

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-103-117

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАЗЦА ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ НА ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ\*

© 2019 г. **Жидков А.В.<sup>1</sup>, Киселев В.Г.<sup>1</sup>, Любимов А.К.<sup>1</sup>,  
Сергеев О.А.<sup>1</sup>, Басалин А.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kiselev@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 26.10.2018*

С использованием подходов топологической оптимизации исследуется вопрос обоснования конфигурации плоского экспериментального образца, в рабочей области которого реализуется двухосное напряженно-деформированное состояние.

Исходная область, занимаемая образцом, представляет собой квадратную пластинку с заданным размером стороны, выполненную из изотропного материала. На границах области выделяются отрезки фиксированной длины, на которых задаются граничные условия. Длина отрезков определяется размерами захватов испытательной машины. В центральной части образца располагается рабочая область квадратной формы, где осуществляется определение перемещений с помощью измерительных устройств. Размеры области выбираются с учетом базы используемых измерительных устройств. Образец для испытаний рассматривается как сложная система, состоящая из рабочей и вспомогательной частей, взаимодействующих между собой. Последняя обеспечивает передачу усилий от испытательной машины на рабочую часть. Основным критерием, определяющим работоспособность системы, является критерий точности определения деформаций (перемещений) в рабочей части. Выполнение критерия возможно при обеспечении необходимой жесткости системы в целом, то есть способности системы воспринимать действие внешних нагрузок с допустимыми деформациями, не нарушающими работоспособность системы. Используемая в процессе топологической оптимизации расчетная схема образца для двухосного растяжения представлена в виде двумерной пластины переменной толщины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния и занимающей исходную область поиска. Исходная область поиска заменяется ее конечно-элементной аппроксимацией. Целевой функцией, подлежащей максимизации, служит жесткость системы, а управляемыми параметрами – толщины плоских конечных элементов. Объем образца задан. Пред-

---

\* Выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (соглашение № 14.578.21.0246, уникальный идентификатор RFMEFI57817X0246).

ложена методика, позволяющая определить распределение материала, обеспечивающее достижение максимальной интегральной жесткости системы. Анализ результатов численного моделирования с использованием методики показал необходимость наличия отверстий на рукавах применяемых в экспериментах образцов.

*Ключевые слова:* двухосное растяжение плоских образцов, топологическая оптимизация, конфигурация образца, крестообразный образец, метод гомогенизации.

## **Введение**

Определение механических свойств материалов требует выполнения экспериментов с использованием испытательных машин и образцов, отличающихся друг от друга формой, размерами и назначением. Некоторые типы образцов регламентируются ГОСТами или другими нормативными документами. В то же время многие типы образцов, особенно используемые при проведении научных исследований, не регламентируются нормативными документами, например образцы для испытаний на многоосное напряженное состояние.

Широкое распространение получили эксперименты на двухосное растяжение плоских образцов, позволяющие реализовать в них двухосное напряженно-деформированное состояние (НДС). Предлагаются различные конфигурации образцов [1], но в основном используется крестообразная конфигурация. В ряде случаев геометрия образцов описывается многосвязными областями. Для поиска конфигурации двухосного образца успешно применяются методы параметрической оптимизации [2–4]. Конфигурация образцов выбирается, исходя из экспериментальных и качественных соображений [5–8]. Исследования по обоснованию топологии образца практически отсутствуют.

В настоящее время в связи с прикладным значением интенсивно применяются подходы и методы топологической оптимизации конструкций [9, 10]. Топологическая оптимизация используется на концептуальном уровне разработки конструкции для поиска варианта решения, дающего лучшие результаты поиска рабочих характеристик. Топологическую оптимизацию можно определить как математический подход для нахождения состава и связей элементов конструкции в указанной области поиска, удовлетворяющих заданным критериям, с учетом нагрузок и условий закрепления. Наиболее ранним и распространенным подходом к поиску топологии конструкции является метод гомогенизации и его вариант со штрафованием материала [11–16].

С использованием подходов топологической оптимизации исследуется вопрос обоснования конфигурации плоского образца, испытываемого на двухосное растяжение, в рабочей области которого реализуется двухосное НДС.

## **1. Поиск и обоснование топологии плоского образца для двухосного растяжения**

### **1.1. Постановка задачи**

При проведении экспериментальных исследований на двухосное растяжение применяются плоские крестообразные образцы (рис. 1), имеющие специальные рукава различной формы для передачи внешних усилий на рабочую область.

