

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-177-190

**АППРОКСИМАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ  
ПОЛОСТИ, РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ  
В СРЕДЕ С УСЛОВИЕМ ПЛАСТИЧНОСТИ МОРА – КУЛОНА\***

© 2019 г.

**Котов В.Л.**

*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

*vkotov@inbox.ru*

*Поступила в редакцию 28.02.2019*

Рассматривается одномерная задача о расширении сферической полости с постоянной скоростью из точки в бесконечной упругопластической среде. Задача имеет автомодельное решение первого рода. Упругопластическое деформирование грунта описывается с помощью линейного закона Гука и критерия текучести Мора – Кулона. Получено аналитическое решение задачи в упругой области, контактирующей с областью пластического течения. Для определения полей напряжений и скоростей в пластической области реализован известный алгоритм на основе метода стрельбы решения краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, включающий в себя метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Эффективный алгоритм численного решения задачи о расширении полости, предложенный ранее в работах М. Форрестола с соавторами, позволяет получить решение задачи с достаточной для практического применения точностью.

Получена формула для определения критического давления – минимального давления, необходимого для образования полости при учете внутреннего трения в рамках критерия текучести Мора – Кулона, обобщающая известное решение для упруго-идеально-пластической среды с критерием Треска. Полученное в результате критическое давление сравнивалось с численным решением в полной постановке при близких к нулю скоростях расширения полости в широком диапазоне изменения параметров критерия текучести Мора – Кулона. Показано, что ошибка аппроксимации предложенной формулы не превышает 6% при изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне и начального значения предела текучести на три порядка.

*Ключевые слова:* расширение сферической полости, автомодельное решение, упругость, пластичность, условие текучести Мора – Кулона.

### **Введение**

При решении задач удара и проникания в сплошные среды широкое распространение [1–6] получил приближенный подход, в соответствии с которым давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внут-

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00430).

ренной поверхности сферической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса, – метод расширения полости. Аналитические решения задачи о расширении сферической полости в несжимаемой упругопластической среде [4–6] применены для оценки сил сопротивления и глубин проникания жестких и деформируемых ударников в металл, бетон и грунт. Было отмечено [6] незначительное влияние учета сжимаемости для металлов при скоростях удара до 1 км/с. Для пористых и мягких грунтовых сред сжимаемость необходимо учитывать. Интерес к данной проблематике не ослабевает и в настоящее время, о чем свидетельствуют дискуссии [7–9] и [10–12].

Задача о расширении полости является классической задачей механики деформируемого твердого тела, решению которой в середине прошлого века были посвящены исследования Р. Хилла, Р. Бишопа, Г. Хопкинса, А.Я. Сагомоняна, Н.В. Зволлинского и других авторов. Известно много постановок этой задачи, различающихся по способу учета сжимаемости материала – линейно сжимаемая среда [13], несжимаемая среда или среда с ограниченной предельной деформацией [14, 15]; по принимаемому критерию текучести – критерию Треска [13, 16], Мора – Кулона [14], Мора – Кулона с ограничением Треска [15]. В статьях [17–20] получены аппроксимации зависимости давления на стенке полости от скорости ее расширения при изменении механических характеристик материала, проведен параметрический анализ полученных решений. Для несжимаемой упругопластической среды получены аналитические решения при различных видах критерия текучести. Для сжимаемых сред предложен эффективный численный алгоритм [13], основанный на итерационном методе численного решения краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Этот алгоритм позволяет получить решение задачи с достаточной для практического применения точностью [21, 22], в том числе при нелинейных зависимостях уравнения состояния среды. В целом можно отметить, что к настоящему времени решение задачи о расширении полости и методы расчета нагрузок на проникающее тело достаточно хорошо проработаны. Учет нелинейных свойств материала при решении задач проникания в сжимаемые упругопластические среды также не представляет проблемы при численном решении задачи о полости [23–26].

Однако аналитические решения этой задачи или аппроксимации результатов численных решений по-прежнему представляют интерес, в том числе в многочисленных приложениях динамики удара. Существующие в конечном виде решения получены в основном с учетом условия текучести Треска. Это объясняется тем, что проблемная область приложения методики на основе решения задачи о полости сформирована в большинстве случаев задачами ударного деформирования металлов и сплавов, для которых модель упруго-идеально-пластической среды с условием текучести Треска или Мизеса получила широкое распространение.

