Нижний Новгород

Представлены результаты численно-аналитического исследования устойчивости консольного трубопровода как типичной гидроупругой системы. Важной особенностью исследования является то, что разработанный подход позволил получить точное решение задачи. В качестве примера применения подхода и алгоритма численного исследования приведены результаты расчета для классической задачи неконсервативной упругой устойчивости для случая консольного стержня со следящей силой на свободном конце.

Изучение динамических процессов при взаимодействии упругой конструкции с потоком жидкости или газа представляет теоретический интерес, а его результаты имеют важное практическое значение для обоснования работоспособности ряда систем и объектов новой техники. Важную роль играет исследование устойчивости конструкций при гидродинамическом воздействии, которое может существенно зависеть от вызываемой им деформации самой конструкции [1]. В этом случае требуется учет самосопряженного взаимодействия механических и гидродинамических процессов. В настоящей статье представлены результаты численно-аналитического исследования устойчивости консольного трубопровода как типичной гидроупругой системы. Важной особенностью исследования является то, что разработанный подход позволяет получить точное решение задачи.

В качестве примера применения подхода и реализующего его численного алгоритма приведены результаты расчета для классической задачи неконсервативной упругой устойчивости для случая консольного стержня со следящей силой на свободном конце. Полученные результаты совпали с представленными в литературе [2, 3].

1. Математическая модель

Уравнение малых плоских изгибных колебаний представляемого как стержень прямого однородного трубопровода с учетом внутреннего потока несжимаемой жидкости приводится во многих работах. В монографии [1] это уравнение получено из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Состав системы трубопровод–жидкость из-за наличия потока жидкости через входное и выходное сечение трубопровода изменяется, поэтому при выводе использована формулировка принципа, обобщенная на случай переменных масс. Полученное уравнение малых плоских изгибных колебаний имеет вид:

*) Работа поддержана РФФИ (грант № 05-08-50187) и Министерством образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \left(Mv^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2Mv \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

где $y(x, t)$ – поперечное перемещение трубопровода, EI – изгибная жесткость, x – продольная координата, t – время, P – сжимающая нагрузка, ξ – коэффициент трения, m и M – приходящаяся на единицу длины масса оболочки и жидкости соответственно, v – скорость жидкости, предполагающаяся постоянной.

В правой части уравнения (1) стоит выраженная через деформацию оболочки гидродинамическая сила, равная реакции жидкости, направление течения которой в каждом продольном сечении трубопровода определяется деформацией его оси при колебаниях. В соответствии с принятой терминологией и физическим смыслом сил, действующих со стороны трубной оболочки на поток, три слагаемых, составляющих гидродинамическую силу, называют соответственно центробежной, кориолисовой и инерционной.

Использование обобщенной формулировки вариационного принципа позволяет избежать ошибок, встречающихся в ряде работ, и получить вместе с уравнением (1) корректные краевые условия, совпадающие с соответствующими условиями для стержня. В рассматриваемом случае консольного закрепления трубопровода с учетом действия продольной силы на свободном (при $x = l$; l – длина трубопровода) конце имеем:

$$y(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0; \\ EI \left. \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} + P(1 - \beta) \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

где $\beta = 0$, если сила направлена вдоль оси и не меняет своего направления; $\beta = 1$, если сила следящая. При учете внутреннего трения по гипотезе Кельвина–Фохта в уравнении и краевых условиях следует заменить E на оператор $E(1 + \mu \partial / \partial t)$, где μ – коэффициент внутреннего трения. Следует отметить, что при $P = 0$ или $\beta = 1$ второе слагаемое в последнем из краевых условий (2) отсутствует. В этом случае приведенные краевые условия (2) достаточны для исследования динамики конструкции с учетом внутреннего трения, так как нет необходимости добавления в два последних краевых условия производной по времени от тождественно равного нулю выражения.

2. Анализ математической модели

Краевая задача (1), (2) является несамосопряженной [2, 4]. Источником несамосопряженности являются сила Кориолиса, центробежная сила и следящая сжимающая нагрузка на свободном конце. Самосопряженность дифференциального оператора D в рассматриваемом одномерном случае проверяется с помощью проверки выполнения перестановочного соотношения в скалярном произведении $\int_0^l UDV dx$ для двух любых непрерывных, дифференцируемых нужное число раз и удовлетворяющих краевым условиям функций U и V .