Исходная область, занимаемая образцом, представляет собой квадратную плас-

тинку постоянной толщины с заданным размером стороны, выполненную из изотропного материала. На границах области выделяются отрезки фиксированной длины, на которых задаются граничные условия, соответствующие кинематическому или силовому нагружению. В дальнейшем под кинематическим нагружением понимаются заданные ненулевые перемещения, а под статическим нагружением – заданные ненулевые распределенные и сосредоточенные силы. Длина отрезков определяется размерами захватов испытательной машины. В остальных точках границы области нагружение отсутствует. В центральной части образца располагается рабочая область (РО) квадратной формы, где определяются перемещения с помощью измерительных устройств. Размеры области выбираются с учетом базы используемых измерительных устройств. Толщина рабочей области фиксируется. Передача внешних усилий на РО осуществляется через четыре рукава, которые необходимы для того, чтобы силовые линии [17, 18] от внешних воздействий проходили через РО, что позволяет корректно определять напряженное состояние в РО и уменьшает влияние краевых эффектов, возникающих в местах крепления захватов, на однородность НДС в РО.

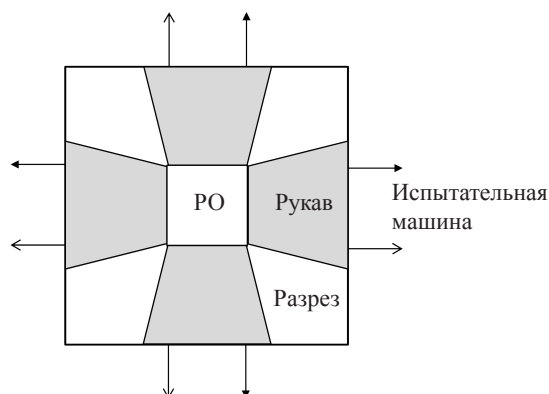


Рис. 1. Крестообразный образец на двухосное растяжение

Образец для испытаний рассматривается как некоторая сложная система, состоящая из рабочей и вспомогательной частей, взаимодействующих между собой. Последняя обеспечивает передачу усилий от испытательной машины на рабочую часть. Одним из важных критериев, определяющих работоспособность системы, является критерий точности определения деформаций (перемещений) в рабочей части. При этом желательно достижение минимальных деформаций как во всем образце, так и в его рабочей части. Значительные деформации ведут к нарушению работоспособного состояния системы задолго до возникновения опасных с точки зрения прочности величин напряжений. Этот критерий особенно важен для оборудования, которое должно обеспечивать определенный уровень точности измерений. Выполнение критерия возможно при обеспечении необходимой жесткости системы в целом, то есть способности системы воспринимать действие внешних нагрузок с допустимыми деформациями, не нарушающими работоспособность системы. При этом необходимо учитывать, что части системы влияют на общую жесткость по-разному, что определяется их особенностями, а жесткость системы всегда меньше, чем у самой жесткой части.

С учетом вышеприведенных соображений предлагается, используя подходы

топологической оптимизации, определить распределение толщины (материала) плоского образца во вспомогательной части исходной области, обеспечивающее достижение максимума жесткости образца. Полученное оптимальное распределение материала предлагается использовать для обоснования возможной конфигурации образца.

### 1.2. Метод решения задачи поиска конфигурации

*Формулировка задачи топологической оптимизации.* Используемая в процессе топологической оптимизации расчетная схема образца для двухосного растяжения в данном случае сводится к схеме двумерной пластины переменной толщины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния и занимающей область  $\Omega$  (рис. 2).

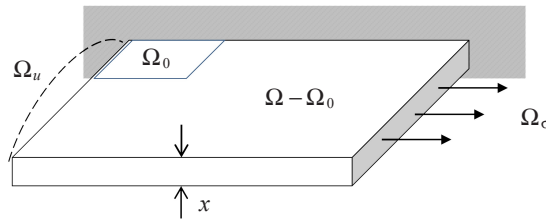


Рис. 2. Исходная область поиска

Материал пластины однородный, изотропный и линейно-упругий. Толщина пластины  $x(\Omega)$  ограничена нижним  $x^-$  и верхним  $x^+$  значениями. В подобласти пластины  $\Omega_0$  толщина  $x$  фиксируется:  $x(\Omega_0) = x_0$ .

В области  $\Omega$  известны подобласти  $\Omega_\sigma$  или  $\Omega_u$ , на которых задаются распределенные активные нагрузки  $t_0$  или активные перемещения  $u_0$ , называемые здесь статическим и кинематическим нагружением соответственно. На этих же подобластях возникают реактивные нагрузки  $t$  или перемещения  $u$ , определяемые уравнениями равновесия, совместности и законом Гука.

Исходная область поиска  $\Omega$  заменяется конечно-элементной аппроксимацией. Управляемыми параметрами служат толщины  $x_e$  плоских конечных элементов. Целевой функцией, подлежащей минимизации, служит податливость, равная работе внешних сил на произведенных ими перемещениях или работе заданных перемещений на произведенных ими усилиях.

