УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-137-145

ВЫПУЧИВАНИЕ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ*

Пешхоев И.М., Соболь Б.В.

Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация

peshkhoev@rambler.ru, b.sobol@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2019

Рассматривается задача о влиянии начальных несовершенств в виде малых поперечных нагрузок на потерю устойчивости и послекритическое поведение сжатой упругой прямоугольной пластины, лежащей на нелинейно-упругом основании. Пластина содержит в плоском состоянии непрерывно распределенные краевые дислокации и клиновые дисклинации или другие источники внутренних напряжений. Исследование ведется на основе модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана для упругой пластины с дислокациями и дисклинациями, в которых дополнительно учитывается реакция основания в виде многочлена второй или третьей степени от прогиба. Рассмотрены два случая краевых условий: свободного защемления и подвижного шарнирного опирания краев. Задача сведена к решению двух задач: линейной краевой задачи для бигармонического уравнения, которая определяет функцию напряжений, обусловленных внутренними источниками, и задачи для системы нелинейных уравнений, из которых определяется прогиб и функция напряжений, вызванных внешним воздействием сжимающих нагрузок и нелинейно-упругого основания. Эта система записывается в виде нелинейного операторного уравнения, которое исследуется методом Ляпунова – Шмидта. Линеаризованное уравнение представляет собой многопараметрическую краевую задачу на собственные значения, которая решается конечно-разностным методом. Коэффициенты системы уравнений разветвления находятся численным методом. Исследовано послекритическое поведение пластины, и выведены асимптотические формулы для новых равновесий в окрестности критических нагрузок. Для различных значений параметров сжимающих нагрузок и параметра внутренних напряжений установлены соотношения между значениями параметров основания, при которых сохраняется несущая способность пластины в окрестности классического значения критической нагрузки.

Ключевые слова: упругая пластина, ветвление равновесий, критическая нагрузка, внутренние напряжения, нелинейно-упругое основание, метод Ляпунова – Шмидта.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №18-01-00017, №19-08-00074).

Введение

Проблема исследования выпучивания и послекритического поведения пластин с несовершенствами достаточно актуальна [1–12]. В статье Л.М. Зубова [1] построена модификация системы нелинейных уравнений Кармана для упругих пластин, учитывающая наличие дислокаций и дисклинаций. В [2] изучено влияние непрерывно распределенных дисклинаций на прогибы и напряженное состояние круглой гибкой пластинки. Метод Ляпунова – Шмидта для нелинейных уравнений в банаховых пространствах был развит В.А. Треногиным [3] и применен в 1968 г. Л.С. Срубщиком и В.А. Треногиным [4] для исследования задачи о влиянии малой поперечной нагрузки на послекритическое поведение пластины произвольной формы под действием параллельных осям координат сжимающих краевых усилий. Влияние нелинейно-упругого основания на послекритическое поведение безмоментного плоско-напряженного состояния в случае бесконечной пластины с малыми несовершенствами исследовалось Е. Рейсснером [5], а в случае тонкой сжатой пластины выпуклой формы со свободным краем – Л.С. Срубщиком [6, 7]. В статье [8] исследованы критические нагрузки сжатой упругой пластины с дислокациями и дисклинациями. В [9] изучалась задача об устойчивости двухслойной круговой пластины с предварительно напряженным слоем, в [10] рассматриваются бесконечно малые деформации пластины из гиперупругих материалов с учетом неоднородно распределенных начальных напряжений. В статье [11] исследуются изгибные деформации трехслойной пластины с учетом поверхностных и межфазных напряжений и выведены формулы для параметров жесткости пластины. В монографии [12] содержится обзор некоторых результатов применения методов Ляпунова – Шмидта к нелинейным задачам, полученных российскими математиками.

