

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-146-164

**СВОЙСТВА КРИВЫХ ОБЪЕМНОЙ, ОСЕВОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ  
ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ,  
ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ  
ВЯЗКОУПРУГОСТИ РАБОТНОВА\***

© 2019 г.

**Хохлов А.В.**

*НИИ механики Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

*Поступила в редакцию 29.12.2018*

Исследуется физически нелинейное определяющее соотношение Работнова с четырьмя произвольными материальными функциями для изотропных реономных материалов с целью определения комплекса моделируемых реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации. Аналитически изучены уравнения порождаемых им семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести при одноосном нагружении, их характерные качественные свойства (интервалы монотонности, существование точек экстремума и смены знака, асимптотика и т.п.) и влияние на них общих ограничений, наложенных на материальные функции. Доказано, что соотношение Работнова способно моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации и коэффициента Пуассона при постоянной осевой нагрузке. Выведена формула, связывающая коэффициент Пуассона и параметр вида деформированного состояния при одноосном растяжении (сжатии), исследовано выражение для коэффициента Пуассона в условиях ползучести через материальные функции и время, получены общие оценки для коэффициента Пуассона и параметра вида деформированного состояния. Найдены условия монотонности и немонотонности их зависимостей от времени, критерий отрицательности коэффициента Пуассона при ползучести, критерий его постоянства. Показано, что учет объемной ползучести (управляемой двумя материальными функциями модели) может существенно изменить качественное поведение кривых осевой ползучести и коэффициента Пуассона.

*Ключевые слова:* наследственность, физическая нелинейность, сжимаемость, объемная ползучесть, дисперсно наполненные полимеры, тензорно-линейное определяющее соотношение, шаровая и девиаторная части тензора напряжений, немонотонность поперечной деформации, отрицательность коэффициента Пуассона.

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146\_a).

## Введение

Изменение объема при нагружении («разрыхление»), объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения (всестороннего давления) и его истории на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними термомеханические эффекты существенны при описании деформирования и прочности многих реономных материалов [1–43]. Они заметно влияют на проявление свойств (даже изотропных) материалов в одноосных испытаниях, на кривые осевой ползучести, релаксации, нагружения с постоянной скоростью, длительной прочности, на поведение коэффициента Пуассона, касательного модуля, предела текучести и т.п., а регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение ими) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку скорости накопления повреждений. К материалам, для которых они существенны (даже при малых деформациях), относятся прежде всего многие полимеры, дисперсно наполненные композиты (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики и т.п.), прессованные порошковые композиты, сплавы, керамики, пены, грунты, горные породы, льды и т.п. Для них стандартные (сильно упрощающие расчеты) гипотезы об объемной несжимаемости или упругой связи объемной деформации со средним напряжением (отсутствии объемной ползучести), о независимости этой связи от второго (и третьего) инварианта тензора напряжения и вида напряженного состояния, о постоянстве коэффициента Пуассона оказываются непригодными [1–5, 10–16, 22–28].

Коэффициент Пуассона изотропных вязкоупругопластичных материалов при одноосном нагружении  $\nu(t) = -\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}$  не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации  $\epsilon_{\parallel}(t)$ ) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций ( $\epsilon_{\perp}$  и  $\theta$ ) от времени и осевой деформации  $\epsilon_{\parallel}$ , характер изменения и диапазоны значений коэффициента Пуассона для упомянутых классов реономных материалов весьма разнообразны даже в случае одноосных нагружений, даже в испытаниях на ползучесть при постоянной нагрузке или на релаксацию [1–39]. У большинства металлов, многих полимеров (например, полиэтиленов) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание  $\nu$  с ростом  $\epsilon_{\parallel}(t)$  [17–21] (и порой – монотонное убывание объемной деформации при растяжении). У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердое топливо, асфальтобетон, АБС-пластики, чугун и т.п.), наблюдается убывание  $\nu(t)$ , свидетельствующее о необратимом изменении объема при растяжении-сжатии [13, 22–27]. У некоторых материалов (например, у фторопласта и полиэтилена низкой плотности, наполненного мелом [28]) объемная деформация и коэффициент Пуассона меняются немонотонно и меняют знак. В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются и исследуются новые материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона [29–42]. В ряде работ изучается влияние на кривые осевой и сдвиговой ползучести и характер эволюции коэффициента Пуассона наложения всестороннего давления на одноосное растяжение или сдвиг [2–4, 24, 25, 41–43].

Объемную ползучесть, изменение коэффициента Пуассона и вида напряженно-деформированного состояний и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов и при выборе и идентификации определяющего соотношения (ОС) для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС

важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям (МФ), в частности, – эффекты, связанные с объемной и поперечной деформациями. Для этого необходимо системное аналитическое изучение общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными МФ при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от характеристик материальных функций и параметров программ нагружения.

Настоящая статья продолжает цикл работ [44–48] по системному исследованию нелинейного ОС вязкоупругости вида

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2}\Phi(L(t))\sigma^{-1}(t)[\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\Phi_0(L_0(t))\delta_{ij}, \quad (1)$$

$$L(t) = \mathbf{\Pi}\sigma, \quad L_0(t) = \mathbf{\Pi}_0\sigma_0, \quad \mathbf{\Pi}y = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t-\tau)dy(\tau), \quad \mathbf{\Pi}_0y = \int_0^t \mathbf{\Pi}_0(t-\tau)dy(\tau), \quad (2)$$

с произвольными МФ  $\mathbf{\Pi}(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\mathbf{\Pi}_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ . Цель исследования – выявление комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработка способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Тензорно-линейное ОС (1) описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и (малых) деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  в произвольной точке тела в предположении независимости объемной деформации  $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения  $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ . В выражении (1)  $\boldsymbol{\sigma} = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{0.5}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon} = (2e_{ij}e_{ij}/3)^{0.5}$  – интенсивности напряжений и деформаций (вторые инварианты девиаторов  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0\mathbf{I}$  и  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ ), а входные процессы  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  предполагаются кусочно-гладкими при  $t \geq 0$ .

Цель настоящей статьи – вывод и исследование уравнений семейств кривых объемной, осевой и поперечной ползучести и выражения для коэффициента Пуассона в условиях ползучести, которые порождает ОС (1) с четырьмя произвольными МФ при одноосном нагружении постоянной нагрузкой, обнаружение их характерных свойств и сопоставление с типичными качественными свойствами экспериментальных кривых.

### 1. Определяющее соотношение Работнова и его материальные функции

Одноосный вариант ОС (1) был предложен Ю.Н. Работновым [49–52] для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t-\tau)d\sigma(\tau) = \mathbf{\Pi}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

посредством введения дополнительной МФ  $\varphi(u)$  (будем называть ее функцией нелинейности):

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi'(\varepsilon(\tau))d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

В (3) и (4) функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $R(t)$  связаны интегральным уравнением

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau = t, \quad (5)$$

выражающим условие взаимной обратности операторов (3) и (4). В англоязычных работах ОС (4) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости QLV, а его автором считается Я.Ч. Фанг (Y.C. Fung) [5, 53–56]. В публикациях [49–52, 57, 58] ОС (4) прилагалось к описанию одномерного поведения стеклопластиков, графита, металлов и сплавов и композитов, а в [5, 53–56] – связок, сухожилий и других биологических тканей. Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (4) приведены в статьях [46–48].