Общий вектор перемещений конструкции  $\bar{\mathbf{U}}$  состоит из двух составляющих: неизвестных перемещений  $\mathbf{U}$  и заданных перемещений  $\mathbf{U}_0$ :

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_0 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Общий вектор внешних усилий конструкции  $\bar{\mathbf{F}}$  также состоит из двух составляющих: заданных внешних усилий  $\mathbf{F}_0$  и реактивных сил  $\mathbf{F}$ :

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Размерность вектора  $\mathbf{U}$  равна размерности вектора  $\mathbf{F}_0$  и количеству свободных перемещений конструкции. Размерность вектора  $\mathbf{U}_0$  равна размерности вектора  $\mathbf{F}$  и количеству заданных (ограниченных) перемещений конструкции. Вектор  $\mathbf{U}_0$  включает в себя нулевые опорные перемещения и в случае кинематического нагружения

ненулевые компоненты заданных перемещений. Составляющая  $\mathbf{F}_0$  включает в себя нулевые внешние усилия и в случае статического нагружения – ненулевые компоненты заданных сил.

Полная матрица жесткости  $\bar{K}(\mathbf{x})$  конструкции представляется в следующем виде:

$$\bar{K}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} K & K_{UF} \\ K_{FU} & K_{FF} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $K$  – сокращенная матрица жесткости конструкции, соответствующая неизвестным перемещениям;  $K_{UF}, K_{FU}, K_{FF}$  – составляющие полной матрицы жесткости конструкции, соответствующие заданным перемещениям;  $\mathbf{x}$  – вектор толщин.

Из симметрии полной матрицы жесткости конструкции  $\bar{K}$  следует, что

$$K = K^T, \quad K_{UF} = K_{FU}^T, \quad K_{FF} = K_{FF}^T. \quad (4)$$

Функция податливости конструкции в интегральной и конечно-элементной формах имеет вид:

$$l(\mathbf{x}) = \begin{cases} \int_{\Gamma_\sigma} u t_0 ds \approx \mathbf{F}_0^T \mathbf{U} & \text{– для статического нагружения,} \\ \int_{\Gamma_\sigma} u_0 t ds \approx \mathbf{F}^T \mathbf{U}_0 & \text{– для кинематического нагружения.} \end{cases} \quad (5)$$

Объем материала, подлежащий распределению:

$$V = \int_{\Omega} x d\Omega \approx \sum_{e=1}^n x_e a_e = \mathbf{x}^T \mathbf{a}, \quad (6)$$

где  $n$  – число варьируемых толщин конечных элементов (КЭ);  $x_e, a_e$  – толщина и площадь  $e$ -го КЭ;  $\mathbf{a}$  – вектор площадей КЭ. Объем материала ограничивается заданной величиной  $V_d$ .

Задача топологической оптимизации при статическом нагружении формулируется следующим образом: найти переменные  $\mathbf{U}, \mathbf{x}$  такие, что податливость минимальна

$$\min_{\mathbf{U}, \mathbf{x}} \mathbf{F}_0^T \mathbf{U} \quad (7)$$

и удовлетворяются ограничения:

– уравнения равновесия

$$K(\mathbf{x})\mathbf{U} = \mathbf{F}_0, \quad (8)$$

– условие заданного объема

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a} = V_d, \quad (9)$$

– границы толщины

$$x^- \leq x_e \leq x^+, \quad e = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Задача топологической оптимизации при кинематическом нагружении формулируется следующим образом: найти переменные  $\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{x}$  такие, что податливость минимальна

$$\min_{\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{x}} \mathbf{F}^T \mathbf{U}_0 \quad (11)$$

и удовлетворяются ограничения:

– уравнения равновесия и реакции

$$K(\mathbf{x})\mathbf{U} = -K_{UF}(\mathbf{x})\mathbf{U}_0, \quad K_{FU}(\mathbf{x})\mathbf{U} + K_{FF}(\mathbf{x})\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}, \quad (12)$$

– условие заданного объема

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a} = V_d, \quad (13)$$

– границы толщины

$$x^- \leq x_e \leq x^+, \quad e = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Отметим, что набор переменных в сформулированных двух задачах разный. Это объясняется необходимостью использования метода КЭ в форме перемещений, как более развитого, чем метод КЭ в форме сил или в смешанной форме.

*Дискретизация.* При конечно-элементной аппроксимации исходная область дискретизируется одинаковыми плоскими КЭ  $\Omega_e, e = 1, \dots, n + n_0$ , где  $n_0$  – количество неварьируемых КЭ. В дальнейшем используются четырехузловые квадратные КЭ (рис. 3).

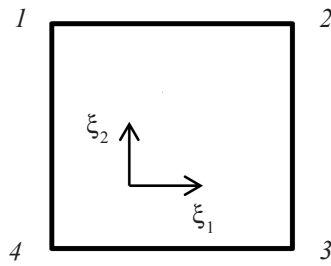


Рис. 3. Четырехузловой КЭ

Применяя билинейную интерполяцию для поля перемещений в плоском элементе, закон Гука для изотропного материала и аппроксимируя толщину элемента и модуль Юнга постоянными величинами в пределах каждого КЭ, представим матрицу жесткости КЭ в нумерации узлов КЭ (рис. 3) и с учетом порядка узловых перемещений  $u_1, u_2$  в виде:

$$k_e = \frac{x_e E_e}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_2 & k_1 & k_8 & k_7 & k_6 & k_5 & k_4 & k_3 \\ k_3 & k_8 & k_1 & k_6 & k_7 & k_4 & k_5 & k_2 \\ k_4 & k_7 & k_6 & k_1 & k_8 & k_3 & k_2 & k_5 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_6 & k_5 & k_4 & k_3 & k_2 & k_1 & k_8 & k_7 \\ k_7 & k_4 & k_5 & k_2 & k_3 & k_8 & k_1 & k_6 \\ k_8 & k_3 & k_2 & k_5 & k_4 & k_7 & k_6 & k_1 \end{bmatrix} = \frac{x_e E_e}{1 - \nu^2} k_e^0, \quad (15)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6}, \quad k_2 = -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8}, \quad k_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12}, \quad k_4 = \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8},$$

$$k_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}, \quad k_6 = \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8}, \quad k_7 = \frac{\nu}{6}, \quad k_8 = -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8},$$

$x_e$  и  $E_e$  – соответственно толщина и модуль упругости КЭ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Приведенная матрица  $k_e^0$  не зависит от толщины  $x_e$  и модуля  $E_e$ , безразмерна и одинакова для всех квадратных изотропных элементов. Полагаем, что местные системы координат  $\xi_1, \xi_2$  всех элементов совпадают с общей системой координат. Приведенная матрица жесткости элемента  $k_e^0$  расширяется до числа степеней свободы всей конструкции:

$$\bar{K}_e^0 = T_e^T k_e^0 T_e, \quad (16)$$

где  $T_e$  – матрица инцидентий.

Глобальная полная матрица жесткости конструкции суммируется из расширенных матриц жесткости элементов

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{e=1}^{n+n_0} x_e E_e \bar{K}_e^0. \quad (17)$$

В теории изотропного материала со штрафом модуль упругости зависит от толщины и штрафует, например, как

$$E_e = \bar{x}_e^p E, \quad (18)$$

где  $E$  – максимальный модуль упругости,  $\bar{x}_e = x_e/x^+$  – приведенная толщина,  $p \geq 1$  – показатель штрафа. Такое штрафование искусственно уменьшает жесткость элементов малой толщины (рис. 4) и ведет к сосредоточению жесткости и материала внутри локальных областей конструкции. Номера зависимостей на рис. 4 соответствуют значениям показателя штрафа:  $1 - p = 1$ ,  $2 - p = 2$ ,  $3 - p = 3$ .

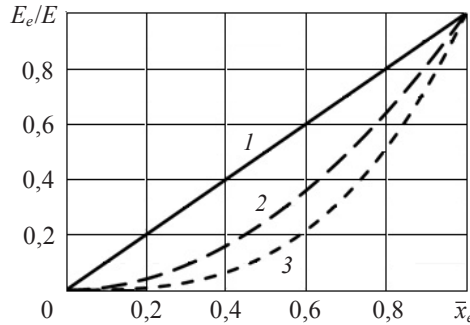


Рис. 4. Влияние штрафного показателя

*Критерии оптимальности.* Для решения сформулированной задачи минимизации используется метод критериев оптимальности [11]. Критерии оптимальности – это уравнения, полученные из необходимых условий Куна – Такера для рассматриваемой задачи и эквивалентные им.

Лагранжиан без учета ограничений  $0 \leq x \leq x^+$  записывается в виде:

$$\Lambda = l(\mathbf{x}) + \lambda(V(\mathbf{x}) - V_d). \quad (19)$$

Необходимые условия экстремума Куна – Такера:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_e} = \frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_e} = 0, \quad e = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Производная от объема имеет вид

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \begin{cases} a_e, & i = e, \\ 0, & i \neq e. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда из необходимых условий (20) получим критерии оптимальности:

$$B_e = -\frac{\partial l(\mathbf{x})/\partial x_e}{\lambda a_e} = 1, \quad e = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Условия (22) должны выполняться в точке минимума податливости, если ограничения  $0 \leq x \leq x^+$  неактивны, и выражают собой критерий оптимальности для каждого варьируемого КЭ.

Итерационный процесс поиска оптимальной толщины с учетом (22) может быть представлен рекуррентной формулой

$$x_e^{\text{новое}} = x_e^{\text{старое}} B_e^\eta, \quad (23)$$

где  $\eta$  – эмпирический показатель, а  $B_e > 0$ .

Учет возможности предельных значений  $x_e = 0, x_e = x^+$  позволяет обобщить (23) и предложить эмпирическую формулу расчета квазиоптимальных толщин следующего шага [19, 20]:

$$x_e^{\text{новое}} = \begin{cases} \max(0, x_e^{\text{старое}} - m), & \text{если } x_e^{\text{старое}} B_e^\eta \leq \max(0, x_e^{\text{старое}} - m), \\ \min(x^+, x_e^{\text{старое}} + m), & \text{если } x_e^{\text{старое}} B_e^\eta \geq \min(x^+, x_e^{\text{старое}} + m), \\ x_e^{\text{старое}} B_e^\eta & \text{иначе,} \end{cases} \quad (24)$$

где  $m$  – эмпирическая граница. Рекомендованы величины  $m = 0,2x^+, \eta = 0,5$ .