После умножения уравнения (1) на $\partial y / \partial t$ и интегрирования по x с учетом краевых условий и внутреннего трения по упомянутой выше гипотезе Кельвина–Фохта в результате преобразований получим следующее выражение для производ-

ной от полной механической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{O} + \Pi) = (Mv^2 + P\beta) \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left[\int_0^l Mv \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} dx \right] - Mv \left[\frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \right]^2 - \\ - \int_0^l \left[\xi \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \mu EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$T + \Pi = \int_0^l \left\{ \frac{M+m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + 2Mv \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} + EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - \left[\frac{Mv^2}{2} + \frac{p}{2} \right] \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx$$

есть сумма кинетической и потенциальной энергии рассматриваемой гидроупругой системы.

Анализ выражения (3) показывает, что неконсервативность рассматриваемой системы трубопровод–жидкость обусловлена двумя факторами. Во-первых, это потери на трение, учет которых приводит к появлению последнего слагаемого в правой части. Во-вторых, это влияние внутреннего потока и следящей силы, вызывающее несамосопряженность задачи и появление первых двух слагаемых в правой части. Связь несамосопряженности задачи и неконсервативности описываемых процессов соответствует сложившемуся представлению о неконсервативной устойчивости [2]. Третье слагаемое, обусловленное силой Кориолиса, свидетельствует о специфическом механизме потерь энергии, которые растут с увеличением скорости потока. При неподвижном входном и подвижном в поперечном направлении, свободном выходном поперечном сечении трубопровода вытекающая жидкость приобретает поперечную скорость, а значит, и дополнительную кинетическую энергию, унося часть энергии колебаний трубы. Этот эффект был обнаружен экспериментально, и его наличие подтверждают проводимые в настоящей работе расчеты. В случае шарнирного или жесткого закрепления, когда $\partial y(x,t)/\partial t|_{x=l} = 0$, этот вид потерь отсутствует.

По виду уравнения (1), краевых условий (2) и выражения (3) можно отметить, что действие следящей сжимающей нагрузки и центробежной силы аналогичны.

3. Метод исследования поведения корней характеристического уравнения задачи

Для перехода к безразмерным уравнениям поделим уравнение (1) на EI/l^4 и проведем замену переменных: $x = l\varphi$, $t = T\tau$, где $T = \sqrt{(m+M)/EI} l^2$. При такой замене переменных для случая следящей силы ($\beta = 1$) задача (1)–(2) с учетом внутренних потерь записывается в виде:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial^5 y}{\partial \varphi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + 2a \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \tau} + \delta \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0; \\ y(0, \tau) = 0; \quad \frac{\partial y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0; \quad \frac{\partial^3 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{\mu}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}; \quad \delta = \frac{\xi l^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}; \quad b = \frac{(Mv^2 + P)l^2}{EI}; \quad a = \frac{Mvl}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}.$$

После подстановки решения в виде $y(\varphi, \tau) = Y(\varphi)e^{\lambda\tau}$ получим краевую задачу на собственные значения:

$$(1 + \gamma\lambda) \frac{d^4 Y}{d\varphi^4} + b \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + 2a\lambda \frac{dY}{d\varphi} + \delta\lambda Y + \lambda^2 Y = 0;$$

$$Y(0) = 0; \quad \left. \frac{dY}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=1} = 0; \quad \left. \frac{d^3 Y}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=1} = 0. \quad (5)$$

Решение этой задачи в частном случае консольного закрепления стержня, то есть при $a = b = \gamma = \delta = 0$, известно [5]. Этим решением можно воспользоваться для контроля описываемой ниже методики и в качестве исходной точки для расчета изменения корней характеристического уравнения задачи (5) в зависимости от значений параметров a и b . Общее решение задачи (5) имеет вид:

$$Y = \sum_{j=1}^4 A_j e^{W_j \varphi},$$

где $W_j(\lambda, a, b, \gamma, \delta)$, $j = \overline{1, 4}$, – корни уравнения

$$(1 + \gamma\lambda)W^4 + bW^2 + 2a\lambda W + \delta\lambda + \lambda^2 = 0. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов A_i ($i = \overline{1, 4}$) из краевых условий задачи имеем систему четырех однородных алгебраических уравнений, нетривиальное решение которой существует при условии равенства нулю дискриминанта этой системы: $F(W_1, W_2, W_3, W_4) = 0$. Это условие играет роль комплексного характеристического уравнения для нахождения характеристических показателей $\lambda(a, b, \gamma, \delta) = h + i\omega$:

$$F_1(h, \omega) = \operatorname{Re} F(W_1, W_2, W_3, W_4) = 0,$$

$$F_2(h, \omega) = \operatorname{Im} F(W_1, W_2, W_3, W_4) = 0. \quad (7)$$

При отсутствии потерь $h = 0$ и для нахождения частот собственных колебаний имеем уравнение $\cos \sqrt{\omega} \operatorname{ch} \sqrt{\omega} + 1 = 0$, корни которого известны [5]: $\omega_1 = 3,516$, $\omega_2 = 22,0345$, $\omega_3 = 61,697$, ...