Простейшее обобщение ОС Работнова (4) на сложное напряженное состояние получается в предположении изотропности и тензорной линейности материала, независимости объемных и сдвиговых деформаций от касательных напряжений и гидростатического давления (отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров) и пренебрежения влиянием третьих инвариантов. Тогда истории первых инвариантов  $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_{ii}/3$  и  $\sigma_0(t) = \sigma_{ii}/3$  тензоров деформаций и напряжений, их интенсивностей  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  и компоненты их девиаторов  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0\mathbf{I}$  связаны операторами, зависящими от двух пар МФ –  $\Pi$ ,  $\Phi$  и  $\Pi_0$ ,  $\Phi_0$ :

$$\theta = 3\varepsilon_0 = \Phi_0(\Pi_0\sigma_0), \quad \varepsilon = \Phi(\Pi\sigma), \quad e_{ij}(t) = \frac{3}{2}\varepsilon(t)\sigma^{-1}(t)s_{ij}(t), \quad (6)$$

где  $\Phi = \varphi^{-1}$ ,  $\Phi_0 = \varphi_0^{-1}$ , а  $\Pi$  и  $\Pi_0$  обозначают линейные интегральные операторы (2). В итоге,

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij} = \frac{3}{2}\Phi(\Pi\sigma)\sigma^{-1}(t)[\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\Phi_0(\Pi_0\sigma_0)\delta_{ij},$$

то есть компоненты тензоров деформаций и напряжений связаны соотношением (1).

В одномерном случае (4) обратное ОС имеет вид  $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$  (композиция нелинейного оператора действия функции  $\varphi$  и линейного интегрального оператора  $\mathbf{R}$  вида (3)). Обращение трехмерного ОС (6), то есть (1), для любых возрастающих МФ  $\Phi$  и  $\Phi_0$  записывается в виде:

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon^{-1}(t)e_{ij}(t), \quad (7)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями вида (5).

Из трех материальных функций  $\varphi$ ,  $\Pi$ ,  $R$  в ОС (4) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре МФ. На функции ползучести и релаксации в ОС (4) и (1) налагаем те же минимальные ограничения, что и в линейной теории:  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  предполагаются положительными и дифференцируемыми на интервале  $(0, \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  – возрастающими и выпуклыми вверх [59, 60], а  $R$  и  $R_0$  – убывающими и выпуклыми вниз на интервале  $(0, \infty)$ ;  $R(t)$  и  $R_0(t)$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в точке  $t = 0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция). Из этих условий следует существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$  ( $y(0) = y(0+)$  – обозначение предела функции  $y(t)$  справа в точке  $t = 0$ ). Например, семейство функций ползучести

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta], \quad (8)$$

удовлетворяет этим ограничениям. В случае  $\gamma \in (0, \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , оно порождает все четыре структурно различные, но эквивалентные четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны, то есть у них  $\Pi(0) \neq 0$ , а  $R = E_1 e^{-\lambda_1 t} + E_2 e^{-\lambda_2 t}$  и  $R(+\infty) = 0$ ), а при  $\alpha = 0$  – трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга – Томпсона с одним демпфером (они регулярны,  $R = E e^{-\lambda t} + r$  и  $R(+\infty) = r > 0$ ). Поскольку  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , то семейство (8) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda \beta = 0$  – ньютоновскую жидкость ( $R = \eta \delta(t)$ ), при  $\alpha = 0$  – модель Фойгта ( $R = \eta \delta(t) + r$ ), при  $\alpha > 0$  – обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ( $R = \eta \delta(t) + E e^{-\lambda t}$ ,  $R(+\infty) = 0$ ). При  $\gamma = 0$  (8) дает модель Максвелла ( $R = E e^{-\lambda t}$ ). В случае  $\gamma < 0$  нарушается ограничение  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  и порождаемые линейным ОС (3) кривые обратной ползучести возрастают, что противоречит экспериментальным данным.

На функции  $\varphi$  и  $\varphi_0$  в ОС (4) и (7) и на МФ  $\Phi(x)$  и  $\Phi_0(x)$  в ОС (1) налагаем следующие минимальные требования [44–47]: функция  $\varphi(u)$  непрерывно дифференцируема и строго возрастает на  $(0, \omega)$ , а  $\varphi_0(u)$  – на множестве  $(\omega_-, 0) \cup (0, \omega_+)$  (где  $\omega_- \omega_+ < 0$ ), причем  $\varphi(0+) = 0$  (иначе входному процессу  $\varepsilon(t) \equiv 0$  соответствует ненулевой отклик  $\sigma(t)$ ) и  $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ . Из возрастания  $\varphi(u)$  и  $\varphi_0(u)$  следует существование и возрастание (и непрерывная дифференцируемость) обратных функций  $\Phi(x) = \varphi^{-1}$ ,  $x \in (0, X)$ , и  $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$ ,  $x \in (\underline{x}, \bar{x})$ , где  $X = \sup \varphi(u) = \varphi(\omega + 0)$ ,  $\underline{x} = \inf \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_- + 0)$ ,  $\bar{x} = \sup \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_+ - 0)$ , и обратимость ОС (1). Аналогично обратимость ОС (1) следует из возрастания  $\Phi$  и  $\Phi_0$ . Величины  $\bar{x}$ ,  $\underline{x}$  и  $X$ , их конечность или бесконечность – важные характеристики МФ, существенно влияющие на свойства теоретических кривых ОС (1) [44–48]. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии функции  $\Phi_0$  и  $\varphi_0$  нечетны и  $\underline{x} = -\bar{x}$ ,  $\omega_- = \omega_+$ .

МФ  $\varphi$  и  $\varphi_0$  в принципе можно найти по известной зависимости скорости ползучести (сдвиговой или объемной) материала от уровня напряжения  $\bar{\sigma}$  [44]: если известна зависимость  $\dot{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})$ , то функция  $\Phi = \varphi^{-1}$  в ОС (4) находится из уравнения  $x \Phi'(x) = r(x)$ ,  $\Phi(0) = 0$ . Например, для дробно-линейной зависимости Шестерикова – Юмашевой  $r(\bar{\sigma}) = A \bar{\sigma} (\sigma_* - \bar{\sigma})^{-1}$ ,  $\bar{\sigma} \in [0, \sigma_*)$  ( $\sigma_*$  – предел прочности) получаем  $\Phi'(x) = A(\sigma_* - x)^{-1}$  и

$$\Phi(x) = A \ln \frac{\sigma_*}{\sigma_* - x}, \quad x \in [0, \sigma_*), \quad \bar{x} = \sigma_* < \infty; \quad \varphi(u) = \sigma_* (1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0. \quad (9)$$

Примечательно, что эта функция  $\varphi$  совпадает с функцией ползучести модели Фойгта. Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то МФ  $\varphi_0(u)$  можно склеить из двух ветвей с разными парами параметров  $A$  и  $\sigma_*$  при  $u > 0$  и  $u < 0$ .

Для задания выпуклой вверх МФ  $\varphi$  и  $\varphi_0$  с конечным  $\bar{x}$  удобно использовать линейные комбинации функций вида (9) (ряды Прони):

$$\varphi(u) = w \sum_{k=1}^m \gamma_k \varphi_k(u) = w \sum_{k=1}^m \gamma_k (1 - e^{-\lambda_k u}), \quad w^{-1} = \sum_{k=1}^m \gamma_k \lambda_k$$

(множитель  $w$  введен для выполнения условия нормировки  $\varphi'(0) = 1$ ). При  $\lambda_k > 0$ ,  $\gamma_k > 0$  все ограничения на МФ  $\varphi$  выполнены, так как они выполнены для каждого слагаемого  $\varphi_k(u)$  и сохраняются для комбинаций с положительными коэффициен-

тами. Для задания выпуклой вниз МФ  $\Phi$  можно использовать суммы с положительными показателями экспоненты.