Для реализации итерационного процесса (24) необходимо знать величины производных  $\partial l(\mathbf{x})/\partial x_e$  и величину множителя Лагранжа  $\lambda$ .

*Анализ чувствительности целевой функции.* Анализ чувствительности зависит от вида нагружения. Производная податливости при статическом нагружении  $\mathbf{F}_0$  с учетом уравнения равновесия (8) имеет вид [19]:

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \frac{\partial (\mathbf{F}_0^T \mathbf{U}(\mathbf{x}))}{\partial x_e} = \mathbf{F}_0^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} = \mathbf{U}^T(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e}. \quad (25)$$

Дифференцируя уравнения равновесия (8), получим производные неизвестных перемещений, создаваемых заданным статическим нагружением  $F_0$ :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} = -K^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial K(\mathbf{x})}{\partial x_e} \mathbf{U}(\mathbf{x}). \quad (26)$$

Тогда из (25) следует

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = -\mathbf{U}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial K(\mathbf{x})}{\partial x_e} \mathbf{U}(\mathbf{x}). \quad (27)$$

Из структуры матрицы жесткости конструкции (16), (17) и (18) получим производную податливости при статическом нагружении:



$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = -\mathbf{u}_e^T(\mathbf{x})(p+1)\bar{x}_e^p E \frac{k_e^0 \mathbf{u}_e(\mathbf{x})}{(1-\nu^2)}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{u}_e$  – узловые перемещения КЭ в общей системе координат.

В случае кинематического нагружения неизвестные перемещения при заданных перемещениях  $\mathbf{U}_0$  удовлетворяют уравнениям (12).

Эквивалентные усилия  $\mathbf{F}$ , создающие заданные перемещения  $\mathbf{U}_0$ , с учетом структур (3) и (2) имеют вид:

$$\mathbf{F} = K_{FU}\mathbf{U} + K_{FF}\mathbf{U}_0. \quad (29)$$

Дифференцируя уравнение равновесия при кинематическом нагружении (12), получаем

$$K \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} + \frac{\partial K}{\partial x_e} \mathbf{U} = -\frac{\partial K_{FU}}{\partial x_e} \mathbf{U}_0. \quad (30)$$

Транспонируя (30) и учитывая симметрию (4), выражаем производные неизвестных перемещений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial x_e} = -\left( \mathbf{U}_0^T \frac{\partial K_{FU}}{\partial x_e} + \mathbf{U}^T \frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} \right) K_{UU}^{-1}. \quad (31)$$

Тогда производная податливости по толщине при кинематическом нагружении с учетом второго выражения функции податливости (5) запишется в виде:

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \frac{\partial \mathbf{F}^T(\mathbf{x})}{\partial x_e} \mathbf{U}_0. \quad (32)$$

Последовательно используя соотношения (29), (31) и (12), получим

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \left( \mathbf{U}_0^T \frac{\partial K_{FU}}{\partial x_e} + \mathbf{U}^T \frac{\partial K}{\partial x_e} \right) \mathbf{U} + \left( \mathbf{U}^T \frac{\partial K_{UF}}{\partial x_e} + \mathbf{U}_0^T \frac{\partial K_{FF}}{\partial x_e} \right) \mathbf{U}_0.$$

Проводя матричные преобразования и учитывая структуру полной матрицы жесткости конструкции (3), будем иметь

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \{ \mathbf{U}^T \ \mathbf{U}_0^T \} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_e} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_0 \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

Переходя на местный уровень КЭ с помощью (17), (18) и (16), выражаем производную по толщине функции податливости при кинематическом нагружении через параметры КЭ:

$$\frac{\partial l(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \mathbf{u}_e^T(\mathbf{x})(p+1)\bar{x}_e^p E k_e^0 \frac{\mathbf{u}_e(\mathbf{x})}{1-\nu^2}. \quad (34)$$

Вектор перемещения  $\mathbf{U}$  в (27) и (33) не включает заданные перемещения, а в (28) и (34) перемещения  $\mathbf{u}_e$  содержат неизвестные и заданные перемещения.

Отметим, что выражения производных (27) и (33), а также (28) и (34) отличаются знаком. Наличие разных знаков чувствительностей при статическом и кинематическом нагружении иллюстрирует следующий пример. Пусть дана полоса определенной толщины, подвергнутая растяжению при кинематическом или статическом нагружении. С увеличением толщины при заданных внешних силах перемещения уменьшаются и податливость полосы уменьшается. С увеличением толщины при

заданных внешних перемещения вызывающие их усилия увеличиваются и податливость полосы увеличивается. Поэтому производные податливости по толщине должны иметь разные знаки для статического и кинематического нагружений.

