

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-191-201

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ  
ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ,  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ СИСТЕМОЙ АРМИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ\***

© 2019 г. **Иванов В.А.<sup>1</sup>, Кибец А.И.<sup>2</sup>, Кибец Ю.И.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,  
Чебоксары, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kibec@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 22.04.2019*

Рассматривается нестационарное деформирование пространственных конструкций, выполненных из кусочно-однородных, изотропных материалов (матрицы), подкрепленных дискретной системой криволинейных стержней, воспринимающих усилия растяжения-сжатия. Предполагается, что количество армирующих стержней сравнительно невелико и их расположение в основном материале может быть нерегулярным. При исследовании таких конструкций методы осреднения, применяемые в механике композиционных материалов, могут стать неприемлемыми. Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа. Уравнение движения выводится из баланса мощности виртуальной работы. Кинематические соотношения определяются в метрике текущего состояния. В качестве уравнений состояния для металлов и сплавов применяются соотношения теории течения. Бетон и кирпичная кладка рассматриваются как разномодульная среда, уравнения состояния которой зависят от вида напряженно-деформированного состояния и уровня поврежденности. Для решения задачи применяется моментная схема метода конечных элементов и явная конечно-разностная схема интегрирования по времени типа «крест». Дискретизация расчетной области основана на восьмиузловых конечных элементах с полилинейной аппроксимацией скорости перемещений. Криволинейные в общем случае армирующие стержни разбиваются на отрезки прямых, положение в пространстве которых определяется координатами точек их пересечения с гранями конечных элементов сетки основного материала. Проскальзывание между арматурой и связующим материалом не рассматривается. Напряжения в стержне заменяются статически эквивалентными силами узлов конечного элемента матрицы, которые проецируются в общую систему координат и суммируются с узловыми силами от напряжений в основном материале и от внешней нагрузки. Для верификации разработанной конечно-элементной методики решен ряд тестовых задач.

*Ключевые слова:* армирование, стержень, матрица, дискретный, динамическое воздействие, метод конечных элементов.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-00986-а).

## Введение

Многие конструкционные материалы представляют собой сплошную среду (матрицу) с одномерными включениями в виде стержней, расположенных специальным образом. Такие материалы нашли широкое применение в строительной индустрии, машиностроении, самолетостроении и т.д. [1–4]. В частности, можно отметить один из эффективных способов сейсмоусиления кирпичных стен – применение монолитных железобетонных аппликаций [5–13], который допускает выполнение работ по наружному контуру без прерывания эксплуатации сооружения. Экспериментально установлено, что для армированного таким способом образца предельная нагрузка повышается в 2-3 раза по сравнению с исходной (неусиленной) кладкой.

В материале, где связующая матрица имеет многочисленные разноориентированные более жесткие включения, трудно установить фактическое распределение деформаций и напряжений. Поэтому в механике композитных материалов для построения определяющих соотношений в этом случае делают некоторые допущения [1–3, 14, 15], на основе которых осуществляют осреднение механических свойств, учитывающее удельный вклад базовой среды и подкреплений. Однако при сравнительно малом количестве подкреплений и нерегулярности их расположения в основном материале такой подход становится неприемлемым. В связи с этим были разработаны конечно-элементные модели деформирования конструкций из изотропного материала [16, 17], армированного стержнями, работающими на растяжение-сжатие при статическом нагружении. В настоящей статье изложенный в [16, 17] подход развит для решения трехмерных задач динамики.

## 1. Определяющие соотношения и метод решения

Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред [18, 19]. Гипотезы, принятые в теории стержней, вводятся на этапе дискретизации задачи, что позволяет упростить их стыковку с основным материалом. Движение деформируемой конструкции будем описывать уравнением, следующим из вариационного принципа баланса мощности виртуальной работы [20]:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij}^c \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^c (1 - \alpha) + \sigma_{ij}^a \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^a \alpha] dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} p_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} q_i \delta \dot{U}_i d\gamma. \quad (1)$$