1. Постановка задачи

Пусть тонкая упругая прямоугольная пластина, содержащая в плоском состоянии ансамбли непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, лежит на нелинейно-упругом основании и находится под действием малой нормальной нагрузки интенсивностью $\xi G(X,Y)$ и внешнего краевого давления, составляющие которого вдоль осей X и Y равны соответственно P и Q. Тогда система уравнений равновесия [1] с учетом реакции основания в виде $K_1W - K_3W^3$ и некоторых преобразований [8] в безразмерных переменных может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \Delta_\alpha^2 w + p\alpha w_{xx} + q w_{yy} + k_1 w - k_3 w^3 = \alpha[w,F] + r\alpha[w,F_\mu] + \xi g, \\ \Delta_\alpha^2 F + \alpha[w,w]/2 = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \quad \Omega = \{(x,y): |x|<1/2,\ |y|<1/2\}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\Delta_\alpha(\,) = (\,)_{yy} + \alpha(\,)_{xx}, \quad \Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha\Delta_\alpha, \quad [w,F] = w_{xx}F_{yy} + w_{yy}F_{xx} - 2w_{xy}F_{xy}.$$

Рассматриваются краевые условия свободного защемления $w = w_n = F = F_n = 0$ или подвижной шарнирной опоры краев $w = w_{nn} = F = F_n = 0$, где нижний индекс обозначает дифференцирование по внешней нормали к границе прямоугольника Ω. Функция F_μ является решением задачи $\Delta_\alpha^2 F_\mu = \overline{\mu}$, $(x,y)\in\Omega$, и $F_\mu = (F_\mu)_n = 0$ на границе Ω и равна функции напряжений, вызванных внутренними источниками, а F – функция напряжений, вызванных внешними источниками. Связь с размерными переменными выражается формулами:

$$X = ax, \quad Y = by, \quad W(X,Y) = \frac{w(x,y)h}{\gamma}, \quad \Phi(X,Y) = D\big(F(x,y) + F_\mu(x,y)\big),$$

$$P = \frac{Dp}{b^2}, \quad Q = \frac{Dq}{\alpha a^2}, \quad K_1 = \frac{Dk_1}{\alpha^2 a^4}, \quad K_2 = \frac{\gamma Dk_2}{h\alpha^2 a^4}, \quad K_3 = \frac{\gamma^2 Ehk_3}{\alpha^2 a^4},$$

$$G(X,Y) = \frac{hDg(x,y)}{\gamma b^4}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad r\overline{\mu} = \frac{r\mu\gamma^2}{h^2}.$$

Здесь a, b – размеры пластины; $r\overline{\mu}(X,Y)$ – скалярная мера несовместности, которая выражается через плотности дислокаций и дисклинаций, r назовем параметром интенсивности внутренних напряжений; $W(X,Y)$ – прогиб пластины; $\Phi(X,Y)$ – функция напряжений Эри; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; $K_1W - K_3W^3$ – реакция упругого основания; K_1, K_3 – параметры основания; ξ – малый числовой параметр. Отметим, что в работах Амазиго [13], Хансена [14] реакция основания имеет вид $K_1W - K_3W^3$, $K_1 > 0$. При $K_3 > 0$ основание называется размягченным, а в случае $K_3 < 0$ – упрочняющимся. Рейсснер [5] наряду с кубической рассматривал также квадратичную реакцию основания вида $K_1W - K_2W^2$. Предполагается, что энергия деформации упругого основания положительна, то есть выполняется условие

$$\iint_\Omega \left(\frac{K_1W^2}{2} - \frac{K_3W^4}{4} \right) dxdy > 0.$$

2. Метод решения

Пусть E^2 – гильбертово пространство – замыкание множества вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ с нормой, определяемой скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{E^2} = \iint_\Omega (f_1g_1 + f_2g_2)\,dxdy, \quad f = (f_1, f_2),\ g = (g_1, g_2),$$

E^1 – замыкание линейного множества бесконечно дифференцируемых в прямоугольной области Ω вектор-функций $u = (w, F)$, $v = (w_1, F_1)$, удовлетворяющих краевым условиям $w = w_n = F = F_n = 0$ или $w = w_{nn} = F = F_n = 0$ на границе прямоугольника Ω, с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{E^1} = \sum_{i+j \le 4} \langle \partial^{i+j} u / \partial x^i \partial y^j, \partial^{i+j} v / \partial x^i \partial y^j \rangle_{E^2}.$$