*Сглаживание чувствительностей и множитель Лагранжа.* При реализации итерационного процесса производные  $\partial l(\mathbf{x})/\partial x_e$  в КЭ сглаживаются [19] с помощью их значений в соседних элементах. Используется взвешенное среднее с учетом расстояний до центров соседних элементов. Конечные элементы с неварьируемой толщиной маркируются нулевым значением производных. При сглаживании значение производной в каждом КЭ получается с помощью производных в соседних КЭ из его окрестности, в которую могут попасть неварьируемые КЭ.

Множитель Лагранжа  $\lambda$  в (22) соответствует ограничению по объему и должен удовлетворять уравнению

$$V(\mathbf{x}(\lambda)) = V_d. \quad (35)$$

Поиск корня уравнения (35) относительно одной переменной можно провести любым численным методом, например методом дихотомии.

Ввиду положительной определенности матрицы  $k_e^0$  из (28) и (34) следует, что  $\partial l(\mathbf{x})/\partial x_e \leq 0$  для статического нагружения и  $\partial l(\mathbf{x})/\partial x_e \geq 0$  для кинематического нагружения. Для реализации процесса (23) необходима положительность критерия оптимальности  $B_e \geq 0$ . Следовательно, необходимо искать положительные множители Лагранжа  $\lambda \geq 0$  в задаче со статическими граничными условиями и отрицательные множители  $\lambda \leq 0$  в задаче с кинематическими граничными условиями. Точность поиска корня уравнения (35) должна выбираться на несколько порядков меньше, чем предполагаемое значение корня. В критериях оптимальности участвуют найденный множитель  $\lambda$  и сглаженные производные (28), (34).

Изложенная методика программно реализована в Matlab.

## 2. Оптимизация топологии образца двухосного растяжения

Применим изложенную методику к задаче определения топологии и абриса плоского образца для проведения экспериментов на двухосное растяжение. В силу симметрии в дальнейшем рассматривается четверть образца с условиями симметрии по двум осям. Размеры и толщины приводятся к ширине четверти образца и к наибольшей разрешенной толщине.

Приведенный размер стороны исходной области принимается равным единице. Квадратная РО имеет фиксированные толщину и длину стороны. Зоны, не входящие в рукава и РО, обладают фиксированной приведенной толщиной, равной 0,001, что моделирует отсутствие материала, и эти зоны предотвращают вырожденные КЭ. Заданный объем  $V_d$  равен 0,5 от максимально возможного объема, а параметр штрафа модуля упругости в (18)  $p = 2$ . Критерием останова итерационного процесса оптимизации (23) принято условие, что изменение на шаге приведенной толщины по всем элементам конструкции меньше 0,01. Нагружение (статическое или кинематическое) задается на внешних краях рукавов.

Требуется найти распределение толщин рукавов, которое минимизирует податливость образца при условии сохранения заданного объема  $V_d$ .

Оптимальное решение данной задачи исследовалось в зависимости от вида нагружения (статического или кинематического), размера рабочей области (0,2 и 0,4),

толщины рабочей области ( $x_{0PO} = 1,0$  и др.), ширины рукавов (от размера PO на границе PO до 0,5 и 0,9 размера образца на его краю).

При статическом нагружении нагрузки являются растягивающими, приложены и равны единице в каждом узле края рукава. В случае кинематического нагружения перемещения задаются равными единице в каждом узле края образца, а перемещения вдоль краев равны нулю. На осях симметрии заданы нулевые перпендикулярные к осям перемещения при обоих видах нагружения.

На рис. 5–8 представлены результаты решения оптимизационной задачи, где черный цвет соответствует приведенной толщине, равной 1, то есть максимальной разрешенной толщине, белый цвет соответствует приведенной толщине 0,001. Слева на рисунках приведенный размер PO равен 0,2, а справа – 0,4.



Рис. 5. Статическое нагружение. Рукав шириной от размера PO до 0,5 размера образца



Рис. 6. Статическое нагружение. Рукав шириной от размера PO до 0,9 размера образца



Рис. 7. Кинематическое нагружение. Рукав шириной от размера PO до 0,5 размера образца



Рис. 8. Кинематическое нагружение. Рукав шириной от размера РО до 0,9 размера образца

Число КЭ, аппроксимирующих область  $\Omega$ , равно  $150 \times 150$ . Результаты исследования разных толщин РО не приводятся.

Анализ результатов, представленных на рис. 5–8, позволяет сделать вывод, что при введенных предположениях распределение толщин по исходной области представляет собой достаточно сложную картину.

Топологический проект двухосного образца существенно зависит от вида нагружения. При статическом нагружении параметры разреза фактически задают параметры рукавов. В рукавах появляются многочисленные области различной формы, в которых толщина пренебрежимо мала по сравнению с максимальной толщиной. Это трактуется как наличие отверстий в рукавах. Топология образца максимальной жесткости (минимальной податливости) приобретает фрактальный характер. Аналогичная картина наблюдается и при кинематическом нагружении. Необходимо отметить, что при кинематическом нагружении начальные параметры рукавов незначительно влияют на их оптимизированную конфигурацию. Оптимизированные рукава приобретают вид почти прямоугольной полосы с шириной, определяемой шириной РО.