В (1) приняты следующие обозначения:  $\Omega$  – область в пространстве, занимаемая деформируемой конструкцией;  $\Gamma_p$  – граничная поверхность, на которой приложен импульс внешнего давления;  $\Gamma_q$  – поверхность контакта;  $U = [U_1 U_2 U_3]^T$  – перемещения в общей неподвижной системе координат  $X = [X_1 X_2 X_3]^T$ ;  $p = [p_1 p_2 p_3]^T$  – поверхностная нагрузка;  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31}]^T$ ,  $\{\sigma\} = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}]^T$  – векторы, составленные из компонент тензоров деформаций и напряжений;  $q = [q_1 q_2 q_3]^T$  – давление в зоне контакта. Точка над переменной означает частную производную по времени, индекс T – операцию транспонирования, по повторяющимся индексам ведется суммирование; символами  $c, a$  помечены компоненты тензоров в связующем материале и в армирующих элементах;  $\alpha$  – интенсивность армирования (содержание арматуры);  $\rho$  – плотность армированного материала:

$$\rho = \rho^c (1 - \alpha) + \rho^a \alpha, \quad (2)$$

$\rho^c, \rho^a$  – плотности материалов матрицы и армирующих элементов. Связь между скоростями деформаций и скоростями перемещений описывается соотношениями Коши в текущей метрике. В качестве уравнений состояния для металлов и сплавов применяются соотношения теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [21], а для бетона или кирпичной кладки – соотношения разномодульной среды, учитывающие накопление повреждений [22, 23].

Решение задачи при заданных начальных и граничных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [19, 24–26]. Для учета дискретного расположения подкрепляющих стержней разработан конечный элемент, описывающий взаимодействие сплошной среды и арматуры. Основным материалом конструкции разбивается с помощью шестигранных 8-узловых изопараметрических конечных элементов, в узлах которых определяются перемещения  $\{U\}$ , скорости перемещений  $\{\dot{U}\}$  и ускорения  $\{\ddot{U}\}$  в общей системе координат  $X = [X_1 X_2 X_3]^T$ . Для аппроксимации скорости перемещений внутри конечного элемента применяются полилинейные функции формы:

$$\dot{U}_i = \sum_{k=1}^8 \dot{U}_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad N_k = \left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^k}\right) \left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_2^k}\right) \frac{1 + \xi_3/\xi_3^k}{8}, \quad (3)$$

$$-1 \leq \xi_i \leq 1, \quad i = \overline{1, 3},$$

где  $\dot{U}_i^k$  –  $i$ -я компонента скорости перемещений узла  $k$  в общем базисе. Скорости деформаций  $\dot{\epsilon}$  внутри конечного элемента (КЭ) аппроксимируются линейными функциями в виде суммы безмоментных и моментных составляющих. Аппроксимация напряжений в конечных элементах массивных тел и оболочек приведена в [25, 26].

Осевые линии подкрепляющих стержней могут не совпадать с линиями конечно-элементной сетки (КЭ-сетки) матрицы. Криволинейные в общем случае стержни разбиваются на отрезки прямых, положение в пространстве которых определяется координатами точек их пересечения с гранями конечных элементов сетки основного материала  $X_i^l$  [16]. Проскальзывание между арматурой и связующим материалом не рассматривается. Компоненты скорости перемещений стержней в точках  $X_i^l$  вычисляются по формулам (3). Деформации и напряжения в стержне аппроксимируются в локальной системе координат, отслеживающей смещение его оси [27]. Перерезывающими силами, крутящим и изгибающими моментами в стержнях пренебрегаем. Напряжения в стержне заменяются статически эквивалентными силами узлов конечного элемента матрицы, которые проецируются в общую систему координат и суммируются с узловыми силами от напряжений в основном материале и от внешней нагрузки. Результирующие узловые силы подставляются в дискретный аналог уравнения движения КЭ-сетки расчетной области, который интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Таким образом, выражая компоненты скорости перемещений и скорости деформаций в подкрепляющих стержнях через узловые скорости перемещений КЭ-сетки основного материала, можно учесть дискретность армирующей системы, не вводя дополнительных степеней свободы в дискретную модель конструкции. Увеличение трудоемкости расчета сводится к минимуму, если есть возможность совместить осевые линии армирующих стержней с линиями КЭ-сетки матрицы [17].

## 2. Результаты вычислительных экспериментов

Изложенная методика расчета дискретно армированных конструкций реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [28].

В качестве тестового примера рассмотрен динамический изгиб жестко закрепленной на торцах балки длиной  $L_1 = 100$  см. Поперечное сечение балки с расположением армирующих стержней, где  $L_2 = 22$  см,  $L_3 = 11$  см, приведено на рис. 1. Постоянное давление  $P = 0,1$  МПа приложено к верхней лицевой поверхности.