Считая функцию g достаточно гладкой в области Ω, запишем краевую задачу (1) как нелинейное операторное уравнение

$$\mathrm{M}_0 u = \Pi u + \mathrm{T} u + \xi \mathrm{R}, \quad u = (w, F) \in E^1,\ \mathrm{R} = (g, 0) \in E^2, \tag{2}$$

$$\mathrm{M}_0 u = \begin{pmatrix} \Delta_\alpha^2 w + p\alpha w_{xx} + q w_{yy} + k_1 w - r\alpha[w, F_\mu] \\ -\Delta_\alpha^2 F \end{pmatrix}, \quad \Pi u = \begin{pmatrix} \alpha[w, F] \\ \alpha[w, w]/2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T} u = \begin{pmatrix} k_3 w^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из публикаций И.И. Воровича [15] и Н.Ф. Морозова [16] следует, что операторы M_0, Π и T действуют из пространства E^1 в E^2. При $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $\xi = 0$ уравнение (2) имеет тривиальное решение $u_* = (w_*, F_*) = (0, 0)$. Точка бифуркации (p_0, q_0, r_0) уравнения определяется в [17] как собственное число краевой задачи $\mathrm{M}_0 u = 0$, которая получена линеаризацией уравнения на тривиальном решении. Пусть

$p = p_0 + \lambda_1$, $q = q_0 + \lambda_2$, $r = r_0 + \lambda_3$, $w = w_* + \omega = \omega$, $F = F_* + \psi = \psi$. Запишем уравнение для малых возмущений λ_1, λ_2, λ_3, $u = (\omega, \psi)$ в виде:

$$\mathrm{M}_0 u = \Pi u + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathrm{C}_i u + \mathrm{T}u + \xi \mathrm{R}, \tag{3}$$

$$\mathrm{C}_1 u = \begin{pmatrix} -\alpha\omega_{xx} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}_2 u = \begin{pmatrix} -\omega_{yy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}_3 u = \begin{pmatrix} -\alpha[\omega, F_\mu] \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{C}_i : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Линеаризованное уравнение $\mathrm{M}_0 u = 0$ сводится к краевой задаче на собственные значения

$$\Delta_\alpha^2 \omega + q\omega_{yy} + k_1\omega - r\alpha[\omega, F_\mu] = -p\alpha\omega_{xx} \tag{4}$$

с краевыми условиями $\omega = \omega_n$ или $\omega = \omega_{nn}$ на границе Ω. Разностный метод решения задачи (4) на собственные значения обоснован в [8]. Пусть p_0 – собственное значение задачи (4) при заданных значениях параметров q, r, k_1 и ему отвечают две собственные функции ω_1 и ω_2. Тогда собственные вектор-функции уравнения $\mathrm{M}_0 u = 0$ имеют вид: $\varphi_1 = (\omega_1, \psi_1)$, $\varphi_2 = (\omega_2, \psi_2)$, при этом $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Строим оператор Шмидта [17] в виде

$$\mathrm{M}_1 u = M_0 u + \sum_{i=1}^{2} a_i \mu_i \varphi_i, \quad \mu_i = \langle u, \varphi \rangle_{\mathrm{E}^1}, \quad a_i \iint\limits_\Omega \omega_i^2 \, dxdy = 1, \ i = 1, 2. \tag{5}$$

Нелинейное уравнение (2) с учетом (5) приводится к уравнению

$$\mathrm{M}_1 u = \Pi u + \sum_{i=1}^{2} a_i \mu_i \varphi_i + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathrm{C}_i u + \mathrm{T}u + \xi \mathrm{R}. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{i+j+k+l+m+n \ge 1} u_{ijklmn} \, \mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n, \quad u_{ijklmn} = (\omega_{ijklmn}, \psi_{ijklmn}),$$

и, приравнивая нулю выражения при степенях $\mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n$, получаем уравнения для определения коэффициентов $\mathrm{M}_1 u_{ijklmn} = f_{ijklmn}$. Эти задачи разрешимы в силу обобщенной леммы Шмидта [17]. Функции f_{ijklmn} находятся с помощью правой части (6) и последовательного решения задачи $\mathrm{M}_1 u_{ijklmn} = f_{ijklmn}$ и выражаются через собственные функции ω_1 и ω_2 задачи (4). Учитывая разложение решения u в ряд, из второго уравнения (5) получим систему уравнений разветвления [17]:

$$\sum_{i+j+k+l+m+n>0} L_{ijklmn}^{(t)} \mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n = \mu_t, \quad L_{ijklmn}^{(t)} = \langle f_{ijklmn}, \varphi_t \rangle_{\mathrm{E}^2}, \quad t = 1, 2. \tag{7}$$