Размеры РО также оказывают влияние на топологическую конфигурацию рукавов. При статическом нагружении изменение размера РО приводит в основном к изменению геометрии областей с малой толщиной в рукавах и слабо влияет на их количество. При кинематическом нагружении в случае малой рабочей области перераспределения толщин проявляются незначительно, но с увеличением размера РО эффект более выражен. Отметим, что в этом случае исходная линейная граница рукавов становится нелинейной. Толщина РО слабо влияет на топологию образца. Она только подчеркивает необходимость области максимальной толщины вокруг РО.

На основе анализа результатов топологической оптимизации из условия минимума податливости можно сделать вывод, что появление в рукавах областей с очень малой толщиной обосновывает создание неодносвязных крестообразных образцов, используемых для проведения статических испытаний на двухосное растяжение. Этот вывод соответствует известным результатам, полученным рядом исследователей эмпирическим путем [1, 2, 7, 8, 18].

Полученный вывод о геометрии образца должен рассматриваться как начальный этап для выбора формы образца с целью достижения его максимальной жесткости.

## Закключение

С использованием подходов и методов топологической оптимизации сделана попытка обоснования геометрии плоского образца из изотропного материала, предназначенного для испытаний на двухосное нагружение. Предложена методика, позволяющая определить распределение материала, обеспечивающее достижение максимальной интегральной жесткости образца. Анализ результатов численного моделирования с использованием методики показал необходимость наличия отверстий на рукавах образцов, применяемых в экспериментах.

### Список литературы

1. Tiernan P., Hannon A. Design optimisation of biaxial tensile test specimen using finite element analysis. *International Journal of Material Forming*. 2012. Vol. 7. Iss. 1. P. 117–123.
2. Demmerle S., Boehler J.P. Optimal design of biaxial tensile cruciform specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 441. No 1. P. 143–181.
3. Makris A., Vandenberg T., Ramault C., Van Hemelrijck D., Lamkanfi E., Van Paeppegem W. Shape optimisation of a biaxially loaded cruciform specimen. *Polymer Testing*. 2010. Vol. 29. P. 216–223.
4. Yu Y., Wan M., Wu X.D., Zhou X.B. Design of a cruciform biaxial tensile specimen for limit strain analysis by FEM. *Journal of Materials Processing Technology*. 2002. Vol. 123. P. 67–70.
5. Кокшаров И.И., Буров А.Е. Построение силовых линий в деформируемом теле. Анализ решений для пластины с трещиной и круглым отверстием. Красноярск: Препринт Вычислительного центра СО РАН. 1991. Т. 6. 25 с.
6. Kolupaev A.V., Becker W., Massow H., Dierkes D. Auslegung von Probekörpern aus Hartschaum zur Ermittlung der biaxialen Zugfestigkeit. *Forsch Ingenieurwe*. 2014. No 3–4. P. 68–86. DOI: 10.1007/s10010-014-0175-9.
7. Andrusca L., Goanta V., Barsanescu P.D. Optimizing the shape and size of cruciform specimens used for biaxial tensile test. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 658. P. 167–172.
8. Мохирева К.А., Свистков А.Л., Шадрин В.В. Определение формы образцов для экспериментов на двухосное растяжение. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7. №4. С. 353–362.
9. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 37. No 3. P. 217–237.
10. Rozvany G.I.N., Lewinski T.P. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Springer, 2013. 471 p.
11. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin: Springer, 2003. 370 p.
12. Hassani B., Hinton E. *Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software*. Springer, 1999. 288 p.
13. Belegundu A.D., Chandrupatla T.R. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 463 p.
14. Christensen P.W., Klarbring A. *An Introduction to Structural Optimization*. London: Springer, 2009. 211 p.
15. Kress G., Keller D. *Structural Optimization. Zentrum fur Strukturtechnologien*. Zurich: ETH, 2007. 159 p.
16. Selley S.E., Gyurecz G., Janik J., Kortelyesi. *Engineering Optimization. Course Bulletin*. Typotex Publishing House, 2012. 225 p.
17. Тимошенко С.П., Гудьер Д. *Теория упругости*. М.: Наука, 1979. 560 с.
18. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. *Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии*. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.
19. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 21. P. 120–127.
20. Liu K., Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 50. P. 1175–1196.