## 2. Кривые объемной, продольной и поперечной ползучести, порождаемые ОС (1)

Рассмотрим мгновенное одноосное нагружение  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t)$ ,  $h(t)$  – функция Хевисайда (ее в дальнейшем будем опускать, полагая, что  $t > 0$ ), то есть  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$  при  $t > 0$ , а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда  $\sigma_0 = \bar{\sigma}h(t)/3$ , девиатор напряжений – диагональный тензор:  $s_{ij} \equiv 0$  при  $i \neq j$ ,  $s_{11} = 2\bar{\sigma}/3$ ,  $s_{22} = s_{33} = -\bar{\sigma}/3$  при  $t > 0$ , а интенсивность  $\sigma = |\bar{\sigma}|h(t)$ . Вычисление операторов (6) дает  $L(t) = \mathbf{\Pi}\sigma = |\sigma|\mathbf{\Pi}h = |\bar{\sigma}|\mathbf{\Pi}(t)$ ,  $L_0(t) = \mathbf{\Pi}_0\sigma_0 = \bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)/3$ ,

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \Phi(|\bar{\sigma}|\mathbf{\Pi}(t)), \quad \theta(t, \bar{\sigma}) = \Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)\right), \quad t > 0. \quad (10)$$

В силу пропорциональности девиаторов в ОС (1) девиатор деформаций – тоже диагональный тензор  $\mathbf{e} = z\varepsilon(t)\mathbf{diag}(1; -0,5; -0,5)$ , где  $z = \text{sgn } \bar{\sigma} = \pm 1$ , и у тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij}$  в любой момент времени отличны от нуля только диагональные компоненты  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}) = z\Phi(|\bar{\sigma}|\mathbf{\Pi}(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)\right), \quad t > 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{22}(t, \bar{\sigma}) = \varepsilon_{33}(t, \bar{\sigma}) = -\frac{1}{2}z\Phi(|\bar{\sigma}|\mathbf{\Pi}(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)\right). \quad (12)$$

Уравнения (10)–(12) задают семейства кривых сдвиговой, объемной, осевой и поперечной ползучести. Из возрастания МФ  $\Phi(x)$ ,  $\mathbf{\Pi}(t)$ ,  $\Phi_0(x)$  и  $\mathbf{\Pi}_0(t)$  следует, что для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения) интенсивность деформаций  $\varepsilon(t)$ , объемная деформация  $\theta(t)$  и осевая деформация  $\varepsilon_{11}(t)$  положительны и монотонно возрастают на полуоси  $t > 0$ . Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}(t)$  и ее модуль не обязаны быть монотонными функциями: они могут убывать на всем интервале  $t > 0$  (например, при  $\mathbf{\Pi}_0(t) = c = \text{const}$ , то есть в случае упругой зависимости объемной деформации от давления, когда  $\varepsilon_{\perp} = -\Phi(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}(t))/2 + C/3$ ,  $C = \Phi_0(c\bar{\sigma}/3) > 0$ ), могут иметь точки экстремума и менять знак, например, в случае  $C > 3\Phi(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}(0))/2$ . Поскольку из (12) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}(t))\bar{\sigma}\dot{\mathbf{\Pi}}(t) + \frac{1}{9}\Phi_0'\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)\right)\bar{\sigma}\dot{\mathbf{\Pi}}_0(t), \quad (13)$$

то при  $\bar{\sigma} > 0$  условие убывания  $\varepsilon_{\perp}$  имеет вид

$$\Phi_0'\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(t)\right)\dot{\mathbf{\Pi}}_0(t) < \frac{9}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}(t))\dot{\mathbf{\Pi}}(t).$$

Если  $\mathbf{\Pi}(t)$  ограничена (например, (8) с  $\alpha = 0$ ), то  $\varepsilon(\infty) = \Phi(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}(\infty)) < \infty$ ; если  $\mathbf{\Pi}_0(t)$  ограничена, то объемная деформация ограничена ( $\theta(\infty) = \Phi_0(\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(\infty)/3)/3$ ); если обе функции ползучести ограничены, то обе кривые ползучести (КП) (12) тоже имеют при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = \Phi(|\bar{\sigma}|\mathbf{\Pi}(\infty)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\mathbf{\Pi}_0(\infty)\right),$$



$$\varepsilon_{22}(\infty) = -\frac{1}{2}\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(\infty)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(\infty)\right).$$

Отметим, что КП могут иметь точки перегиба и стадию ускоренной ползучести при надлежащем выборе МФ [44].

На рис. 1а приведены КП интенсивности деформаций  $\varepsilon(t)$  для  $\bar{\sigma} = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$ , порожденные двумя моделями (1) с МФ (9) при  $A = 0,01$ ,  $\sigma_* = 1,5$  и  $\Pi(t)$  вида (8) с  $\lambda = 0,1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,5$ . Эти модели различаются только значением параметра  $\alpha$ :  $\alpha = 0,01$  (сплошные КП 1–6 с точкой перегиба) и  $\alpha = 0$  (штриховые КП). Так как при  $\alpha = 0$  функция ползучести (модели Кельвина) ограничена, то КП обладают горизонтальными асимптотами при  $t \rightarrow +\infty$ .

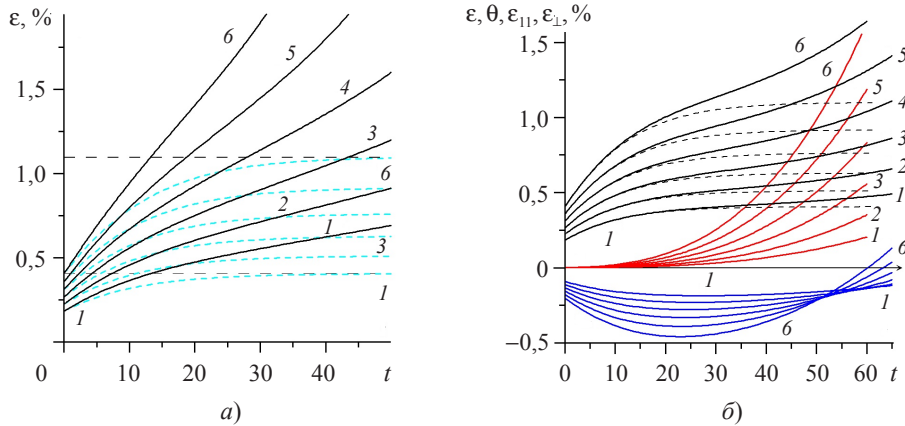


Рис. 1

На рис. 1б приведены КП  $\varepsilon_{11}(t)$  (сплошные кривые 1–6),  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (синие),  $\varepsilon(t)$  (штриховые),  $\theta(t)$  (красные кривые) при одноосном растяжении для шести разных уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  (КП 1–6), порожденные ОС (1) с МФ:

$$\Phi(x) = A \ln \frac{\sigma_*}{\sigma_* - x}, \quad \Phi_0(x) = A_0 x^m, \quad \Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0(t) = \alpha_0 t + \beta_0 \quad (14)$$

при  $A = 0,01$ ,  $\sigma_* = 1,5$ ,  $A_0 = 0,20$ ,  $m = 3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_0 = 0,02$ ,  $\beta_0 = 0,1$ . Отношение  $A_0/A$ , регулирующее относительный вклад объемной деформации, специально выбрано утрированно большим, чтобы сделать изучаемые эффекты более наглядными и заметными при малых временах. Осевые и объемные деформации монотонно возрастают (КП такой формы наблюдаются у многих дисперсно наполненных композитов, твердых топлив и других высоконаполненных эластомеров [2–4, 23–27]), поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет точку минимума и становится положительной при достаточно большом  $t$ ; интенсивность деформаций  $\varepsilon(t) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$  и все компоненты девиатора деформаций возрастают, но стабилизируются:  $\varepsilon(\infty) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty)) = \Phi(\beta\bar{\sigma})$ ,  $\dot{\varepsilon}(\infty) = 0$  (штриховые КП). Этот пример, в частности, показывает, что учет объемной сжимаемости и ползучести существенно изменяет качественное поведение кривых осевой ползучести по сравнению с  $\varepsilon(t)$  и сдвиговыми КП.