4. Алгоритм численных расчетов

Анализ зависимости характеристических показателей от параметров a , b и уровня затухания γ , δ базируется на решении системы двух уравнений (7) относительно неизвестных h , ω . В работе использован итерационный алгоритм решения этих уравнений, предполагающий решение двух частных задач. Одна из них связана с вычислением значений функций F_1, F_2 при заданных h и ω , а другая – с выбором удовлетворительного начального приближения $h^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ при реализации итерационного процесса. При вычислении значений функций F_1, F_2 на первом шаге определяются корни W_i ($i = \overline{1, 4}$) уравнения четвертого порядка (6) [6]. С использованием этих корней на втором шаге вычисляется комплексный определитель $F(W_i)$, действительная и мнимая части которого являются выражениями функций F_1, F_2 в системе (7).

В алгоритме итерационного решения уравнений (7) использовано свойство непрерывной зависимости корней от параметров a, b . Реализован процесс плавного изменения параметров a, b с малым шагом $\Delta a, \Delta b$ ($a_{k+1} = a_k + \Delta a, b_{k+1} = b_k + \Delta b$). На шаге $k + 1$ начальное приближение характеристических показателей равно их значениям, вычисленным на предыдущем шаге. При $a=b=\gamma=\delta=0$ известны точные значения характеристических показателей $h + i\omega$, которые играют роль стартовых при работе алгоритма. В окрестности значений параметров a^*, b^* , соответствующих слиянию или разветвлению корней, реализована дополнительная процедура сортировки, основанная на теоретических представлениях о поведении корней вблизи этих критических значений.

5. Результаты расчетов

Безразмерные параметры a, b, γ, δ не являются независимыми, так как выражаются через одни и те же физические и геометрические характеристики рассматриваемой системы. В соответствии с целью работы изучение зависимости характеристических показателей от параметров гидродинамических процессов целесообразно проводить, задав все параметры, кроме скорости жидкости v . Однако с помощью разработанного алгоритма можно провести расчеты при любых других параметрах. С целью тестирования методики выполнен анализ потери устойчивости консольного стержня со следящей силой на свободном конце. Основные расчеты проведены без учета сжимающей силы, то есть при $P=0$. Были заданы следующие значения параметров, соответствующие стальной круглой трубе с потоком воды: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho_{mp} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $l = 1$ м, $R_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $R_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho = 10^3$ кг/м³. Параметры I, M, t выражаются через заданные. Скорость жидкости принимала разные значения, начиная с $v=0$, с различным шагом, который выбирался с учетом изменения характеристических показателей $\lambda_k = h_k + i\omega_k, k = 1, 2, \dots$

Результаты расчетов представлены на рисунках, где изображены годографы характеристических показателей, соответствующих низшим модам собственных колебаний. В силу симметрии графиков относительно оси h , приведена только верхняя часть плоскости $h\omega$. Годографы характеристических показателей для более высоких мод не представляют интереса с точки зрения границы устойчивости и не приводятся.

Рис. 1 соответствует случаю $\gamma=\xi=0$. Потеря устойчивости проявляется в виде флаттера по второй моде колебаний. Критическое значение скорости, отвечающее границе устойчивости, $v_{кр} = 184,9$ м/с.

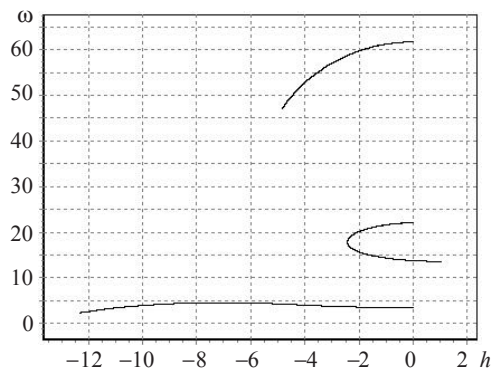


Рис. 1

При этом $a_{кр} = 2,345$, $b_{кр} = 29,65$. Аналогичные расчеты с использованием двухмодового приближения по методу Бубнова–Галеркина дают практически те же результаты. Характеристические показатели, лежащие на мнимой оси при $a = b = 0$ и $\nu = 0$, с ростом скорости смещаются в левую полуплоскость, что связано с влиянием силы Кориолиса в выражении (3). С дальнейшим ростом скорости показатели, соответствующие второй моде колебаний, возвращаются к мнимой оси и переходят в правую полуплоскость.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов соответственно для случая малого внешнего трения ($\delta = 2,52$) и внутреннего трения ($\gamma = 0,0015$). Характеристические показатели стартуют уже не от мнимой оси, а из точки в левой полуплоскости, и потеря устойчивости наступает при бóльших значениях параметров. В случае только внешнего трения $v_{кр} = 202,1$ м/с, $a_{кр} = 2,565$, $b_{кр} = 35,42$. В случае только внутреннего трения $v_{кр} = 187,4$ м/с, $a_{кр} = 2,38$, $b_{кр} = 30,46$.