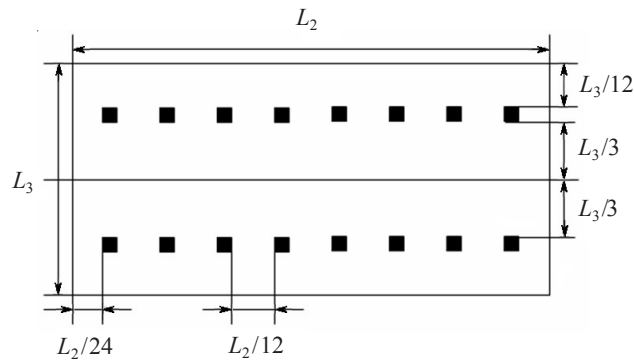


Рис. 1

Анализировались два варианта: бетонная балка и железобетонная балка с продольным армированием стальными стержнями. Бетон моделировался упругой средой ( $\rho^c = 2,167$  г/см<sup>3</sup>, модуль упругости  $E^c = 20$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu^c = 0,15$ ). Для стали задавались следующие значения механических характеристик:  $\rho^a = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E^a = 200$  ГПа,  $\mu^a = 0,3$ . С учетом симметрии в качестве расчетной области рассматривалась 1/4 часть балки ( $X_1 < L_1/2$ ,  $X_2 < L_2/2$ ), которая разбивалась на 7200 КЭ. Результаты решения задачи отображены на рис. 2 в виде графиков зависимости от времени  $t$  продольных напряжений  $\sigma_{11}$  в центре нижней лицевой поверхности железобетонной балки, отнесенных к их максимальному значению  $\sigma_{\max}$  в бетонной балке.

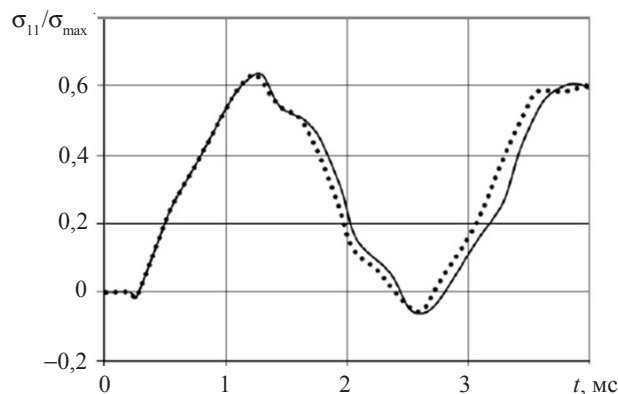


Рис. 2

Пунктирная линия соответствует расчету по предлагаемой методике, сплошная линия – конечно-элементный расчет с выделением и дискретизацией арматуры. Анализ результатов расчетов показал, что применение армирования снижает в рассмат-

риваемой задаче уровень продольных растягивающих напряжений в бетоне в 1,5 раза. Расхождение графиков на рис. 2 не превышает 5%. Предлагаемая методика позволила сократить время решения задачи примерно в 2 раза. Экономия достигнута в основном за счет увеличения шага интегрирования по времени уравнений динамики армирующих стержней.

Рассмотрен упругий изгиб квадратной пластины ( $L_1 = 8$  см,  $L_2 = 8$  см,  $L_3 = 2$  см), шарнирно опертой по контуру на нижней поверхности. На верхней поверхности пластины приложено давление  $P = \text{const} = 10$  МПа. В качестве расчетной области рассматривалась 1/4 часть пластины ( $X_1 < L_1/2$ ,  $X_2 < L_2/2$ ), которая разбивалась на 4000 конечных элементов. Схема армирования пластины стальными стержнями с квадратным поперечным сечением  $0,2 \times 0,2$  см приведена на рис. 3.

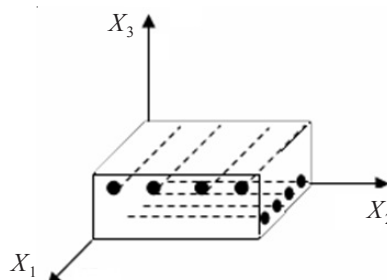


Рис. 3

На рис. 4 изображены графики изменения во времени компоненты напряжений  $\sigma_{11}$ , определенных в КЭ, примыкающем к центру нижней лицевой поверхности пластины. На графике  $\sigma_{\text{max}}$  – максимальное значение  $\sigma_{11}$  в бетонной пластине, пунктирной и сплошной линиями представлены результаты, соответствующие расчету железобетонной пластины с применением разработанной методики и конечно-элементной модели с выделением и дискретизацией арматуры соответственно. Как и в предыдущей задаче, разработанная методика позволила достичь хорошей точности численного решения (расхождение графиков на рис. 4 не превышает 3%).