Податливость при осевой ползучести:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{11}(t)}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[ \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) \right].$$

Характер зависимости  $\kappa(t, \bar{\sigma})$  от  $t$  такой же, как у КП (11), а зависимость  $\kappa$  от  $\bar{\sigma}$  уже не обязана быть возрастающей (как и при одноосной ползучести, как и зависимость сдвиговой податливости  $S = \varepsilon(t)/\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$ ), и может вести себя по-разному, что и наблюдается в испытаниях разных материалов, например, у полиметилметакрилата  $\kappa(\bar{\sigma})$  убывает, а у полиэтилена высокой плотности – возрастает [4, с. 164]. В самом деле,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left[ \bar{\sigma}\Pi(t)\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\Phi_0'\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) - \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) \right],$$

где первые два слагаемых положительны, а два последних отрицательны. Объемная податливость  $w = \theta(t)/\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1}\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)$  тоже может быть и убывающей, и возрастающей, и немонотонной по  $\bar{\sigma} = 3\bar{\sigma}_0$  (что и наблюдается в испытаниях материалов).

На рис. 2 приведены зависимости податливости  $\varepsilon_{11}(t)/\bar{\sigma}$  (сплошные кривые 1–6),  $\varepsilon_{\perp}(t)/\bar{\sigma}$  (синие),  $\varepsilon(t)/\bar{\sigma}$  (штриховые),  $\theta(t)/\bar{\sigma}$  (красные кривые) той же модели (14) для тех же уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$  (кривые 1–6), что и на рис. 1 (КП (10)–(12), деленные на  $\bar{\sigma}$ ). В данном случае все податливости возрастают по  $\bar{\sigma}$ , как и КП; их выраженная зависимость от  $\bar{\sigma}$  свидетельствует о сильной нелинейности поведения модели при ползучести (в случае линейного ОС вязкоупругости податливости не зависят от  $\bar{\sigma}$ ).

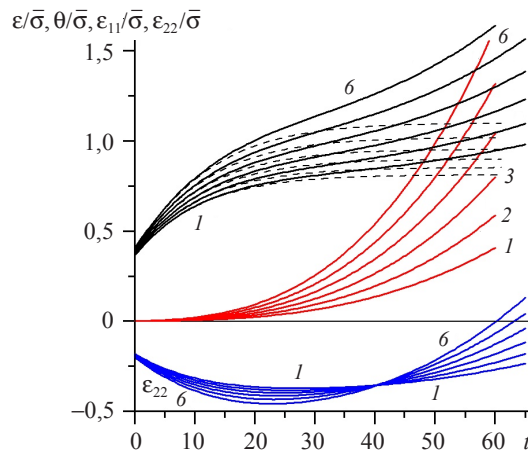


Рис. 2

### 3. Свойства коэффициента Пуассона в условиях ползучести при одноосном растяжении

Из уравнений КП (11), (12) получим выражение для коэффициента Пуассона  $\nu(t) = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{11}$ :

$$\begin{aligned} \nu(t, \bar{\sigma}) &= \frac{3\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))\operatorname{sgn} \bar{\sigma} - 2\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)}{6\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))\operatorname{sgn} \bar{\sigma} + 2\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)} = \\ &= 0,5 - \frac{3\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)}{6\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))\operatorname{sgn} \bar{\sigma} + 2\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)}. \end{aligned} \quad (15)$$



Можно выразить  $v$  через параметр вида деформированного состояния

$$\xi(t, \bar{\sigma}) = 3 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi_0(t)/3)}{\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))},$$

$$v(t, \bar{\sigma}) = 0,5 - \frac{3\theta(t)}{6\varepsilon(t) + 2\theta(t)} = 0,5 - \frac{3\xi}{6 + 2\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2\xi}. \quad (16)$$

Аналогичный параметр вида напряженного состояния  $\xi_\sigma = 3\sigma_0(t)/\sigma(t)$  тождественно равен 1 в случае  $\bar{\sigma} > 0$ , то есть не зависит от времени, как и параметры Лоде тензоров напряжений и деформаций, тождественно равные  $-1$  при любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $t > 0$ :

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_\perp - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_\perp} = -1.$$

Из условия  $\theta \geq 0$  (то есть из  $\Phi_0(x) > 0$  при  $x > 0$ ) следует  $\xi \geq 0$  и  $v(t) \leq 0,5$ . Кроме того, из возрастания  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(t)$  и  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  в случае  $\bar{\sigma} > 0$  следуют неравенства  $\theta(t) > 0$ ,  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > \Phi(\bar{\sigma}\Pi(0))$  и оценка снизу для коэффициента Пуассона  $v(t) > 0,5 - 3\theta(t)[6\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) + 2\theta(t)]^{-1}$ , учитывающая специфику МФ и изменения объема; а из  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  следует универсальная (но более грубая) оценка  $v(t) > -1$  при всех  $t > 0$ , справедливая для любых МФ и любого  $\bar{\sigma}$ . Для моделей с  $\Pi(0) = 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  формула (15) дает в пределе при  $t \rightarrow 0$   $v(0+) = -1$  для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (ибо  $\Phi(0) = 0$ ), а для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  имеем  $v(0+) = 0,5$  (ибо  $\Phi_0(0) = 0$ ). Функция  $v(\xi) = -1 + 9(6 + 2\xi)^{-1}$  из (16) (и обратная ей функция  $\xi(v) = (3/2)(1 - 2v)/(1 + v)$ ,  $v \in (-1; 0,5)$ ) убывает на луче  $\xi \geq 0$ ,  $v(0) = 0,5$ , и при  $\xi \rightarrow +\infty$  имеем  $v \rightarrow -1$ ,  $\varepsilon/\varepsilon_{11} \rightarrow 0$  и  $\theta/\varepsilon_{11} \rightarrow 3$ .

