

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-77-93

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2019 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.10.2018

Построена математическая модель изгибного поведения пространственно-армированных пластин при нелинейно-упругом деформировании материалов компонентов композиции. Решение сформулированной начально-краевой задачи строится по явной численной схеме типа «крест». Возможное ослабленное сопротивление армированных пластин поперечному сдвигу учитывается на основе кинематических гипотез теории Редди. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Показано, что не при всех произвольных структурах пространственного армирования пластин в рамках теории Редди удается построить явную численную схему. Исследовано динамическое нелинейно-упругое поведение плоско-перекрестно и пространственно-армированных прямоугольных пластин под действием воздушной взрывной волны. Показано, что при сильно выраженной анизотропии композиции для относительно толстых пластин замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру позволяет уменьшить податливость конструкции в поперечном направлении на десятки процентов (до 30% и более), а интенсивность деформаций в связующем материале – в разы. Уменьшение относительной толщины пластины и степени анизотропии ее композиции приводит к уменьшению эффекта от замены плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру. В ряде случаев этот эффект может вообще не проявляться даже в относительно толстых композитных конструкциях более сложной геометрической формы, например в кольцевых пластинах с жесткой внутренней шайбой.

Ключевые слова: пространственное армирование, плоско-перекрестное армирование, гибкие пластины, динамический изгиб, теория Редди, нелинейно-упругое деформирование, взрывные нагрузки, схема типа «крест».

Введение

В современных инженерных изделиях все более активно используются композиционные материалы (КМ) с пространственными структурами армирования [1–4]. Такой вид армирования позволяет, с одной стороны, устранить серьезный недостаток сред из композиционных материалов (КМ-сред), перекрестно-армированных в плоскости, – расслоение в силу ослабленного сопротивления отрыву и сдвигам в

поперечном направлении, а с другой стороны, – локализовать распространение трещин в пределах нескольких представительных элементов композиции. Линейно-упругое поведение пространственно-армированных сред моделировалось в [5–7]. В статье [7] было показано, как полученные там структурные соотношения можно использовать при расчете нелинейно-упругого поведения КМ-среды, материалы компонентов которой одинаково сопротивляются растяжению и сжатию. В [8] была построена аналогичная структурная модель пространственно-армированной КМ-среды, учитывающая свойство разносопротивляемости нелинейно-упругих материалов фаз композиции.

При некоторых типах пространственного армирования тонкостенных элементов конструкций (например, при ортогональном армировании [1, 2, 4, 5]) также может проявляться их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, поэтому и при таких структурах армирования актуальной является проблема адекватного описания изгибного деформирования пластин из композиционных материалов (КМ-пластин). Изгиб анизотропных и армированных пластин в рамках классической теории, не учитывающей поперечные сдвиги, изучался в [9–11]. Учет этих сдвигов, как правило, производится в рамках традиционных теорий Рейсснера [12–14] или Редди [11, 15–19]. Сложность реализации этих теорий практически одинакова, но, как показано в [17], теория Редди для анизотропных пластин является асимптотически точной (первое асимптотическое приближение приводит к классической теории изгиба пластин, а второе асимптотическое приближение – к теории Редди). Кроме того, в рамках теории Редди, в отличие от теории Рейсснера, учитывается искривление поперечной нормали пластины при ее изгибном деформировании, что позволяет удовлетворить силовым граничным условиям по касательным напряжениям на лицевых поверхностях конструкции. Теория Рейсснера не является асимптотически точной и не позволяет удовлетворять силовым граничным условиям на лицевых поверхностях пластины. Поэтому теория Редди более точно описывает механическое изгибное поведение КМ-пластин.

Настоящее исследование посвящено моделированию в рамках гипотез теории Редди изгибного поведения гибких КМ-пластин с пространственными структурами армирования, материалы компонентов которых деформируются нелинейно-упруго.

1. Постановка задачи

Рассматривается изгиб КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 1), с которой связана декартова прямоугольная система координат x_i так, что отсчетная плоскость Ox_1x_2 совмещена со срединной плоскостью ($|x_3| \leq h$).