Численные расчеты показали, что при $\overline{\mu}(x,y) = \mathrm{const} > 0$ функция внутренних напряжений $F_\mu(x,y)$ четная по обеим переменным и неотрицательная. Если $\overline{\mu}(x,y)$ четная по обеим переменным (нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной), то и $F_\mu(x,y)$ четная по обеим переменным (нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной). Поэтому будем считать, что собственному значению p_0 задачи (4) соответствуют две собственные функции: $\omega_1(x,y)$ – четная по обеим переменным и $\omega_2(x,y)$ – нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной. Полагая, что g четная с учетом выражений для f_{ijklmn}, по формулам (7) находим коэффициенты уравнений разветвления:

$$L^{(1)}_{100000} = a_1\iint\limits_\Omega \omega_1^2 dxdy = 1, \quad L^{(2)}_{010000} = a_2\iint\limits_\Omega \omega_2^2 dxdy = 1, \quad L^{(1)}_{000001} = \iint\limits_\Omega g\omega_1 dxdy,$$

$$L^{(1)}_{101000} = \alpha\iint\limits_\Omega (\omega_{1,x})^2 dxdy, \quad L^{(1)}_{100100} = \alpha\iint\limits_\Omega (\omega_{1,y})^2 dxdy, \quad L^{(1)}_{100010} = \iint\limits_\Omega [\omega_1, F_\mu]\omega_1 dxdy,$$

$$L^{(2)}_{011000} = \alpha\iint\limits_\Omega (\omega_{2,x})^2 dxdy > 0, \quad L^{(2)}_{010100} = \alpha\iint\limits_\Omega (\omega_{2,y})^2 dxdy, \quad L^{(2)}_{210000} = L^{(1)}_{120000},$$

$$L^{(2)}_{010010} = \iint\limits_\Omega [\omega_2, F_\mu]\omega_2 dxdy,$$

$$L^{(1)}_{120000} = -\alpha\iint\limits_\Omega (\Delta_\alpha\psi_{110000})^2 dxdy - 2\alpha\iint\limits_\Omega \Delta_\alpha\psi_{200000}\Delta_\alpha\psi_{020000} dxdy,$$

$$L^{(1)}_{300000} = -\alpha\iint\limits_\Omega (\Delta_\alpha\psi_{200000})^2 dxdy + k_3\iint\limits_\Omega \omega_1^4 dxdy,$$

$$L^{(2)}_{030000} = -\alpha\iint\limits_\Omega (\Delta_\alpha\psi_{020000})^2 dxdy + k_3\iint\limits_\Omega \omega_2^4 dxdy.$$

Функции $\psi_{200000}, \psi_{020000}, \psi_{110000}$ получаем из краевых задач

$$-\Delta_\alpha^2\psi_{200000} = \alpha\frac{[\omega_1,\omega_1]}{2}, \quad -\Delta_\alpha^2\psi_{020000} = \alpha\frac{[\omega_2,\omega_2]}{2}, \quad -\Delta_\alpha^2\psi_{110000} = \alpha[\omega_1,\omega_2]$$

с краевыми условиями $\psi = \psi_n = 0$ на границе прямоугольника Ω. Система уравнений разветвления имеет вид:

$$\Phi_1(\mu_1,\mu_2) = (a_1\mu_1^2 + b_1\mu_2^2 + \Lambda_1)\mu_1 + d_1\xi = 0, \quad \Phi_2(\mu_1,\mu_2) = (a_2\mu_1^2 + b_2\mu_2^2 + \Lambda_2)\mu_2 = 0, \quad (8)$$

$$a_1 = L^{(1)}_{300000}, \quad b_1 = L^{(1)}_{120000}, \quad \Lambda_1 = L^{(1)}_{101000}\lambda_1 + L^{(1)}_{100100}\lambda_2 + L^{(1)}_{100010}\lambda_3, \quad d_1 = L^{(1)}_{000001},$$

$$a_2 = L^{(2)}_{210000}, \quad b_2 = L^{(2)}_{030000}, \quad \Lambda_2 = L^{(2)}_{011000}\lambda_1 + L^{(2)}_{010100}\lambda_2 + L^{(2)}_{010010}\lambda_3.$$