Коэффициент Пуассона (15) может быть отрицательным, так как возможно  $\varepsilon_\perp(t) > 0$ . Критерий отрицательности коэффициента Пуассона при ползучести имеет вид  $\xi(t) > 1,5$ , то есть

$$\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) > \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)). \quad (17)$$

Из (12) и вышесказанного следует, что кривые ползучести в продольном и поперечном направлении, вообще говоря, не подобны, то есть коэффициент Пуассона  $v(t)$  не постоянен. В силу (16) постоянство  $v(t)$  равносильно постоянству параметра  $\xi(t)$ . Критерий постоянства коэффициента Пуассона при ползучести налагает жесткую связь на МФ ОС (1): в силу (12)  $\varepsilon_\perp(t) = -v\varepsilon_{11}(t)$  равносильно

$$-\frac{1}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) = -v\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - v\frac{1}{3}\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right), \text{ или}$$

$$\Phi_0\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)\right) = 3(0,5 - v)(1 + v)^{-1}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)), \quad v = \text{const}. \quad (18)$$

В частности, (18) выполняется для несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ), когда  $v \equiv 0,5$  по (15), но никогда не выполняется при всех  $t > 0$  для реономного материала с упругим изменением объема ( $\Pi_0(t) = c > 0$ ,  $\Pi(t) \neq \text{const}$ ). Отметим, что в случае линейного ОС вязкоупругости с произвольными функциями ползучести критерий постоянства коэффициента Пуассона имеет вид

$$\Pi_0(t) = w\Pi(t), \quad w = 6(0,5 - v)(1 + v)^{-1} \geq 0,$$

тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{9} \bar{\sigma}(6+w)\Pi(t), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{9} \bar{\sigma}(w-3)\Pi(t).$$

Исследуем интервалы монотонности  $v(t)$ . Удобнее дифференцировать  $v(t)$  в виде (16) (дифференцирование выражения (15) приводит к довольно длинным выкладкам):

$$\dot{v}(t) = -3 \frac{\dot{\xi}(t)(6+2\xi(t)) - 2\xi(t)\dot{\xi}(t)}{(6+2\xi(t))^2} = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6+2\xi(t))^2}.$$

Знаки  $\dot{v}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $v(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$ ;

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-2} \left[ \Phi_0' \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \frac{1}{3} \bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t) \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_0 \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t)) \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) \right], \text{ или} \\ \dot{\xi}(t) &= \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1} \Phi_0 \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \left[ \Phi_0' \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \Phi_0 \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right)^{-1} \frac{1}{3} \bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t)) \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1} \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) \right]. \end{aligned}$$

Так как для  $\bar{\sigma} > 0$   $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))\Phi_0(\bar{\sigma}\Pi(t)/3) > 0$  при всех  $t > 0$ , то критерий возрастания коэффициента Пуассона (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид

$$\Phi_0' \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \Phi_0 \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right)^{-1} \frac{1}{3} \bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t) < \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t)) \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1} \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t),$$

или

$$\left[ \ln \Phi_0 \left( \frac{1}{3} \bar{\sigma}\Pi_0(t) \right) \right]' < [\ln \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))]'.$$

В случае модели с  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , то есть в случае (нелинейно) упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (это предположение часто применяется для упрощения задач), объемная деформация постоянна при ползучести, а из (11), (12) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C, \quad C = \Phi_0 \left( \frac{1}{3}c\bar{\sigma} \right) > 0, \quad \varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C, \quad \theta(t) = C, \\ v(t) &= \frac{3\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - 2C}{6\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + 2C} = 0,5 - \frac{3C}{6\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + 2C}, \quad \xi = \frac{C}{\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))}. \end{aligned} \quad (19)$$

Критерий отрицательности коэффициента Пуассона принимает вид  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) < 2C/3$ . В силу возрастания обеих МФ, если это неравенство выполняется в некоторый момент времени  $t = t_*$ , то оно заведомо выполняется при всех  $t < t_*$ . Критерий убывания  $\varepsilon_{\perp}(t)$  превращается в  $0 < \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)$ , то есть для любых  $\bar{\sigma}, p > 0$

$\varepsilon_{\perp}$  убывает при  $t > 0$ , так как  $\Phi'(x) > 0$  и  $\dot{\Pi}(t) > 0$ . Вместе с тем коэффициент Пуассона  $\nu(t)$  всегда строго возрастает (а  $\xi(t)$  убывает) при одноосном растяжении постоянной силой, поскольку  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$  в (19) возрастает:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= -C\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t), \\ \dot{\nu}(t) &= 18C(6\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + 2C)^{-2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t).\end{aligned}$$

При  $t \rightarrow \infty$   $\nu(t)$  стремится к пределу

$$\nu_{\infty} = \frac{3L - 2C}{6L + 2C},$$

где  $L = \lim \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) \leq \infty$ ; если  $L < \infty$ , то  $\nu_{\infty} < 0,5$ , а если  $L = +\infty$  (то есть когда МФ обладают свойствами  $\Phi(\bar{x} - 0) = \infty$  и  $\bar{\sigma}\Pi(\infty) > \bar{x}$ ), то  $\nu_{\infty} = 0,5$ . Эти свойства можно использовать как индикатор применимости гипотезы об упругой (обратимой) зависимости объемной деформации от среднего напряжения в сочетании с ОС (1). Податливость при осевой ползучести

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{11}(t)}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[ \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C \right]$$

может и возрастать, и убывать, и быть немонотонной:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left[ \bar{\sigma}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\Pi(t) - \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \frac{1}{3}C \right],$$

и знак  $\partial \kappa / \partial \bar{\sigma}$  совпадает со знаком функции  $x\Phi'(x) - \Phi(x) - C/3$ ,  $x = \bar{\sigma}\Pi(t)$ .

На рис. 3а приведены графики коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  модели (14) с  $\alpha_0 = 0,02$  (кривые 1–6) и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)$  (штриховые кривые 1–6) для тех же уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$ , что и на рис. 1. Функция  $\nu(t)$  убывает от  $\nu(0) = 0,5$  до  $\nu(\infty) = 1$ . Для сравнения приведены графики  $\nu(t)$  (штрихпунктирные линии 1'–6') для другой модели, отличающейся от модели (14) только тем, что  $\alpha_0 = 0$  и  $\Pi_0(t) = \beta_0 = \text{const}$ ,  $\beta_0 = 2$  (такая функция ползучести моделирует упругое изменение объема); коэффициент Пуассона в этом случае ведет себя совсем иначе:  $\nu(t)$  возрастает (оставаясь отрицательным), а не убывает, и диапазон его изменения для каждого  $\bar{\sigma}$  значительно уже, чем  $(-1; 0,5]$ ,  $\nu(0)$  и  $\nu(\infty)$  зависят от  $\bar{\sigma}$ . Кроме того, все КП и параметр  $\xi(t)$  ограничены (так как обе функции ползучести ограничены), а  $\xi(t)$  убывает от  $\xi(0) = \Phi_0(\beta_0\bar{\sigma}/3) / \Phi((\beta - \gamma)\bar{\sigma})$  до  $\xi(\infty) = \Phi_0(\beta_0\bar{\sigma}/3) / \Phi(\beta\bar{\sigma})$ , а не возрастает.

Если рассмотреть модель (14) с  $\alpha = 0,01$  вместо  $\alpha = 0$ , то получим пример немонотонности  $\nu(t)$  (кривые 10, 11 для  $\bar{\sigma} = 0,4; 0,5$ ).