В настоящей статье получена формула для определения критического давления – минимального давления, необходимого для образования полости при учете внутреннего трения в рамках критерия текучести Мора – Кулона, обобщающая известное решение для упруго-идеально-пластической среды с критерием Треска. Полученное решение может быть применено при решении задач о расширении сферической полости в пористых грунтовых средах и геоматериалах.

## 1. Постановка начально-краевой задачи для системы уравнений в частных производных

Математическая модель осесимметричной упругопластической среды описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы неразрывности и изменения количества движения, которая в сферических эйлеровых координатах  $(r, \varphi, \psi)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) &= - \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= -\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность в деформированном состоянии,  $v$  – скорость,  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi = \sigma_\psi$  – радиальная, окружная и меридиональная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии),  $r$  – радиальная координата.

Система уравнений (1) замыкается зависимостью давления  $p$  от объемной деформации  $\theta$ , линейной или близкой к линейной при малых деформациях:

$$p = f(\theta) = K\theta + O(\theta^2), \quad (2)$$

где  $K$  – упругий модуль объемного сжатия.

Полагаем, что в области, ограниченной радиусами  $r_0 = Vt$  и  $r = ct$ , среда деформируется пластически с линейной зависимостью Мора – Кулона

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = Y + kp, \quad (3)$$

где  $V$  – скорость расширения полости,  $c$  – скорость перемещения границы раздела областей упругого и пластического деформирования,  $Y$  и  $k$  – начальное значение предела текучести и коэффициент внутреннего трения.

В примыкающей области упругого деформирования, которая ограничена координатой  $r_e = c_e t$ , компоненты тензора напряжений связаны с деформациями законом Гука с упругими модулями  $K$  и  $G$ , где  $c_e = \sqrt{(K + 4G/3)/\rho_0}$  – скорость распространения плоской упругой волны,  $G$  – модуль сдвига,  $\rho_0$  – начальная плотность.

Из условия текучести  $s_r - s_\varphi = Y + kp$  следуют равенства  $s_r = 2(Y + kp)/3$ ,  $s_\varphi = -(Y + kp)/3$ , так как в силу сферической симметрии имеем  $s_r + 2s_\varphi = 0$ , где  $s_r$  и  $s_\varphi$  – радиальная и окружная компоненты тензора-девиатора напряжений,  $\sigma_r = s_r + p$ .

Подставив полученные соотношения в (3), будем иметь связь  $\sigma_r$  и  $p$ :

$$\sigma_r = \frac{2}{3}Y + \left(1 + \frac{2}{3}k\right)p, \quad p = \frac{\sigma_r - 2Y/3}{1 + 2k/3},$$

что позволит преобразовать выражение (3) к виду

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = Y + \frac{k}{1 + 2k/3} \sigma_r = Y + \mu \sigma_r, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\mu = \frac{k}{1 + 2k/3}.$$

Приведем постановку одномерной задачи о расширении сферической полости

в области пластического деформирования. Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) относительно  $\sigma_r$  и  $v$  при учете (4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1} \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(Y + \mu \sigma_r)}{r} &= -\frac{\rho_0}{1 - \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} 1 - \theta &= 1 - f_1^{-1}(\sigma_r), \quad \sigma_r = f_1(\theta) = 2Y/3 + (1 + 2k/3)f(\theta), \\ K_1 &= \partial f_1(\theta)/\partial \theta = (1 + 2k/3) \cdot \partial f(\theta)/\partial \theta. \end{aligned}$$

На границе расширяющейся полости с радиусом  $r_0 = Vt$  задается скорость  $V$ , внешняя поверхность сферического слоя  $r_\infty$  свободна от напряжений, в начальный момент времени скорость и напряжения в среде равны нулю:

$$v(r_0, t) = V, \quad \sigma_r(r_\infty, t) = 0, \quad v(r, 0) = \sigma_r(r, 0) = 0. \quad (6)$$

## 2. Постановка краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в пластической области

Рассмотрим автомодельное решение системы относительно переменной  $\xi = r/(ct)$  и введем безразмерные переменные  $U = v/c$ ,  $S = \sigma_r/(\rho_0 c^2)$ , обозначим также  $T = Y/(\rho_0 c^2)$ ,  $\tilde{f}_1(\cdot) = f_1(\cdot)/(\rho_0 c^2)$ ,  $\tilde{K}_1 = \partial \tilde{f}_1(\theta)/\partial \theta$ .