3. Результаты численных расчетов

Рассмотрен случай потери устойчивости по двум собственным формам для квадратной пластины с шарнирно опертыми краями с параметрами:

$$k_1 = 500, \quad \overline{\mu} = 1, \quad r_0 = 1004, \quad g = 16(x-1/2)(x+1/2)(y-1/2)(y+1/2), \quad q_0 = 12,$$

$$a_1 = -0{,}2427 + 0{,}1214k_3, \quad b_1 = a_2 = -7{,}286, \quad d_1 = 0{,}250, \quad b_2 = -9{,}707 + 0{,}1352k_3,$$

$$\Lambda_1 = 2{,}228\lambda_1 + 2{,}205\lambda_2 + 0{,}03425\lambda_3, \quad \Lambda_2 = 9{,}576\lambda_1 + 2{,}397\lambda_2 + 0{,}0785\lambda_3.$$

Собственному значению $p_0 = 63{,}63$ задачи (4) отвечают две собственные функции. Положим $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Уравнения разветвления (8) примут вид:

$$\Phi_1(\mu_1,\mu_2) = (a_1\mu_1^2 + b_1\mu_2^2 + c_1\lambda_1)\mu_1 + d_1\xi = 0, \quad (9)$$

$$\Phi_2(\mu_1,\mu_2) = (a_2\mu_1^2 + b_2\mu_2^2 + c_2\lambda_1)\mu_2 = 0,$$

где $c_1 = 2{,}228$, $c_2 = 9{,}576$. Учитывая условие потери устойчивости [4, 6]

$$\left\| \frac{\partial\Phi_i}{\partial\mu_j} \right\| = 0,$$

выводим формулы для критического значения λ_s и новых решений уравнения (2):

1) $\lambda_s = p_s - p_0 = -\dfrac{3\sqrt[3]{d_1^2\xi^2 a_1/4}}{c_1}$, $\quad \tilde{u} = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{-3c_1\lambda_s/a_1}\varphi_1 + \xi u_{000001} + O(\Lambda_1)$;

при этом если $k_3 < 2$ ($k_3 > 2$), то $\lambda_s > 0$ ($\lambda_s < 0$);

2) $\lambda_s = \dfrac{3\sqrt[3]{d_1{}^2\xi^2 b_2^2(a_1b_2 - a_2b_1)/4}}{b_1c_2 - b_2c_1}$, формулы новых решений приведены в таблице 1,

где

$$\tau_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{3(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad \tau_2 = -\frac{3a_1b_2c_2 - 2a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1}{3b_2(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Таблица 1

№	Интервалы k_3	Знак λ_s	Формулы новых решений
1	$< -159{,}82$	+	$\tilde{u} = \pm\sqrt{\tau_1\lambda_s}\varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2\lambda_s}\varphi_2 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s)$
2	$(-159{,}82; -29{,}83)$	–	$\tilde{u} = \pm\sqrt{\tau_1\lambda_s}\varphi_1 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s)$
3	$(-29{,}83; 103{,}62)$	+	$\tilde{u} = \pm\sqrt{\tau_1\lambda_s}\varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2\lambda_s}\varphi_2 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s)$
4	$> 103{,}62$	–	$\tilde{u} = \pm\sqrt{\tau_1\lambda_s}\varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2\lambda_s}\varphi_2 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s)$

В случае квадратичной реакции основания $K_1W - K_2W^2$ получены уравнения разветвления

$$\Phi_1(\mu_1,\mu_2) = \bar{a}_1\mu_1^2 + \bar{b}_1\mu_2^2 + c_1\lambda_1\mu_1 + d_1\xi = 0, \quad \Phi_2(\mu_1,\mu_2) = (2\bar{b}_1\mu_1 + c_2\lambda_1)\mu_2 = 0, \quad (10)$$

$$\bar{a}_1 = L^{(1)}_{200000} = k_2\iint\limits_{\Omega}(\omega_1)^3\,dxdy = 0{,}1574k_2, \quad \bar{b}_1 = L^{(1)}_{020000} = k_2\iint\limits_{\Omega}(\omega_2)^2\omega_1\,dxdy = 0{,}1308k_2,$$