На рис. 3б приведены графики коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)$  (красные штриховые кривые) модели с МФ

$$\Phi(x) = Ax^n, \quad \Phi_0(x) = A_0x^m, \quad \Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0(t) = \alpha_0 t + \beta_0 \quad (20)$$

при  $A = 0,01$ ,  $n = 6$ ,  $A_0 = 0,1$ ,  $m = 3$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_0 = 0,02$ ,  $\beta_0 = 0,1$  (она отличается от модели (14) только видом  $\Phi(x)$ ) для уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1,0$  (кривые 2–5, 10). В этом случае графики  $\nu(t)$  имеют точки максимума и минимума и горизонтальную асимптоту  $\nu(t) \rightarrow 0,5$  при  $t \rightarrow \infty$ . Чем больше  $\bar{\sigma}$ , тем выше лежит график  $\nu(t)$  и ниже  $\xi(t)$  (график  $\xi(t)$  для  $\bar{\sigma} = 0,2$  не изображен, так как значения  $\xi(t)$  слишком велики). Поведение  $\nu(t, \bar{\sigma})$  модели (20), но с  $n = 2 < m = 3$ ,

совсем иное:  $v(t)$  монотонно убывает от  $v(0) = 0,5$  до асимптоты  $v(\infty) = -1$  (синие штрихпунктирные кривые  $3', 5', 10'$  для  $\bar{\sigma} = 0,3; 0,5; 1,0$ ) и чем больше  $\bar{\sigma}$ , тем ниже лежит график  $v(t)$  (как и на рис. 3а).

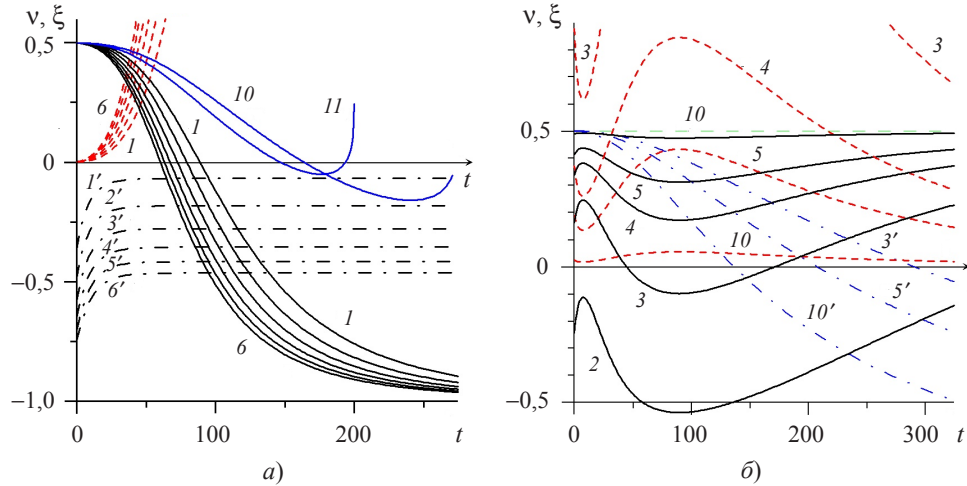


Рис. 3

### Заключение

Аналитически изучены уравнения семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести, порождаемых ОС (1) с четырьмя произвольными материальными функциями при одноосном нагружении, их характерные качественные свойства (интервалы монотонности, выпуклости, асимптотика) и влияние на них общих ограничений, налагаемых на материальные функции. Доказано, что ОС (1) способно моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации при постоянной осевой нагрузке. Выведена формула (16), связывающая коэффициент Пуассона и параметр вида деформированного состояния при одноосном растяжении (или сжатии), исследовано выражение для коэффициента Пуассона (15) через материальные функции и время, доказано, что при любых МФ коэффициент Пуассона  $v(t)$  может изменяться в диапазоне от  $-1$  до  $0,5$ , а параметр вида деформированного состояния  $\xi(t)$  – от нуля до бесконечности (при постоянстве параметра вида напряженного состояния и параметров Лодэ тензоров напряжений и деформаций). Найдены условия монотонности и немонотонности  $\xi(t)$  и  $v(t)$ , критерий отрицательности коэффициента Пуассона при ползучести, критерий его постоянства (то есть критерий подобия кривых ползучести в продольном и поперечном направлениях). В частности, доказано, что в случае упругой связи между объемом и средним напряжением коэффициент Пуассона реономного материала при одноосном растяжении не может быть постоянным, а всегда строго возрастает. Показано, что учет объемной сжимаемости и ползучести может существенно изменить качественное поведение кривых (осевой) ползучести и податливости, в частности, преобразует ограниченную кривую ползучести в кривую со стадией разупрочнения.

#### Список литературы

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
2. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л., Цируле К.И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. М.: Химия, 1981. 232 с.
3. Гольдман А.Я. *Объемная деформация пластмасс*. Л.: Машиностроение, 1984. 232 с.
4. Гольдман А.Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. Л.: Химия, 1988. 272 с.
5. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2009. 462 p.
6. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
7. Малинин Н.Н. *Ползучесть в обработке металлов давлением*. М.: Машиностроение, 1986. 221 с.
8. Головин Ю.И. *Наноинденитрование и его возможности*. М.: Машиностроение, 2009. 312 с.
9. Knauss W.G., Emri I. Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers. *Polymer Engineering and Science*. 1987. Vol. 27. P. 86–100.
10. Tschoegl N.W. Time dependence in material properties: an overview. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 1997. Vol. 1. No 1. P. 3–31.
11. Hilton H.H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *Journal of Elasticity*. 2001. Vol. 63. P. 221–251.
12. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2002. Vol. 6. No 1. P. 3–51.
13. Ломакин Е.В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами. *Физическая мезомеханика*. 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
14. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy. *Experimental Mechanics*. 2007. Vol. 47. P. 237–249.
15. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R.W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011. Vol. 15. No 1. P. 15–28.
16. Kastner M., Obst M., Brummund J. et al. Inelastic material behavior of polymers - Experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*. 2012. Vol. 52. P. 40–57.
17. Жуков А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области. *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*. 1954. №12. С. 86–91.
18. Брехова В.Д. Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой. *Механика полимеров*. 1965. №4. С. 43–46.
19. Дзене И.Я., Путанс А.В. Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена. *Механика полимеров*. 1967. №5. С. 947–949.
20. Калинин А.Е., Вахрушев А.В. О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов. *Механика композитных материалов*. 1985. №2. С. 351–354.
21. Кожевникова М.Е. Характер изменения границы зоны пластичности и коэффициента Пуассона в зависимости от пластического разрушения. *Физическая мезомеханика*. 2012. Т. 15. №6. С. 59–66.
22. Ломакин Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1980. №4. С. 92–99.
23. Щербак В.В., Гольдман А.Я. Объемные изменения дисперсно наполненных композитов при испытании в условиях ползучести. *Механика композитных материалов*. 1982. №3. С. 549–552.
24. Ozupek S., Becker E.B. Constitutive equations for solid propellants. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1997. Vol. 119. No 2. P. 125–132.
25. Быков Д.Л., Пелешко В.А. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения