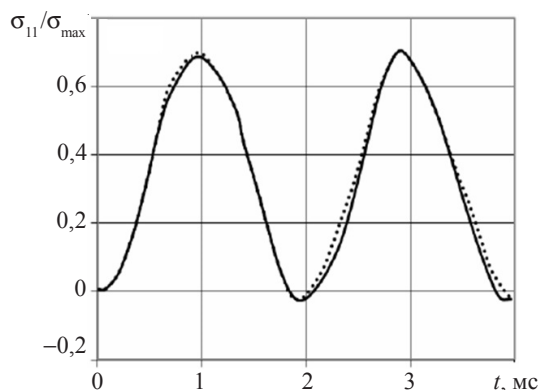


Рис. 4

Проведен расчет изгиба жестко заделанной на торце упругой цилиндрической оболочки ( $L = 20$  см,  $R_1 = 5$  см,  $R_2 = 5,5$  см, рис. 5) под действием давления, изменение во времени и пространстве которого описывается формулой:

$$P = P_t \times P_\phi, \quad P_t = \text{const} = 1 \text{ МПа}, \quad P_\phi = \begin{cases} X_3/R, & X_3 \geq 0, \\ 0, & X_3 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Рассматривались два варианта задачи: а) бетонная оболочка, б) железобетонная оболочка с продольным армированием на срединной поверхности. Схема армирования приведена на рис. 5.

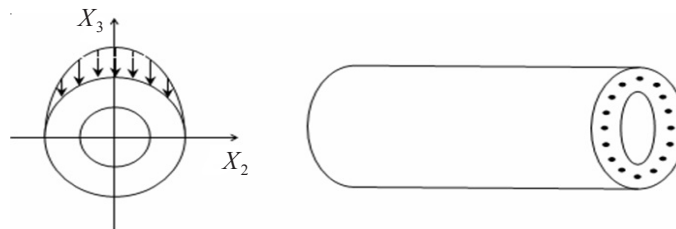


Рис. 5

В качестве арматуры использовались стальные стержни с квадратным поперечным сечением 0,1×0,1 см. Результаты решения задач приведены на рис. 6 в виде графиков временной зависимости прогиба на свободном торце оболочки. Расхождение результатов, полученных с помощью разработанной методики и конечно-элементной модели с выделением и дискретизацией армирующих стержней, не превышает 5%. Смещение армирующих стержней к внешней лицевой поверхности уменьшает максимальный прогиб оболочки еще на 20%.

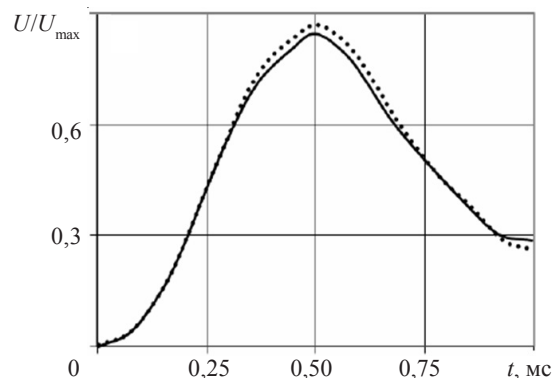


Рис. 6

Для обоснования применимости разработанной конечно-элементной методики в задачах накопления повреждений с учетом разномодульности основного материала проведено численное моделирование динамического изгиба бетонной балки (40×10×10 см). Условия закрепления и схема нагружения балки приведены на рис. 7а. Для механических и прочностных характеристик бетона задавались следующие значения: плотность  $\rho = 2,3 \text{ г/см}^3$ , модуль сдвига  $G = 12 \text{ ГПа}$ , модуль объемного сжатия  $K = 14 \text{ ГПа}$ , предел прочности на сжатие  $\sigma^s = 0,02 \text{ ГПа}$ , предел прочности на растяжение  $\sigma^R = 0,002 \text{ ГПа}$ . Арматура (по 4 стержня квадратного поперечного сечения 1×1 см, смещенных на 1 см от верхней и нижней лицевых поверхностей) предполагалась выполненной из стали ( $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\mu = 0,3$ ). Зависимость внешней нагрузки от времени задавалась формулой

$$F = \begin{cases} F_0 t / T_0 & \text{при } t < T_0, \\ F_0 & \text{при } t \geq T_0, \end{cases} \quad (5)$$

а ее параметры определялись из вычислительных экспериментов, в которых  $F_0$  постепенно увеличивалось до тех пор, пока в бетоне не нарушалось условие прочности.