Частные производные по времени и пространству определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{ct} \frac{dv}{d\xi}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{dv}{d\xi}, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{1}{ct} \frac{d\sigma_r}{d\xi}, & \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} &= -\frac{\xi}{t} \frac{d\sigma_r}{d\xi}. \end{aligned}$$

В результате подстановки этих выражений система уравнений в частных производных (5) преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$U' + 2 \frac{U}{\xi} = \frac{\xi - U}{(1 - \theta) \tilde{K}_1} S', \quad S' + 2 \frac{T + \mu S}{\xi} = \frac{\xi - U}{1 - \theta} U', \quad (7)$$

где  $1 - \theta = 1 - \tilde{f}_1^{-1}(S)$ , штрихом обозначено дифференцирование по  $\xi$ .

Окончательно краевая задача для системы двух ОДУ первого порядка в нормальной форме запишется в виде:

$$\begin{aligned} U' &= \frac{2(U \tilde{K}_1 + \tilde{f}_2 \varphi)}{\xi(\varphi^2 - \tilde{K}_1)}, \quad S' = \frac{2\tilde{K}_1(\tilde{f}_2 + U\varphi)}{\xi(\varphi^2 - \tilde{K}_1)}, \quad \varepsilon < \xi < 1, \\ U|_{\xi=\varepsilon} &= \varepsilon, \quad U|_{\xi=1} = U^e, \quad S|_{\xi=1} = S^e, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\varphi = (\xi - U)/(1 - \theta)$ ,  $\varepsilon = V/c$ .

В систему уравнений (7) входит неизвестный параметр  $c$  – скорость распространения границы раздела упругой и пластической областей или фронта ударной пластической волны. Нахождение неизвестной скорости  $c$  проводится итерационно до выполнения с заданной точностью  $\delta$  граничного условия  $|U|_{\xi=\varepsilon} - \varepsilon| < \delta$ . На каждой итерации применяется численный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности при изменении автомодельной переменной  $\xi$  от границы раздела упругой и пластической областей ( $\xi = 1$ ) до границы полости ( $\xi = \varepsilon$ ).

Величины  $U^e, S^e$  в краевой задаче (7) определяются из условия непрерывности скорости и напряжения на границе с областью упругого поведения материала при  $\xi = 1$ .

### 3. Постановка и решение краевой задачи для ОДУ второго порядка в области упругого деформирования

Рассмотрим уравнение движения в системе уравнений (1) в пренебрежении конвективными составляющими в производной по времени от скорости:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = -\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right), \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Радиальные и окружные малые деформации в упругой среде связаны с перемещениями соотношениями Коши, которые в условиях сферической симметрии имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}.$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$-\sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r},$$

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2G \left( \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Как и ранее, полагаем напряжения положительными при сжатии.

Применив соотношения Коши и закон Гука, преобразуем уравнение динамики упругой среды к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где  $c_e = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0} = \sqrt{(K + 4G/3)/\rho_0}$  – скорость распространения фронта продольной волны в упругой среде.

Следуя [16], положим  $\xi = r/(ct)$ ,  $\tilde{u} = u/(ct)$  – безразмерные координата и перемещение,  $c$  – скорость фронта пластической волны (границы раздела упругой и пластической областей) и выполним преобразование производных с учетом замены переменных:

$$\frac{u}{r} = \frac{\tilde{u}}{\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \tilde{u}', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{ct} \tilde{u}'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c}{t} \xi^2 \tilde{u}''',$$

штрихом обозначено дифференцирование по  $\xi$ .

Рассмотрим условия на границах области упругого деформирования. На границе с невозмущенной областью перемещение равно нулю. На границе раздела упругой и пластической областей при  $\xi = 1$  выполняется условие пластического течения  $(\sigma_r - \sigma_\varphi)|_{\xi=1} = Y + kK\theta$ , а также закон Гука  $\sigma_r - \sigma_\varphi = 2G(u/r - \partial u / \partial r)$ , откуда в силу непрерывности напряжений имеем

$$\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Y + kK\theta}{2G}, \quad \theta = -\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}\right).$$

Преобразование производных приводит к следующей краевой задаче для ОДУ второго порядка для безразмерного перемещения:

$$(1 - \alpha^2 \xi^2) \tilde{u}'' + \frac{2\tilde{u}'}{\xi} - \frac{2\tilde{u}}{\xi^2} = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{u}|_{\xi=1/\alpha} = 0, \quad \left(\frac{\tilde{u}}{\xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\right)\Big|_{\xi=1} = \frac{Y + kK\theta|_{\xi=1}}{2G}, \quad \alpha = \frac{c}{c_e}.$$

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения выполним ряд преобразований. В результате замены  $z = \alpha\xi$  получаем уравнение

$$(1 - z^2) \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\tilde{u}}{dz} - \frac{2\tilde{u}}{z^2} = 0.$$

В результате замены  $\tilde{u} = z\varphi$ ,  $F = d\varphi/dz$  получаем уравнение первого порядка относительно  $F(z)$ :

$$z(1 - z^2)F' + 2(2 - z^2)F = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dF}{F} = -\frac{2(2 - z^2)}{z(1 - z^2)} dz,$$

общим решением которого является функция  $F(z) = A/z^2 - A/z^4$ , зависящая от произвольной постоянной  $A$ .