$$c_1 = 2{,}228, \quad c_2 = 9{,}576.$$

Используя условие потери устойчивости

$$\left\|\frac{\partial\Phi_i}{\partial\mu_j}\right\| = 0$$

и учитывая числовые значения коэффициентов, получим формулы критических значений и новых решений

$$\lambda_s = \pm 0{,}178\sqrt{\xi k_2}, \quad \tilde{u} = \pm 1{,}26\sqrt{\xi/k_2}\varphi_1 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s), \quad \xi k_2 > 0, \quad (11)$$

$$\lambda_s = \pm 0{,}044\sqrt{-\xi k_2}, \quad \tilde{u} = \mp 1{,}61\sqrt{-\xi/k_2}\varphi_1 + \xi u_{000001} + O(\lambda_s), \quad \xi k_2 < 0. \quad (12)$$

В случае $p_s < p_0$ ($\lambda_s < 0$) происходит снижение несущей способности пластины. Из анализа приведенных результатов следует, что для кубической реакции основания при $k_3 < -159{,}82$ (упрочняющееся [13, 14] основание) или $-29{,}83 < k_3 < 2$ выполняется условие $\lambda_s > 0$, то есть пластина сохраняет несущую способность. Отметим, что Койтер [18] первым, а затем Будянский и Хатчинсон [19, 20] указали на тот факт, что в случае $\xi \neq 0$ точка бифуркации p_0 может переходить в предельную точку p_s.

Заключение

Представлены результаты применения метода Ляпунова – Шмидта в сочетании с численными методами к исследованию задачи о влиянии малой поперечной нагрузки на выпучивание и начальное послекритическое поведение сжатой упругой прямоугольной пластины с внутренними источниками напряжений, лежащей на нелинейно-упругом основании. Выведены асимптотические формулы для новых равновесных состояний в окрестности критических нагрузок. Для различных значений параметров сжимающих нагрузок и параметра внутренних напряжений установлены соотношения между значениями параметров основания, при которых сохраняется несущая способность пластины в окрестности классического значения критической нагрузки.

Список литературы

1. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Доклады РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.

2. Зубов Л.М., Фам Т.Х. Сильный изгиб круглой пластинки с непрерывно распределенными дисклинациями. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2010. №4. С. 28–33.

3. Треногин В.А. Разветвление решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве. *Успехи математических наук*. 1958. Т. 13. Вып. 4. С. 197–204.

4. Срубщик Л.С., Треногин В.А. О выпучивании гибких пластин. *ПММ*. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 721–727.

5. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57.

6. Срубщик Л.С. Краевой эффект и выпучивание тонких пластин на нелинейно-упругом основании. *Дифференциальные уравнения*. 1985. Т. XXI. №10. С. 1790–1794.

7. Срубщик Л.С. *Выпучивание и послекритическое поведение оболочек*. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1981. 96 с.

8. Пешхоев И.М. О критических нагрузках сжатой упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями. *Вестник ДГТУ*. 2016. Т. 16. №1(84). С. 43–51.

9. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a twolayered circular plate with a prestressed layer. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781.

10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanic.* 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981.

11. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov (Eds). Vol. 81. Singapore: Springer, 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.

12. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. Vol. 550. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6.

13. Amasigo J.S., Frank D. Dinamic buckling of on imperfect column on non-linear foundation. *Qwarterly of Applied Mathematics*. 1973. Vol. XXXI. No 1. P. 1–9.

14. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644.

15. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* М.: Наука, 1989. 376 с.

16. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. *Докл. АН СССР.* 1957. Т. 114(5). С. 968–671.

17. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1969. 528 с.

18. Koiter W.T. Elastic stability and postbuckling behaviour. *Proc. Symp. Non-linear Problems* (Ed. by R.E. Langer). Madison: University of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.

19. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*. 1974. Vol. 14. P. 1–65.

20. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal.* 1966. Vol. 4. P. 1505–1510.

References

1. Zubov L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklina-tsiyami [Von Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations]. *Doklady RAN* [*Doklady Physics*]. 2007. Vol. 412. No 1. P. 67–70 (In Russian).

2. Zubov L.M., Fam T.Kh. Sil'nyy izgib krugloy plastinki s nepreryvno raspredelennymi disklinatsiyami [Strong deflactions of circular plate with continuously distributed disclinations]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*News of Universities. North Caucasus Region. Natural Sciences*]. 2010. No 4. P. 28–33 (In Russian).