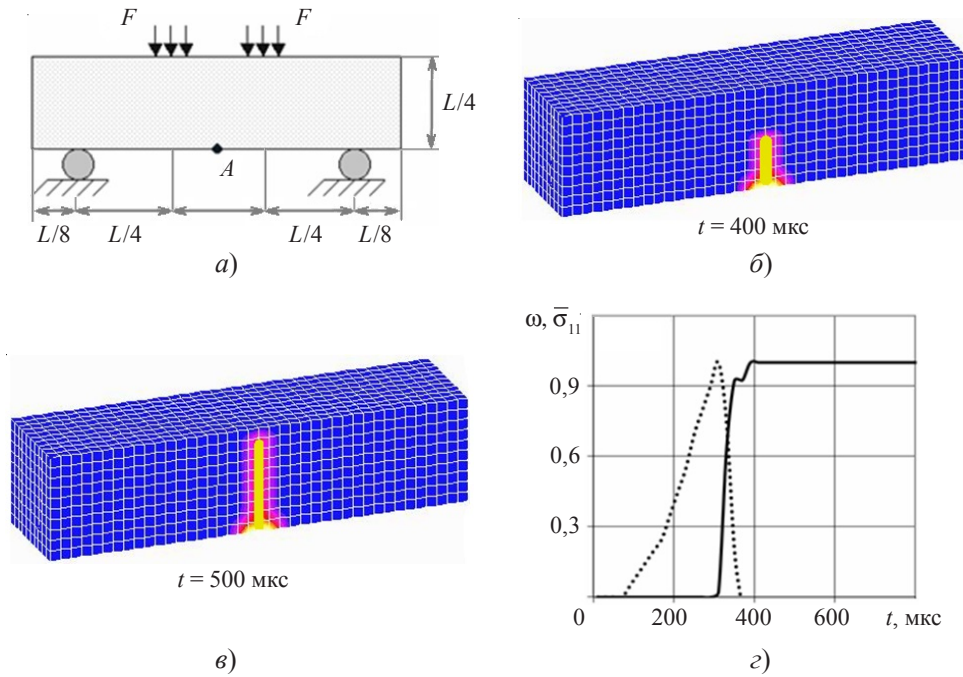


Рис. 7

Результаты решения задачи без учета армирования отображены в виде КЭ-сеток расчетной области с нанесенным на них распределением меры поврежденности  $\omega$  (рис. 7б, в), а также графиков временной зависимости  $\omega$  (рис. 7г, сплошная линия) и приведенных продольных напряжений  $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} / \sigma^R$  (рис. 7г, пунктирная линия), определенных в КЭ, примыкающем к узлу  $A$ , отмеченному на рис. 7а. Расположение трещины в бетонной балке подтверждается экспериментальными данными [29]. Если в расчете не учитывать различие пределов прочности бетона на растяжение и сжатие ( $\sigma^s = \sigma^R$ ), разрушение балки при таком нагружении будет происходить иначе. Сначала возникают разрушения в зонах приложения внешнего воздействия, затем в области опор, и лишь потом образуются вертикальные трещины в центре балки, которые распространяются от сжатой и растянутой лицевых поверхностей балки. Применение продольного армирования стальными стержнями на лицевых поверхностях балки препятствует ее разрушению в центральной части. Однако, по расчетным данным, в этом случае возможно поверхностное разрушение бетона в области опор (отслоение бетона от армирующих стержней).

### Заключение

Разработана конечно-элементная методика решения геометрически и физически нелинейных задач нестационарного деформирования дискретно армированных

конструкционных материалов. Результаты верификационных расчетов показали, что разработанная методика обеспечивает хорошую точность решения. За счет увеличения шага интегрирования по времени она существенно сокращает время решения задачи.