Далее последовательность преобразований

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{A}{z^2} - \frac{A}{z^4}, \quad \varphi(z) = \frac{A}{3z^3} - \frac{A}{z} + B, \quad \tilde{u} = z\varphi, \quad \tilde{u} = \frac{A}{3z^2} - A + Bz, \quad z = \alpha\xi$$

приводит к выражению для безразмерного перемещения

$$\tilde{u} = A\left(\frac{1}{3\alpha^2 \xi^2} - 1\right) + B\alpha\xi, \quad (10)$$

где  $B$  – еще одна константа интегрирования.

Для определения констант  $A, B$  используем граничные условия в задаче (9). Из первого граничного условия получаем  $B = 2A/3$ , таким образом,

$$\tilde{u} = A\left(\frac{1}{3\alpha^2 \xi^2} + \frac{2}{3}\alpha\xi - 1\right) = A\frac{(1 - \alpha\xi)^2(1 + 2\alpha\xi)}{3\alpha^2 \xi^2}. \quad (11)$$

Получим выражения для определения безразмерной скорости

$$U = \tilde{u} - \xi \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad U(\xi) = A\left(\frac{1 - \alpha^2 \xi^2}{\alpha^2 \xi^2}\right), \quad (12)$$

радиальной компоненты тензора напряжений

$$\sigma_r(\xi) = 2A \frac{1 - \alpha\xi}{\alpha^2 \xi^3} \left( K\alpha^2 \xi^2 + \frac{2G}{3}(1 + \alpha\xi) \right) \quad (13)$$

и объемной деформации

$$\theta = - \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2 \frac{\tilde{u}}{\xi} \right) = 2A \left( \frac{1 - \alpha\xi}{\xi} \right). \quad (14)$$

Уравнения для безразмерной скорости (12) и напряжения (13) при учете равенства (14) преобразуем к виду

$$U(\xi) = \frac{1 + \alpha\xi}{2\alpha^2 \xi} \theta(\xi), \quad (15)$$

$$\sigma_r(\xi) = \left( K + \frac{2G}{3} \frac{1 + \alpha\xi}{\alpha^2 \xi^2} \right) \theta(\xi). \quad (16)$$

Для определения константы интегрирования  $A$  рассмотрим второе граничное условие в краевой задаче (9). Разность деформаций при  $\xi = 1$  определяется как

$$\left( \frac{\tilde{u}}{\xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = A(\alpha^{-2} - 1).$$

Таким образом,

$$A = \frac{Y\alpha^2}{2(1 - \alpha)(G(1 + \alpha) - kK\alpha^2)}. \quad (17)$$

Решение задачи при использовании условия текучести Треска получено ранее в статье [16]. В случае условия пластичности Мора – Кулона при  $\xi = 1$  будем иметь

$$\theta \Big|_{\xi=1} = \frac{Y\alpha^2}{G(1 + \alpha) - kK\alpha^2}. \quad (18)$$

Выражения (15), (16) при  $\xi = 1$  определяют граничные условия в зависимости от значения  $\alpha$ :

$$U^e = U \Big|_{\xi=1} = \frac{1 + \alpha}{2\alpha^2} \theta = \frac{Y(1 + \alpha)}{2(G(1 + \alpha) - kK\alpha^2)}, \quad (19)$$

$$S^e = S \Big|_{\xi=1} = \left( \tilde{K} + \frac{2}{3} \tilde{G} \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \right) \theta = \frac{K\alpha^2 + 2/3 \cdot G(1 + \alpha)}{G(1 + \alpha) - kK\alpha^2} T, \quad (20)$$

где  $\tilde{K} = K/(r_0 c^2)$ ,  $\tilde{G} = G/(r_0 c^2)$ .

#### 4. Определение критического давления

Для определения критического давления  $P_c$  рассмотрим вопрос оценки минимального напряжения на границе полости, необходимого для ее расширения. Ранее было получено соотношение для критического давления [17] в линейно сжимаемой упруго-идеально-пластической среде с условием пластичности Треска

$$P_c = \frac{2}{3} Y \left( 1 + \ln \frac{E}{3(1 - \nu) Y} \right), \quad (21)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для определения критического давления в среде с критерием пластичности Мора – Кулона преобразуем второе уравнение системы (7) в уравнение для размерного напряжения и скорости.