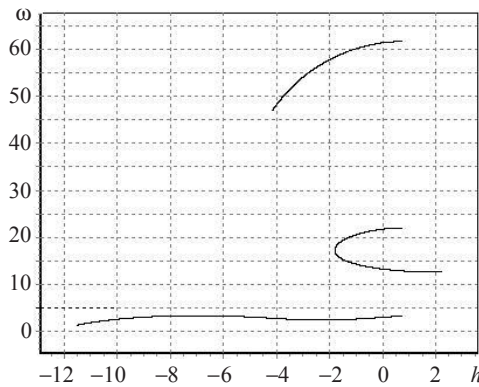


Рис. 2

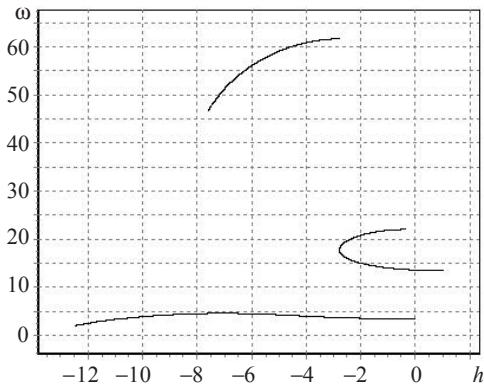


Рис. 3

Исследование устойчивости консольного стержня со следящей силой на свободном конце с использованием разработанного алгоритма показало следующее. Потеря устойчивости происходит при $a = 0$, $b_{кр} = pL^2/(EI) = 20,05$, после слияния первых двух характеристических показателей, годограф которых представлен на рис. 4.

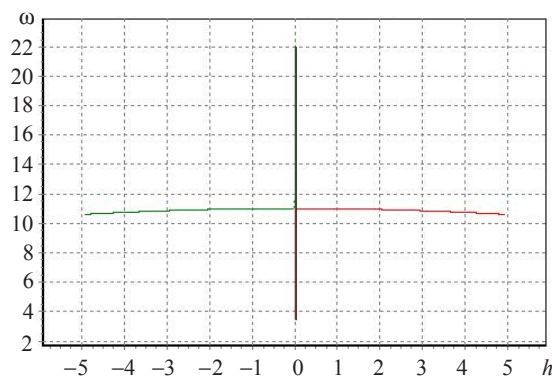


Рис. 4

Найденное критическое значение параметра b очень близко к представленному в монографии [2], где с использованием двухмодового приближения по методу Бубнова–Галеркина при таком же качественном поведении характеристических

показателей получено $b_{кр} = 19,77$. Сравнение установленного в настоящей работе точного значения $b_{кр}$ с указанным приближенным лишнее раз свидетельствует о справедливости приведенного в [2] утверждения, что формы потери устойчивости в несамосопряженных задачах могут быть удачно аппроксимированы при помощи линейной комбинации небольшого числа первых форм собственных колебаний.

Выводы

Разработана и реализована в виде алгоритма численных расчетов методика точного решения задачи на собственные значения, пригодная для анализа динамических свойств прямого трубопровода с движущейся жидкостью. Работоспособность предлагаемого подхода продемонстрирована на примере исследования гидроупругой устойчивости системы наиболее интересного по своим динамическим свойствам консольного трубопровода. Предложенная методика протестирована на примере расчета поведения характеристических показателей в случае консольного стержня со следящей силой на свободном конце.

Литература

1. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / К.В. Фролов [и др.] / Отв. ред. С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов – М.: Наука, 2002. – 397 с.
2. *Болотин, В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
3. *Пановко, Я.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 525 с.
5. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г. Корнева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
6. *Корн, Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

[30.06.2006]

THE NUMERICAL-ANALYTICAL STUDY OF HYDRO-ELASTIC VIBRATIONS OF A CANTILEVER PIPELINE

V.F. Ovchinnikov, L.V. Smirnov

The results of numerically and analytically studying the stability of a cantilever pipeline as a typical hydro-elastic system are presented. An important feature of the present study is that the developed approach makes it possible to obtain the exact solution of the problem. The application of the approach and the algorithm of numerical analysis is illustrated using the results of analysing a classical non-conservative elastic stability problem for a cantilever beam under compression.