#### Список литературы

1. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
2. Немировский Ю.В. Проблемы и методы расчета и проектирования конструкций из армированного бетона. *Известия Алтайского государственного университета*. 2014. №1 (81). С. 90–95.
3. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель. *Механика композитных материалов*. 2010. Т. 46. №5. С. 663–678.
4. Якименко О.В., Матвеев С.А. Моделирование напряженного состояния армированных ледовых образцов-балок. *Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии*. 2011. №3 (21). С. 39–44.
5. Коноводченко В.И. Усиление стен кирпичных зданий для повышения их сейсмостойкости. *Сейсмостойкость крупнопанельных и каменных зданий*. М.: Стройиздат, 1967. С. 180–186.
6. Мартемьянов А.И., Ширин В.В. *Способы восстановления зданий и сооружений, поврежденных землетрясением*. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
7. Джабаров М. Исследование прочности поврежденной кирпичной кладки, усиленной армированными штукатурными слоями. *Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений*. Душанбе: Дониш, 1980. С. 168–174.
8. Тонких Г.П., Симаков О.А., Симаков А.Б. и др. Экспериментальные исследования сейсмоусиления каменной кладки наружными бетонными аппликациями. *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2011. №2. С. 35–41.
9. Баранова Т.И., Туманов А.В. *Прочность и устойчивость каменных и армокаменных конструкций*. Пенза: ПГУАС, 2013. 280 с.
10. Туманов А.В. *Экспериментальные исследования армокирпичных стен*. Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 144 с.
11. Ward S.P. Retrofitting existing masonry buildings to resist explosions. *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2004. Vol. 18. No 2. P. 95–99.
12. King K.W., Wawlawczyk J.H., Ozbey C. Retrofit strategies to protect structures from blast loading. *Canadian Journal of Civil Engineering*. 2009. Vol. 36. No 8. P. 1345–1355.
13. Hayes J.R., Woodson S.C., Pkelnicky R.G., Poland C.D., Corley W.G., Sozen M. Can strengthening for earthquake improve blast and progressive collapse resistance? *Journal of Structural Engineering*. 2005. Vol. 131. No 8. P. 1157–1177.
14. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
15. Матвеев С.А., Мартынов Е.А. Способы конечно-элементного моделирования армированных конструкций. *Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии*. 2014. №4 (38). С. 77–83.
16. Паймушин В.Н., Пискунов А.А., Голованов А.И. Численное моделирование общего напряженно-деформированного состояния трехмерных тел с дискретными нерегулярными включениями в виде стержней. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1998. Вып. 58. С. 3–10.
17. Ботенкова Л.Г., Капустин С.А., Гланева Н.А. Исследование процессов деформирования и разрушения конструкций, подкрепленных системой армирующих элементов. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика*. 2000. Вып. 2. С. 57–61.
18. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.



19. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York: John Wiley & Sons, 2000. 600 p.
20. Коробейников С.Н. *Нелинейное деформирование твердых тел*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
21. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
22. Капустин С.А., Лихачева С.Ю. Численный анализ поведения конструкций из кусочно-однородных материалов, имеющих блочно-периодическую структуру. *Проблемы прочности и пластичности*. 2000. Вып. 62. С. 93–100.
23. Качанов Л.М. *Основы теории разрушения*. М.: Наука, 1974. 312 с.
24. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
25. Баженов В.Г., Жестков М.Н., Замятин В.А., Кибец А.И. Математическое моделирование развития запроектной аварии внутри корпуса реактора на быстрых нейтронах. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2015. №3. С. 5–14.
26. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях. *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. №1. С. 13–22.
27. Баженов В.Г., Кибец А.И., Кибец Ю.И. Расчет нестационарного упругопластического деформирования пространственных стержней. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1998. Вып. 58. С. 122–128.
28. *Вычислительный комплекс «Динамика-3»*. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.
29. *Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам*. ГОСТ 10180-90 (СТ СЭВ 3978-83).