- жения в различных баротермических условиях. *Изв. РАН. МТТ*. 2008. №6. С. 40–65.
26. Shekhar H., Sahasrabudhe A.D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing. *Propellants Explosives Pyrotechnics*. 2011. Vol. 36. No 6. P. 558–563. DOI: 10.1002/prop.200900079.
27. Cui H.R., Tang G.J., Shen Z.B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method. *Propellants Explosives Pyrotechnics*. 2016. Vol. 41. No 5. P. 835–843.
28. Дзене И.Я., Крегерс А.Ф., Вилкс У.К. Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть 1. *Механика полимеров*. 1974. №3. С. 399–405.
29. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987. Vol. 235. P. 1038–1040.
30. Friis E.A., Lakes R.S., Park J.B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *Journal of Materials Science*. 1988. Vol. 23. P. 4406–4414.
31. Берлин Ал.Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. Структура изотропных материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона. *Высокомолекулярные соединения. Сер. Б*. 1991. Т. 33. №8. С. 619–621.
32. Берлин Ал.Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел. *Высокомолекулярные соединения. Сер. Б*. 1992. Т. 34. №7. С. 6–32.
33. Milton G.W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$ . *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1992. Vol. 40. P. 1105–1137.
34. Lakes R.S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal Composite Materials*. 1993. Vol. 27. P. 1193–1202.
35. Caddock B.D., Evans K.E. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses. *Biomaterials*. 1995. Vol. 16. P. 1109–1115.
36. Chan N., Evans K.E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams. *Journal of Cellular Plastics*. 1998. Vol. 34. P. 231–260.
37. Alderson K.L., Fitzgerald A., Evans K.E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene. *Journal of Materials Science*. 2000. Vol. 35. P. 4039–4047.
38. Конёк Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (Обзор). *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10. № 1. С. 35–69.
39. Greaves G.N. Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials. *Nature Materials*. 2011. Vol. 10. No 11. P. 823–837.
40. Volokh K.Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect. *Journal of Biomechanics*. 2017. Vol. 61. P. 123–130.
41. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Изменчивость коэффициента Пуассона для гекгональных кристаллов под давлением. *Труды МАИ*. 2016. №87. С. 1–22.
42. Векилов Ю.Х., Красильников О.М., Луговской А.В. Упругие свойства твердых тел при высоких давлениях. *Успехи физических наук*. 2015. Т. 185. №11. С. 1215–1224.
43. Айнбиндер С.Б., Алксне К.И., Тюнина Э.Л., Лака М.Г. *Свойства полимеров при высоких давлениях*. М.: Химия, 1973. 192 с.
44. Хохлов А.В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. № 4. С. 452–466.
45. Хохлов А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти. *Вестник МГУ. Серия I: Математика. Механика*. 2017. №5. С. 26–31.
46. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. №3. С. 93–123.
47. Хохлов А.В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гаупр-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова. *Механика композитных материалов*. 2018. Т. 54. №4. С. 687–708.
48. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нели-



нейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Изв. РАН. МТТ*. 2019. №2. С. 29–47. DOI: 10.1134/S0572329919020077.

49. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием. *ПММ*. 1948. Т. 12. №1. С. 53–62.

50. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

51. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории. *ПМТФ*. 1971. №2. С. 76–82.

52. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.

53. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*. Eds. by Fung Y.C. et al. New Jersey: Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.

54. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer, 1993. 568 p.

55. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.

56. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society A*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.

57. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Изв. АН СССР. МТТ*. 2004. №1. С. 174–181.

58. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями. *Композиты и наноструктуры*. 2011. №2. С. 28–39.

59. Хохлов А.В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. № 1. С. 65–95. DOI: 10.14498/vsgtu1543.

60. Хохлов А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации. *Изв. РАН. МТТ*. 2018. №3. С. 81–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.

#### References

1. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov [Resistance of Polymeric and Composite Materials]*. Riga. Zinatne Publ. 1980. 571 p. (In Russian).

2. Ainbinder S.B., Tiunina E.L., Tsirole K.I. *Svoistva polimerov v razlichnykh napriazhennykh sostoianiyakh [Properties of Polymers under Various Stress States]*. Moscow. Khimiya Publ. 1981. 232 p. (In Russian).

3. Gol'dman A.Ya. *Obiemaia deformatsiia plastmass [Volume Deformation of Plastics]*. Leningrad. Mashinostroenie Publ. 1984. 232 p. (In Russian).

4. Gol'dman A.Ya. *Prognozirovanie deformatsionno-prochnostnykh svoystv polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Prediction of Deformation and Strength Properties of Polymeric and Composite Materials]*. Leningrad. Khimiya Publ. 1988. 272 p. (In Russian).

5. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 2009. 462 p.

6. Lokoshchenko A.M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca. Raton..London. N.Y. CRC Press. 2018. 546 p.

7. Malinin H.N. *Polzuchest v obrabotke metallov davleniem [Creep in Metal Forming]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1986. 221 p. (In Russian).

8. Golovin Yu.I. *Nanoindentirovanie i yego vozmozhnosti [Nanoindentation and its Capabilities]*. Moscow. Masshinostroenie Publ. 2009. 312 p. (In Russian).

9. Knauss W.G., Emri I. Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers. *Polym. Eng. Sci*. 1987. Vol. 27. P. 86–100.

10. Tschoegl N.W. Time dependence in material properties: An overview. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 1997. Vol. 1. No 1. P. 3–31.

11. Hilton H.H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *J. Elast.* 2001. Vol. 63. P. 221–251.
12. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2002. Vol. 6. No 1. P. 3–51.
13. Lomakin E.V. Mechanics of media with stress-state dependent properties. *Physical Mesomechanics*. 2007. Vol. 10. No 5–6. P. 255–264.
114. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy. *Experimental Mechanics*. 2007. Vol. 47. P. 237–249.
15. Tscharnuter D., Jerabek M., Major-Z., Lang R.W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011. Vol. 15. No 1. P. 15–28.
16. Kastner M., Obst M., Brummund J. et al. Inelastic material behavior of polymers - Experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*. 2012. Vol. 52. P. 40–57.
17. Zhukov A.M. O koeffitsiente Puassona v plasticheskoi oblasti [On Poisson's ratio in plastic domain]. *Izvestiia AN SSSR. Otd. tekhn. nauk [News of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences]*. 1954. No 12. P. 86–91 (In Russian).
18. Brekhova V.D. Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load. *Polimer Mechanics*. 1965. No 4. P. 23–24.
19. Dzene I.Ya., Putans A.V. Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep. *Polimer Mechanics*. 1967. No 5. P. 626–627.
20. Kalinnikov A.E., Vakhrushev A.V. Creep of a composite with different resistance in a plane stress state. *Mechanics of Composite Materials*. 1985. Vol. 20. Iss. 4. P. 444–448.
21. Kozhevnikova M.E. Plastic zone boundary and Poisson's ratio depending on plastic loosening. *Physical Mesomechanics*. 2013. Vol. 16. Iss. 2. P. 162–169.
22. Lomakin E.V. Nelineinaia deformatsiia materialov, soprotivlenie kotorykh zavisit ot vida napriazhennogo sostoiianiia [Non-linear deformation of materials with stress-state dependent properties]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1980. Iss. 4. P. 92–99 (In Russian).
23. Shcherbak V.V., Gol'dman A.Ya. Ob'emnye izmeneniia dispersno napolnennykh kompozitov pri ispytanii v usloviakh polzuchesti [Volume changes in dispersely filled composites under creep tests]. *Mekhanika kompozitnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. 1982. No 3. P. 549–552 (In Russian).
24. Ozupek S., Becker E.B. Constitutive equations for solid propellants. *J. Engng. Mater. Technol.* 1997. Vol. 119. No 2. P. 125–132.
25. Bykov D.L., Peleshko V.A. Constitutive relations for strain and failure of filled polymer materials in dominant axial tension processes under various barothermal conditions. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. Iss. 6. P. 870–891.
26. Shekhar H., Sahasrabudhe A.D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing. *Propellants Explosives Pyrotechnics*. 2011. Vol. 36. No 6. P. 558–563. DOI: 10.1002/prop.200900079.
27. Cui H.R., Tang G.J., Shen Z.B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method. *Propellants Explosives Pyrotechnics*. 2016. Vol. 41. No 5. P. 835–843.
28. Dzene I.Ya., Kregers A.F., Vilks U.K. Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of uni-axial tension. Part I. *Polimer Mechanics*. 1974. No 3. P. 337–342.
29. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987. Vol. 235. P. 1038–1040.
30. Friis E.A., Lakes R.S., Park J.B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *J. Mater. Sci.* 1988. Vol. 23. P. 4406–4414.
31. Berlin A.I., Rotenburg L., Basert R. Struktura izotropnykh materialov s otritsatel'nym koeffitsientom Puassona [Structure of isotropic materials with a negative Poisson's ratio]. *Vysokomolekuliarnye soedineniya. Ser. B. [Polymer Science. Series B]*. 1991. Vol. 33. No 8. P. 619–621 (In Russian).