Принимая во внимание, что скорость упругопластического интерфейса  $c = O(V)$ , при  $V \rightarrow 0$  будем иметь задачу Коши:

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi} + 2\frac{Y + \mu\sigma_r}{\xi} = 0, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 1, \quad (22)$$

$$\sigma_r|_{\xi=1} = \frac{2Y}{3},$$

где граничные условия определены на основе уравнения (20) при  $\alpha = 0$ .

Решение задачи Коши (22) есть функция

$$\sigma_r(\xi) = \frac{2}{3}Y\xi^{-2\mu} + Y\frac{\xi^{-2\mu} - 1}{\mu},$$

которая при  $\xi = \varepsilon$  определяет критическое давление

$$P_c = \frac{2}{3}Y\varepsilon^{-2\mu} + Y\frac{\varepsilon^{-2\mu} - 1}{\mu}. \quad (23)$$

Значение критического давления при  $\mu = 0$  может быть получено предельным переходом  $\mu \rightarrow 0$  в (23):

$$P_c = \frac{2}{3}Y(1 + \ln \varepsilon^{-3}). \quad (24)$$

В соотношениях (23), (24) остается неопределенной величина  $\varepsilon = V/c$ . Для ее определения рассмотрим уравнение для безразмерной скорости в системе уравнений (7), пренебрегая конвективным слагаемым и полагая  $1 - \theta \approx 1$ ,

$$U' + 2\frac{U}{\xi} = \xi\frac{\sigma_r'}{K_1},$$

где

$$\sigma_r' = -\frac{2Y}{3}(3 + 2\mu)\xi^{-2\mu-1}, \quad K_1 = \left(1 + \frac{2}{3}k\right)K = \frac{K}{1 - 2\mu/3}.$$

Окончательно будем иметь задачу с начальными условиями

$$U' + 2\frac{U}{\xi} = -2\frac{Y}{K}\left(1 - \frac{4}{9}\mu^2\right)\xi^{-2\mu}, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 1, \quad (25)$$

$$U|_{\xi=1} = \frac{Y}{2G}.$$

Решением задачи Коши (25) является функция

$$U(\xi) = \frac{Y}{18}\frac{12G + 9K + 8G\mu}{KG\xi^2} - \frac{2Y}{9}\frac{3 + 2\mu}{K\xi^2}\xi^{3-2\mu}.$$

Для определения величины  $\varepsilon$  необходимо воспользоваться условием  $U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon$  в системе уравнений (8):



$$\frac{Y}{18} \frac{12G + 9K + 8G\mu}{KG} - \frac{2Y}{9} \frac{3 + 2\mu}{K} \varepsilon^{3-2\mu} = \varepsilon^3. \quad (26)$$

Решение нелинейного уравнения (26) определяется численно методом итераций.

В частном случае при значении  $\mu = 0$ :

$$\frac{Y}{18} \frac{12G + 9K}{KG} - \frac{2Y}{3K} \varepsilon^3 = \varepsilon^3,$$

решение уравнения (26) можно записать в конечном виде

$$\varepsilon^3 = \frac{(4G + 3K)Y}{6KG(1 + 2Y/(3K))} = \frac{3(1-\nu)Y}{E(1 + 2Y/(3K))} \approx \frac{3(1-\nu)Y}{E}$$

с использованием соотношений для упругих постоянных:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \text{ – модуль Юнга,}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \text{ – коэффициент Пуассона, } 1 - \nu = \frac{3K + 4G}{6K + 2G}.$$

Это решение совпадает с полученным ранее решением (21) при учете уравнения (24).

Рассмотрим результаты численного решения задачи при следующих значениях модулей упругости:  $K = 220$  МПа,  $G = 150$  МПа, параметры условия пластичности варьируются.

На рис. 1 приведены графики распределения отношения скорости расширения полости к скорости перемещения границы раздела областей упругого и пластического деформирования в зависимости от изменения коэффициента внутреннего трения при значениях начального предела текучести  $Y = 50, 5$  и  $0,5$  кгс/см<sup>2</sup> (сплошные линии с квадратом, ромбом и треугольником соответственно).