3. Trenogin V.A. Razvetvlenie resheniy nelineynykh uravneniy v banakhovom prostranstve [Branching of solutions of non-linear equations in Banach space]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [*Russian Mathematical Surveys*]. 1958. Vol. 13. Iss. 4. P. 197–204 (In Russian).

4. Srubshchik L.S., Trenogin V.A. O vypuchivanii gibkikh plastin [About bucking flexible plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 1968. Vol. 32. Iss. 4. P. 721–727 (In Russian).

5. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57.

6. Srubshchik L.S. Kraevoy effekt i vypuchivanie tonkikh plastin na nelineyno-uprugom osnovanii [Edge effect and bulging of thin plates on a non-linear elastic base]. *Differentsialnye uravneniya* [*Differential Equations*]. 1985. Vol. XXI. No 10. P. 1790–1794 (In Russian).

7. Srubshchik L.S. *Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie obolochek* [*Bulging and Post-critical Behavior of Shells*]. Rostov-on-Don. Rostov University Publ. 1981. 96 p. (In Russian).

8. Peshkhoev I.M. O kriticheskikh nagruzkakh szhatoy uprugoy pryamougolnoy plastiny s dislokatsiyami i disklinatsiyami [On critical loads of a compressed elastic rectangular plate with dislocations and disclinations]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Bulletin of the Don State Technical University*]. 2016. Vol. 16. No 1(84). P. 43–51 (In Russian).

9. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a twolayered circular plate with a prestressed layer. *Math. Mech. Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781.

10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *Int. J. Non-Lin. Mech*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981.

11. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov (Eds). Vol. 81. Singapore. Springer. 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.

12. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in non-linear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. Vol. 550. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. 2002. 548 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6.

13. Amasigo J.S., Frank D. Dinamic buckling of on imperfect column on non-linear foundation. *Q. Appl. Math.* 1973. Vol. XXXI. No 1. P. 1–9.

14. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA Journa*l. 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644.

15. Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek* [*Mathematical Problems of the Non-linear Theory of Shallow Shells*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 376 p. (In Russian).

16. Morozov N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin [On the non-linear theory of thin plates]. *Doklady AN SSSR* [*Doklady Physics*]. 1957. Vol. 114. No 5. P. 968–671 (In Russian).

17. Vaynberg M.M., Trenogin V.A. *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [*Branching Theory of Solutions of Non-Linear Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1969. 528 p. (In Russian).

18. Koiter W.T. Elastic stability and postbuckling behaviour. *Proc. Symp. Non-linear Problems* (Ed. by R.E. Langer). Madison. Univ. of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.

19. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Advances in Appl. Mech*. 1974. Vol. 14. P. 1–65.
20. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. P. 1505–1510.

BUCKLING AND POSTBUCKLING BEHAVIOR COMPRESSED OF THE RECTANGULAR PLATE WITH INTERNAL STRESSES, LYING ON NON-LINEAR ELASTIC FOUNDATION

Peshkhoev I.M., Sobol B.V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The problem of the effect of initial imperfections in the form of small transverse loads on the loss of stability and the post-critical behavior of a compressed elastic rectangular plate lying on a non-linearly elastic foundation is considered. The plate contains in a flat state continuously distributed edge dislocations and wedge disclinations or other sources of internal stresses. The research is conducted on the basis of a modified system of non-linear Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations which additionally takes into account the reaction of the base in the form of a second or third degree polynomial in deflection. Two cases of boundary conditions are considered: free pinching and movable hinged support of the edges. The problem is reduced to solving a non-linear operator equation which is investigated by the Lyapunov-Schmidt method. The linearized equation is a multiparameter boundary value problem for eigenvalues which is solved by a finite-difference method. The coefficients of the system of ramification equations are calculated numerically. The post-buckling behavior of the plate is investigated and asymptotic formulas are derived for new equilibria in the neighborhood of critical loads. For different values of the parameters of compressive loads and the parameter of internal stresses, relations have been established between the values of the parameters of the base, at which its bearing capacity is preserved in the neighborhood of the classical value of the critical load.

Keywords: elastic plate, equilibriums ramification, critical load, internal stresses, non-linear elastic base, Lyapunov – Schmidt method.