32. Berlin A.I., Rotenburg L., Basert R. Osobennosti deformatsii neuporiadochennykh polimernykh i nepolimernykh tel [Specific features of deformation of non-ordered polymeric and non-polymeric solids]. *Vysokomolekuliarnye soedineniya. Ser. B. [Polymer Science. Series B]*. 1992. Vol. 34. No 7. P. 6–32 (In Russian).
33. Milton G.W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$ . *J. Mech. Phys. Solids*. 1992. Vol. 40. P. 1105–1137.
34. Lakes R.S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal Composite Materials*. 1993. Vol. 27. P. 1193–1202.
35. Caddock B.D., Evans K.E. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses. *Biomaterials*. 1995. Vol. 16. P. 1109–1115.
36. Chan N., Evans K.E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams. *J. Cell. Plastics*. 1998. Vol. 34. P. 231–260.
37. Alderson K.L., Fitzgerald A., Evans K.E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene. *J. Mater. Sci.* 2000. Vol. 35. P. 4039–4047.
38. Konyok D.A., Wojciechowski K.W., Pleskachevsky Iu.M., Shil'ko S.V. Materialy s otritsatel'nym koeffitsientom Puassona (Obzor) [Materials with negative Poisson's ratio (Review)]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh [Journal on Composite Mechanics and Design]*. 2004. Vol. 10. No 1. P. 35–69 (In Russian).
39. Greaves G.N., Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials. *Nature Materials*. 2011. Vol. 10. No. 11. P. 823–837. DOI: 10.1038/NMAT3134.
40. Volokh K. Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect. *Journal of Biomechanics*. 2017. Vol. 61. P. 123–130.
41. Gol'dshteyn R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Izmenchivost koeffitsienta Puassona dlya geksagonalnykh kristallov pod davleniem [Variability of Poisson's ratio for hexagonal crystals under pressure]. *Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Works MAI]*. 2016. Vol. 87. P. 1–22. <http://trudymai.ru/published.php?ID=69526> (In Russian).
42. Vekilov Yu.Kh., Krasilnikov O.M., Lugovskoy A.V. Elastic properties of solids at high pressure. *Physics – Uspekhi*. 2015. Vol. 58. No 11. P. 1106–1114.
43. Ainbinder S.B., Alksne K.I., Tiunina E.L., Laka M.G. *Svoystva polimerov pri vysokikh davleniyakh [Properties of Polymers under High Pressure]*. Moscow. Khimiya Publ. 1973. 192 p. (In Russian).
44. Khokhlov A.V. Krivyye polzuchesti i relaksatsii nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya Y.N. Rabotnova dlya vyazkoprugoplastichnykh materialov [Creep and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear constitutive relation for viscoelastoplastic materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2016. Vol. 78. No 4. P. 452–466 (In Russian).
45. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin. Series: Mathematics, Mechanics*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.
46. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkoprugoplastichnykh materialov [Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials]. *Vestnik moskovskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.E. Bauman. Estestvennyye nauki [Bulletin of Moscow State Technical University im. N.E. Bauman. Series: Natural Sciences]*. 2017. No 3. P. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123 (In Russian).
47. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.
48. Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov non-linear relation for viscoelastic materials. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. Iss. 2.
49. Rabotnov Yu.N. Ravnovesiye uprugoy sredy s posledeystviyem [Equilibrium of elastic medium with heredity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1948. Vol. 12. No 1. P. 53–62 (in Russian).

50. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsiy* [Creep Problems in Structural Members]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (in Russian).
51. Dergunov N.N., Papernik L.H., Rabotnov Yu.N. Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the non-linear hereditary theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 1971. No 2. P. 76–82. (In Russian).
52. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel* [Introduction to Hereditary Mechanics of Solids]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).
53. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*. Eds. by Fung Y.C. et al. New Jersey. Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.
54. Fung Y.C. Biomechanics. *Mechanical Properties of Living Tissues*. New York. Springer. 1993. 568 p.
55. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.
56. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
57. Suvorova Y.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Y.N. Rabotnova i yego prilozheniyakh [On the Yu. N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2004. Iss. 1. P. 174–181 (In Russian).
58. Alekseyeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of the viscoelastic properties of polymer composites with carbon fillers]. *Kompozity i nanostrukturny* [Composites and Nanostructures]. 2011. No 2. P. 28–39 (In Russian).
59. Khokhlov A.V. Analiz svoystv krivykh polzuchesti s proizvol'noy nachal'noy stadiyey nagruzheniya, porozhdayemykh lineynoy teoriyey nasledstvennosti [Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage]. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Fiz.-mat. nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2018. Vol. 22. No 1. P. 65–95. DOI: 10.14498/vsgtu1543 (In Russian).
60. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. Iss. 3. P. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105.

**GENERAL PROPERTIES OF THE CREEP CURVES FOR VOLUMETRIC,  
AXIAL AND LATERAL STRAIN GENERATED BY THE RABOTNOV NON-LINEAR  
VISCOELASTICITY RELATION UNDER UNI-AXIAL LOADINGS**

**Khokhlov A.V.**

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russian Federation*

The Rabotnov physically non-linear (quasi-linear) constitutive equation for non-aging elasto-viscoplastic materials with four material functions is studied analytically in order to outline the set of basic rheological phenomena which it can simulate, to clarify the material functions governing abilities, to indicate application field of the relation and to develop identification and verification techniques. General properties of the theoretic creep curves for volumetric, longitudinal and lateral strain generated by the model under uni-axial loading are investigated assuming material functions of the relation are arbitrary. Intervals of creep curves monotonicity and conditions for existence of extrema and sign changes are considered and the influence of minimal qualitative restrictions

imposed on its material functions is analyzed. It is proved that the Rabotnov relation is able to simulate non-monotone behavior and sign changes of lateral strain and Poisson's ratio (lateral contraction ratio in creep). The expressions for Poisson's ratio via the strain state parameter (equal to volumetric strain divided by deviatoric strain) and via four material functions of the model are derived. The Poisson's ratio dependence on time, stress level and material functions is examined. Assuming material functions are arbitrary, general two-sided bound for the Poisson's ratio range is obtained. Additional restrictions on material functions providing negative Poisson's ratio values are found and the criterion for its non-dependence on time is formulated. Taking into account volumetric creep (governed by two material functions of the model) is proved to affect strongly the qualitative behavior and characteristic features of longitudinal creep curves and the Poisson's ratio evolution.

*Keywords:* viscoelasticity, physical non-linearity, compressibility, volumetric creep, filled polymers, quasi-linear stress-strain relation, hydrostatic stress tensor, deviatoric stress tensor, lateral contraction ratio in creep, non-monotone lateral strain, negative Poisson's ratio.