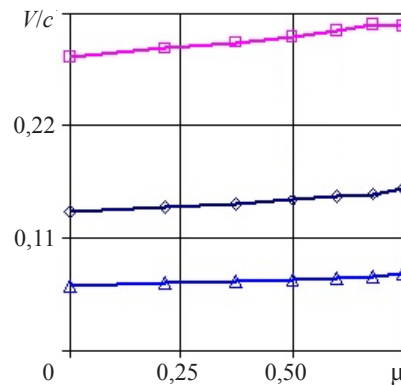


Рис. 1. Зависимость отношения  $\varepsilon = V/c$  от изменения коэффициента внутреннего трения при близких к нулю скоростях расширения полости

Можно отметить, что при близких к нулю скоростях расширения полости величина  $\varepsilon = V/c$  зависит от начального значения предела текучести. При этом наблюдается достаточно слабое (не более 10%) изменение  $\varepsilon$  при изменении  $\mu$  в диапазоне  $0 \leq \mu \leq 0,75$  для всех рассмотренных значений предела текучести.

Учитывая, что величина  $\varepsilon$  слабо зависит от изменения коэффициента внутреннего трения, для приближенного определения  $\varepsilon$  предлагается воспользоваться уравнениями (21), (24), приняв

$$\varepsilon^{-3} = \frac{E}{3(1-\nu)Y}, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu)Y}{E}}. \quad (27)$$

Таким образом, соотношение (23) при учете (27) будет обобщением известного соотношения (21) в случае условия пластичности Мора – Кулона.

На рис. 2 представлены графики зависимости критического давления, отнесенного к начальному значению предела текучести, от коэффициента внутреннего трения при значениях  $Y = 50, 5$  и  $0,5$  кгс/см<sup>2</sup> (сплошные линии с квадратом, ромбом и треугольником соответственно). В отличие от величины  $\varepsilon$ , критическое давление существенно образом зависит от параметров условия пластичности Мора – Кулона.

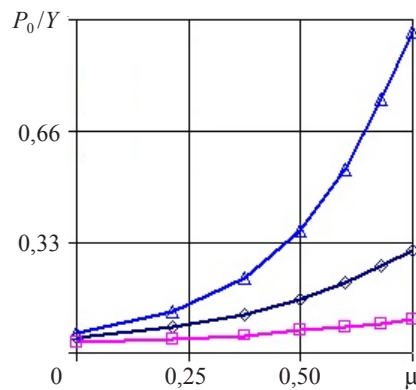


Рис. 2. Безразмерное критическое давление в зависимости от коэффициента внутреннего трения

На рис. 3 приведены значения критического давления на стенку полости, полученные численно при различных уровнях начального значения предела текучести в среде, где для предела текучести принята логарифмическая шкала. Некоторое уменьшение погрешности наблюдается лишь при значениях  $Y < 0,1$  МПа, при дальнейшем увеличении начального значения предела текучести решение (23), (27) оказывается предпочтительнее.

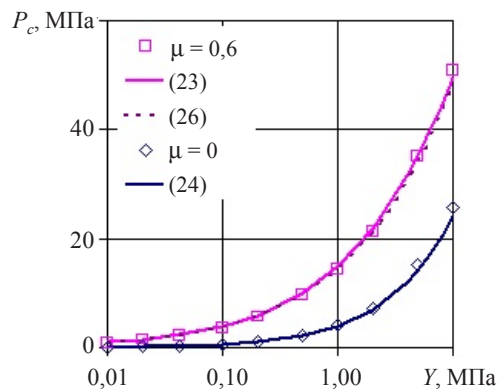


Рис. 3. Зависимость критического давления  $P_c$  от начального значения предела текучести  $Y$

## Заклучение

Получена формула, с достаточной точностью определяющая минимальное давление, необходимое для образования полости (критического давления) при учете внутреннего трения в рамках критерия текучести Мора – Кулона, обобщающая известное решение для упруго-идеально-пластической среды с критерием Треска. Ошибка аппроксимации не превышает 6% при изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне и при изменении начального значения предела текучести на три порядка. При увеличении внутреннего трения отмечается рост критического давления.