#### References

1. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy [Nonlinear Problems of the Dynamics of Composite Structures]*. Nizhniy Novgorod: NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).
2. Nemirovsky Ju.V. Problemy i metody rascheta i proyektirovaniya konstruksiy iz armirovannogo betona [Problems and methods of structural design of reinforced concrete constructions]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta [Izvestiya of Altai State University Journal]*. 2014. No 1 (81). P. 90–95 (In Russian).
3. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. *Mechanics of Composite Materials*. 2010. Vol. 46. Iss. 5. P. 451–460.
4. Iakimenko O.V., Matveev S.A. Modelirovaniye napryazhenogo sostoyaniya armirovannykh ledovykh obraztsov-balok [Simulation of the stress state of reinforced ice beams]. *Vestnik Sibirskoy gosudarstvennoy avtomobilno-dorozhnoy akademii [Bulletin of the Siberian State Automobile and Highway Academy]*. 2011. No 3 (21). P. 39–44 (In Russian).
5. Konovodchenko V.I. Usileniye sten kirpichnykh zdaniy dlya povysheniya ikh seysmostoykosti. [Strengthening the walls of brick buildings to improve their seismic resistance]. *Seysmostoykost krupnopanelnykh i kamennykh zdaniy [Seismic Resistance of Large-panel and Stone Buildings]*. Moscow. Stroizdat Publ. 1967. P. 180–186 (In Russian).
6. Martemianov A.I., Shirin V.V. *Sposoby vosstanovleniya zdaniy i sooruzheniy, povrezhdennykh zemletryaseniyem [Ways to Restore Buildings and Structures Damaged by an Earthquake]*. Moscow. Stroizdat Publ. 1978. 204 p. (In Russian).
7. Dzhabarov M. Issledovaniye prochnosti povrezhdennoy kirpichnoy kladki, usilennoy armirovannymi shtukатурными слоями [Investigation of the strength of damaged brickwork, reinforced with reinforced plaster layers]. *Dinamika i seysmostoykost zdaniy i sooruzheniy [Dynamics and Seismic Resistance of Buildings and Structures]*. Dushanbe. Donish Publ. 1980. P. 168–174 (In Russian).
8. Tonkikh G.P., Simakov O.A., Simakov A.V. et al. Eksperimentalnyye issledovaniya seysmoussileniya kamennoy kladki naruzhnymi betonnyimi applikatsiyami [Experimental studies of masonry

aseismic reinforcement using external concrete applications]. *Seysmostoykoye stroitelstvo. Bezopasnost sooruzheniy* [Earthquake Resistant Construction. Building Safety]. 2011. No 2. P. 35–41 (In Russian).

9. Baranova T.I., Tumanov A.V. *Prochnost i ustoychivost kamennykh i armokamennykh konstruksiy* [Strength and Stability of Stone and Reinforced Stone Structures]. Penza. PGUAS Publ. 2013. 280 p. (In Russian).

10. Tumanov A.V. *Erimental'nyye issledovaniya armokirpichnykh sten* [Experimental Studies of Reinforced Brick Walls]. Saarbrücken, Deutschland. LAP Lambert Academic Publishing. 2011. 144 p. (In Russian).

11. Ward S.P. Retrofitting existing masonry buildings to resist explosions. *J. Perform. Constr. Fac.* 2004. Vol. 18. No 2. P. 95–99.

12. King K.W., Wawclawczyk J.H., Ozbey C. Retrofit strategies to protect structures from blast loading. *Can. J. Civil. Eng.* 2009. Vol. 36. No 8. P. 1345–1355.

13. Hayes J.R., Woodson S.C., Pekelnicky R.G., Poland C.D., Corley W.G., Sozen M. Can strengthening for earthquake improve blast and progressive collapse resistance? *J. Struct. Eng.* 2005. Vol. 131. No 8. P. 1157–1177.

14. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivleniye polimernykh i kompozitnykh materialov* [Resistance of Polymeric and Composite Materials]. Riga. Zinatne Publ. 1980. 571 p. (In Russian).

15. Matveev S.A., Martynov E.A. Sposoby konechno-elementnogo modelirovaniya armirovannykh konstruksiy [Ways of finite element modeling of reinforced structures]. *Vestnik Sibirskoy gosudarstvennoy avtomobi'no-dorozhnoy akademii* [Bulletin of the Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2014. No 4 (38). P. 77–83 (In Russian).

16. Paimushin V.N., Piskunov A.A., Golovanov A.I. Chislennoye modelirovaniye obshchego napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhmernykh tel s diskretnymi neregulyarnymi vklucheniymi v vide sterzhney [Numerical simulation of the general stress-strain state of three-dimensional bodies with discrete irregular inclusions in the form of rods]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti* [Applied Problems of Strength and Plasticity]. 1998. Iss. 58. P. 3–10 (In Russian).

17. Botenkova L.G., Kapustin S.A., Glaneva N.A. Issledovaniye protsessov deformirovaniya i razrusheniya konstruksiy, podkreplennykh sistemoy armiruyushchikh elementov [The study of the processes of deformation and destruction of structures, supported by a system of reinforcing elements]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya Mekhanika* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Series Mechanics]. 2000. Iss. 2. P. 57–61 (In Russian).

18. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Yu.I. *Bolshiyeye uprugoplasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large Elastic-plastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications]. Moscow. Nauka Publ. 1986. 232 p. (In Russian).

19. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York. John Wiley & Sons. 2000. 600 p.

20. Korobeinikov S.N. *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* [Nonlinear Deformation of Solids]. Novosibirsk. SB RAS Publ. 2000. 262 p. (In Russian).

21. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of State Viscoelasticoplastic Environments with Injuries]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).

22. Kapustin S.A., Likhacheva S.Yu. Chislennyy analiz povedeniya konstruksiy iz kusochno-odnorodnykh materialov, imeyushchikh blochno-periodicheskuyu strukturu [Numerical analysis of structure behavior made from piecewise-homogeneous materials with block-periodic structure]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2000. Iss. 62. P. 93–100 (In Russian).

23. Kachanov L.M. *Osnovy teorii razrusheniya* [Fundamentals of the Theory of Destruction]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 312 p. (In Russian).

24. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [The Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-walled Structures]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 391 p. (In Russian).

25. Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Zamyatin V.A., Kibets A.I. Matematicheskoye modelirovaniye

razvitiya zaproyektnoy avarii vnutri korpusa reaktora na bystrykh neytronakh [Mathematical modeling of development of beyond design basis accident in integral fast-neutron reactors vessel]. *Vestnik Permskogo natsionalno-issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 3. P. 5–14 (In Russian).

26. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V. Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading. *J. Appl. Mech. Tech. Ph.* 2014. Vol. 55. Iss. 1. P. 8–15.

27. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Kibets Yu.I. Raschet nestatsionarnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya prostranstvennykh sterzhney [Calculation of non-stationary elastoplastic deformation of spatial rods]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti [Applied Problems of Strength and Plasticity]*. 1998. Iss. 58. P. 122–128 (In Russian).

28. *Vychislitelnyy kompleks "Dinamika-3"* [Computing Complex "Dynamics-3"]. Nauchno-tekhnicheskii tsentr po yadernoy i radiatsionnoy bezopasnosti. Attestatsionnyy pasport programmnoy sredstva. Registratsionnyy pasport attestatsii PS № 325 ot 18.04.2013 [Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Certification passport software. Registration certificate of certification PS No 325 dated 04.18.2013] (In Russian).

29. *Betony. Metody opredeleniya prochnosti po kontrolnym obraztsam*. GOST 10180-90 (ST SEV 3978-83) [Concretes. Methods for Determining the Strength of the Control Samples. GOST 10180-90 (ST SEV 3978-83)] (In Russian).

#### **A FINITE-ELEMENT METHODOLOGY OF ANALYZING A 3D PROBLEM OF DYNAMICS OF STRUCTURES STIFFENED BY A SYSTEM OF REINFORCING RODS**

**Ivanov V.A.<sup>1</sup>, Kibets A.I.<sup>2</sup>, Kibets Yu.I.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Nonstationary deformation of spatial structures made of piecewise-homogeneous isotropic materials (matrices), stiffened by a discrete system of curvilinear rods sustaining effects of tension-compression, is considered. It is assumed that the number of reinforcing rods is not large and their arrangement in the main material can be irregular.

In analyzing such structures, the averaging methods used in mechanics of composite materials may become inapplicable. The defining equation set is formulated in Lagrange variables. Equations of motion are derived from the virtual work power balance. Kinematic relations are defined in the metrics of a current state. Relations of Beton's yield theory are used as equations of state for metals and alloys, and masonry is considered as a hetero-modular medium, the equations of state of which depend on the type of stressed-strained state and damage degree. The problem is analyzed using a momentary scheme of the finite element method and a cross-type explicit finite-difference time integration scheme. The analyzed region is discretized using 8-node finite elements with a polynomial approximation of displacement velocities. The curvilinear, in a general case, reinforcing rods are discretized into straight sections, the spatial location of which is defined by the coordinates of the points of their intersection with the sides of the finite elements of the mesh of the main material. Slipping between the reinforcement and the binding material is not considered. Stresses in the rod are substituted for by statically equivalent forces of the nodes of the finite element of the matrix, which are projected onto a common coordinate system and summed with node forces from stresses in the main material and external loading. To verify the developed finite-element methodology, a number of benchmark problems have been analyzed.

*Keywords:* reinforcement, rod, matrix, discrete, dynamic effect, finite-element method.