### References

1. Tiernan P., Hannon A. Design optimisation of biaxial tensile test specimen using finite element analysis. *Int. J. Mater. Form.* 2012. Vol. 7. Iss. 1. P. 117–123.
2. Demmerle S., Boehler J.P. Optimal design of biaxial tensile cruciform specimens. *J. Mech. Phys. Solids.* 1993. Vol. 44. No 1. P. 143–181.
3. Makris A., Vandenbergh T., Ramault C., Van Hemelrijck D., Lamkanfi E., Van Paepegem W. Shape optimisation of a biaxially loaded cruciform specimen. *Polymer Testing.* 2010. Vol. 29. P. 216–223.
4. Yu Y., Wan M., Wu X.D., Zhou X.B. Design of a cruciform biaxial tensile specimen for limit strain analysis by FEM. *J. Mater. Process. Tech.* 2002. Vol. 123. P. 67–70.
5. Koksharov I.I., Burov A.E. *Postroyeniye silovykh liniy v deformiruyemom tele. Analiz resheniy dlya plastiny s treshchinoy i kruglym otverstiyem [Construction of Power Lines in the Deformable Body. Analysis of Solutions for a Plate with a Crack and a Round Hole]*. Krasnoyarsk. Preprint Vychislitel'nogo tsentra SO RAN [Preprint of Computing Center SB RAS]. 1991. Vol. 6. 25 p. (In Russian).
6. Kolupaev A.V., Becker W., Massow H., Dierkes D. Auslegung von Probekörpern aus Hartschaum zur Ermittlung der biaxialen Zugfestigkeit. *Forsch Ingenieurwe.* 2014. No 3–4. P. 68–86. DOI: 10.1007/s10010-014-0175-9.
7. Andrusca L., Goanta V., Barsanescu P.D. Optimizing the shape and size of cruciform specimens used for biaxial tensile test. *Appl. Mech. Mater.* 2014. Vol. 658. P. 167–172.
8. Mokhireva K.A., Svistkov A.L., Shadrin V.V. Opredeleniye formy obratstov dlya eksperimentov na dvukhosnoye rastyazheniye [Designing of specimen shape for biaxial stretching experiments]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*. 2014. Vol. 7. No 4. P. 353–362 (In Russian).
9. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 2009. Vol. 37. No 3. P. 217–237.
10. Rozvany G.I.N., Lewinski T.P. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Springer. 2013. 471 p.
11. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin. Springer. 2003. 370 p.
12. Hassani B., Hinton E. *Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software*. Springer. 1999. 288 p.
13. Belegundu A.D., Chandrupatla T.R. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Cambridge. Cambridge University Press. 2011. 463 p.
14. Christensen P.W., Klarbring A. *An Introduction to Structural Optimization*. London. Springer. 2009. 211 p.
15. Kress G., Keller D. *Structural Optimization. Zentrum fur Strukturtechnologien*. Zurich. ETH. 2007. 159 p.
16. Selley S.E., Gyurecz G., Janik J., Kortelyesi. *Engineering Optimization. Course Bulletin*. Typotex Publishing House. 2012. 225 p.
17. Timoshenko S.P., Gudyer J.N. *Theory of Elasticity*. New York. Toronto. London. McGraw-hill book company. 1951. 506 p.
18. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. *Deformirovaniye i prochnost materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii [Deformation and Strength of Materials under Complex Stress Conditions]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1976. 416 p. (In Russian).
19. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Struct. Multidisc. Optim.* 2001. Vol. 21. P. 120–127.
20. Liu K., Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Struct. Multidisc. Optim.* 2014. Vol. 50. P. 1175–1196.

## TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF THE TEST SPECIMEN FOR BIAXIAL TENSION

Zhidkov A.V.<sup>1</sup>, Kiselev V.G.<sup>1</sup>, Lyubimov A.K.<sup>1</sup>,  
Sergeev O.A.<sup>1</sup>, Basalin A.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Applying the approaches of topology optimization, we consider the problem of substantiation of the configuration of the 2D test specimen, in the workspace of which the biaxial stress-strain state is realized.

The original area occupied by the specimen is a square plate with a given side size made of an isotropic material. At the boundaries of the region, segments of fixed length are established on which boundary conditions are specified. The length of the segments is determined by the dimensions of the grippers of the testing machine. In the central part of the specimen is located the working area of the square form where the definition of displacements is carried out using measuring devices. The dimensions of the working area are selected taking into account the region of the used measuring devices. The test specimen is considered as a complex system consisting of working and auxiliary parts interacting with each other. The latter ensures the transfer of forces from the testing machine to the working part. The basic criterion determining the performance of this system is the criterion of accuracy of determining the deformations (displacements) in the working part. The implementation of the criterion is possible by ensuring the necessary stiffness of the overall system, i.e. the system's ability to carry the effect of external loads with allowable deformations that do not violate the performance of the system. The specimen design scheme for biaxial stretching used in the topological optimization process is reduced to the scheme of a two-dimensional plate of variable thickness which is in a plane stress state and occupies the initial region. The original search field is replaced by its finite element approximation. The objective function to be maximized is the stiffness of the system, and the design variables are the thicknesses of 2D finite elements. The specimen volume is set. A technique is proposed that allows determining the distribution of the material ensuring the achievement of the maximum integral stiffness of the system. The analysis of results of numerical simulation using the technique showed the need for holes on the specimen sleeves used in the experiments.

*Keywords:* biaxial stretching of 2D specimens, topological optimization, specimen configuration, cruciform specimen, homogenization method.