### Список литературы

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*. 2014. Vol. 1. Iss. 4. P. 1–19. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0135-4>.
2. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 66. P. 60–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2013.12.004>.
3. Omidvar M., Malioche J.D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 85. P. 146–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002>.
4. Forrestal M.J., Tzou D.Y., Askari E., Longcope D.B. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods. *International Journal of Impact Engineering*. 1995. Vol. 16. Iss. 5–6. P. 699–710.
5. Chen X.W., Li Q.M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics. *International Journal of Impact Engineering*. 2002. Vol. 27. Iss. 6. P. 619–637.
6. Forrestal M.J., Warren T.L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets. *International Journal of Impact Engineering*. 2008. Vol. 35. Iss. 8. P. 727–730.
7. Warren T.L. The effect of target inertia on the penetration of aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods. *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 91. P. 6–13.
8. Rosenberg Z., Dekel E. A comment on “The effect of target inertia on the penetration of aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods” by T.L. Warren. *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 93. P. 231–233. DOI: 10.1016/j.ijim-peng.2016.02.009.
9. Warren T.L. Response to: A comment on “The effect of target inertia on the penetration of aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods” by T.L. Warren. *Int. J. Imp. Eng.* 2016, by Z. Rosenberg, E. Dekel. *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 93. P. 234–235.
10. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 100. P. 13–22.
11. Rosenberg Z., Kositski R., Dekel E. Comment on: “Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model” by Kong et al. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 104. P. A1–A3.
12. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Response to: Comment on “Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended cavity expansion model” by Kong et al. *Int. J. Imp. Eng.* 2017, by Z. Rosenberg et al. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 104. P. 150–153.
13. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. Iss. 4. P. 285–295. DOI: 10.1016/0167-6636(82)90028-X.
14. Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17. Iss. 9. P. 915–924. [doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90106-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90106-2).

15. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*. 1992. Vol. 12. Iss. 3. P. 427–444. doi.org/10.1016/0734-743X(92)90167-R.
16. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 2. P. 275–279. doi.org/doi:10.1115/1.3173672.
17. Rosenberg Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *International Journal of Impact Engineering*. 2008. Vol. 35. Iss. 3. P. 147–154.
18. Rosenberg Z., Dekel E. Analytical solution of the spherical cavity expansion process. *International Journal of Impact Engineering*. 2009. Vol. 36. P. 193–198.
19. Masri R., Durban D. Deep penetration analysis with dynamic cylindrical cavitation fields. *International Journal of Impact Engineering*. 2008. Vol. 36. P. 830–841.
20. Masri R., Durban D. Cylindrical cavity expansion in compressible Mises and Tresca solids. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2007. Vol. 26. P. 712–727.
21. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 73. P. 112–122. doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010.
22. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Keling Zhang, Yihao Cheng, Xiaojuan Zhang. Semi-analytical model for rigid and erosive long rods penetration into sand with consideration of compressibility. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 83. P. 1–10.
23. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2018. Vol. 122. P. 197–208.
24. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. P. 49–58.
25. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Макарова А.А., Тарасова А.А. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 58–63.
26. Котов В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник–грунт». *Проблемы прочности и пластичности*. 2008. Вып. 70. С. 123–131.

#### References

1. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central Europ. J. Eng.* 2014. Vol. 1. Iss. 4. P. 1–19. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0135-4>.
2. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration. *Int. J. Imp. Eng.* 2014. Vol. 66. P. 60–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2013.12.004>.
3. Omidvar M., Malioche J.D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *Int. J. Imp. Eng.* 2015. Vol. 85. P. 146–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002>.
4. Forrestal M.J., Tzou D.Y., Askari E., Longcope D.B. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods. *Int. J. Imp. Eng.* 1995. Vol. 16. Iss. 5–6. P. 699–710.
5. Chen X.W., Li Q.M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics. *Int. J. Imp. Eng.* 2002. Vol. 27. Iss. 6. P. 619–637.
6. Forrestal M.J., Warren T.L. Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets. *Int. J. Imp. Eng.* 2008. Vol. 35. Iss. 8. P. 727–730.
7. Warren T.L. The effect of target inertia on the penetration of aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods. *Int. J. Imp. Eng.* 2016. Vol. 91. P. 6–13.
8. Rosenberg Z., Dekel E. A comment on “The effect of target inertia on the penetration of aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods” by T.L. Warren. *Int. J. Imp. Eng.* 2016. Vol. 93. P. 231–233. DOI: 10.1016/j.ijim-peng.2016.02.009.
9. Warren T.L. Response to: A comment on “The effect of target inertia on the penetration of

aluminum targets by rigid ogive-nosed long rods” by T.L. Warren. *Int. J. Imp. Eng.* 2016, by Z. Rosenberg, E. Dekel. *Int. J. Imp. Eng.* 2016. Vol. 93. P. 234–235.

10. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model. *Int. J. Imp. Eng.* 2017. Vol. 100. P. 13–22.

11. Rosenberg Z., Kositski R., Dekel E. Comment on: “Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model” by Kong et al. *Int. J. Imp. Eng.* 2017. Vol. 104. P. A1–A3.

12. Kong X.Z., Wu H., Fang Q., Peng Y. Response to: Comment on “Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended cavity expansion model” by Kong et al. *Int. J. Imp. Eng.* 2017, by Z. Rosenberg et al. *Int. J. Imp. Eng.* 2017. Vol. 104. P. 150–153.

13. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. Iss. 4. P. 285–295. DOI: 10.1016/0167-6636(82)90028-X.

14. Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength. *Int. J. Solids Struct.* 1981. Vol. 17. Iss. 9. P. 915–924. doi.org/10.1016/0020-7683(81)90106-2.

15. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *Int. J. Imp. Eng.* 1992. Vol. 12. Iss. 3. P. 427–444. doi.org/10.1016/0734-743X(92)90167-R.

16. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 2. P. 275–279. doi.org/doi:10.1115/1.3173672.

17. Rosenberg Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *Int. J. Imp. Eng.* 2008. Vol. 35. Iss. 3. P. 147–154.

18. Rosenberg Z., Dekel E. Analytical solution of the spherical cavity expansion process. *Int. J. Imp. Eng.* 2009. Vol. 36. P. 193–198.

19. Masri R., Durban D. Deep penetration analysis with dynamic cylindrical cavitation fields. *Int. J. Imp. Eng.* 2008. Vol. 36. P. 830–841.

20. Masri R., Durban D. Cylindrical cavity expansion in compressible Mises and Tresca solids. *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2007. Vol. 26. P. 712–727.

21. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *Int. J. Imp. Eng.* 2014. Vol. 73. P. 112–122. doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010.

22. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Keling Zhang, Yihao Cheng, Xiaojuan Zhang. Semi-analytical model for rigid and erosive long rods penetration into sand with consideration of compressibility. *Int. J. Imp. Eng.* 2015. Vol. 83. P. 1–10.

23. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *Int. J. Imp. Eng.* 2018. Vol. 122. P. 197–208.

24. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Reshenie zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede v predpolozhenii neszhimaemosti za frontom udarnoy volny [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2012. Iss. 74. P. 49–58 (In Russian).

25. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Makarova A.A., Tarasova A.A. Analiz priblizhennykh resheniy zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede [The analysis of approximate solutions of a spherical cavity expansion in a soil medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 58–63 (In Russian).

26. Kotov V.L. Issledovanie primenimosti avtomodelnogo resheniya zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v szhimaemoy srede dlya opredeleniya davleniya na poverkhnosti kontakta “udarnik–grunt” [Studying the applicability of the auto-modeling analysis of the problem of expansion of a spherical cavity in a compressible medium for determining the pressure on the surface of the striker-soil contact]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2008. Iss. 70. P. 123–131 (In Russian).

**APPROXIMATING STRESSES IN THE VICINITY OF A CAVITY  
EXPANDING AT A CONSTANT VELOCITY IN A MEDIUM  
WITH THE MOHR–COULOMB PLASTICITY CONDITION**

**Kotov V.L.**

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

A one-dimensional problem of a spherical cavity expanding at a constant velocity from a point in an infinite elastoplastic medium is considered. The problem has a first-kind self-similar solution. Elastoplastic deformation of the soil is described based on Hooke's law and the Mohr-Coulomb yield criterion. An analytical solution of the problem in the elastic region contacting with the plastic yield region has been obtained. To determine stress and velocity fields in the plastic region, a known algorithm, based on the shooting method, of analyzing a boundary-value problem for a system of two first-order ordinary differential equations, including the fourth-order Runge–Kutta method, has been realized. An effective algorithm of numerically analyzing an expanding cavity problem, earlier proposed in the works by M. Forrestal et al., makes it possible to solve the problem accurately enough for practical applications.

A formula for determining the critical pressure – the minimal pressure required for the nucleation, accounting for internal pressure of a cavity in the framework of the Mohr–Coulomb yield criterion, has been derived, which is a generalization of the earlier published solution for an elastic ideally plastic medium with Tresca's criterion. The obtained critical value was compared with a numerical solution in a full formulation at the cavity expansion velocities close to zero in a wide range of variation of the parameters of the Mohr–Coulomb yield criterion. It is shown that the inaccuracy of the approximation of the proposed formula does not exceed 6% for the variation of the internal friction coefficient all over the admissible range, and for the initial value of the yield strength increasing by three orders of magnitude.

*Keywords:* expansion of a spherical cavity, self-similar solution, elasticity, plasticity, Mohr–Coulomb yield condition.