Пластина плоско-перекрестно или пространственно усилена K семействами волокон с плотностями армирования ω_k , $1 \leq k \leq K$. На рис. 1а изображена структура с плоским ортогональным 2D-армированием ($K = 2$), на рис. 1б – с пространственным ортогональным 3D-армированием ($K = 3$) [1, 2, 4, 5], на рис. 1в – с пространственным неортогональным 4D-армированием ($K = 4$) [2]. По толщине конструкции структура армирования квазиоднородна. Относительное объемное содержание связующего в репрезентативной ячейке композиции вычисляется так [1, 2]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

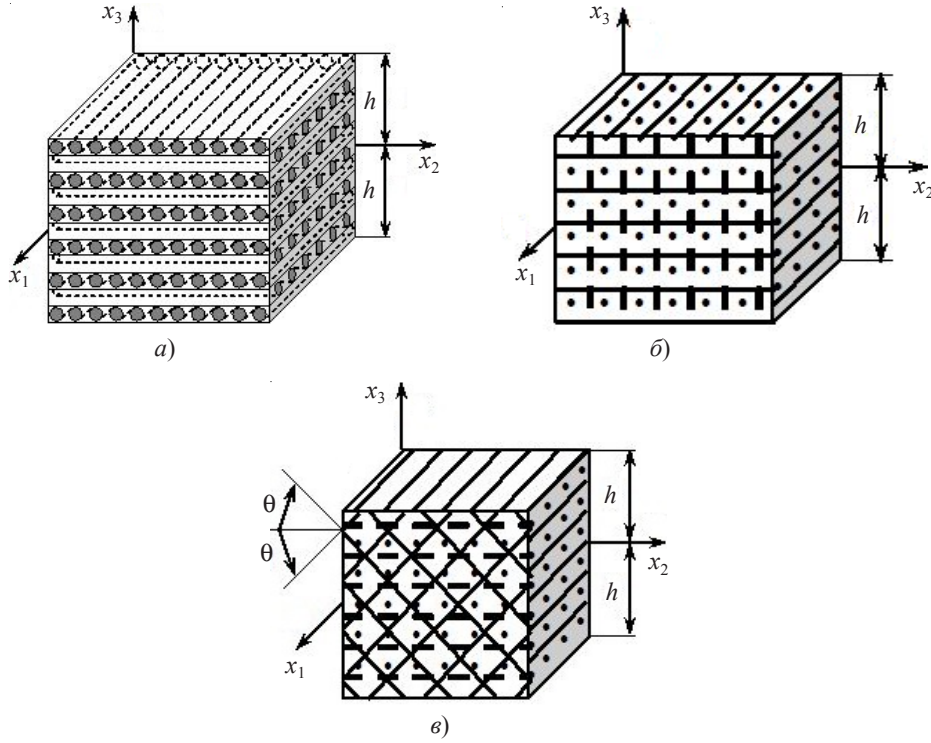


Рис. 1. Элементы пластин

Для описания возможного (например, в случаях структур 2D- и 3D-армирования, изображенных на рис. 1а и б) ослабленного сопротивления пластины поперечному сдвигу используем кинематические гипотезы теории Редди [15–19]. Тогда, согласно [19], при учете геометрической нелинейности в приближении Кармана осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i рассматриваемой конструкции из композиционного материала (КМ-конструкции) аппроксимируются так:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(+)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(+)}) - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(-)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(-)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2h} [(x_3 + h) \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - (x_3 - h) \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x})] + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \left[\frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{i3}^0 + \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)} \right], \quad (3)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2,$$

где w – прогиб; u_i – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости; $\varepsilon_{i3}^{(-)}$, $\varepsilon_{i3}^{(+)}$ – деформации поперечных сдвигов на нижней ($x_3 = -h$) и верхней ($x_3 = h$) лицевых поверхностях пластины (при $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} = 0$ функции ε_{i3}^0 характеризуют деформации поперечных сдвигов в точках отсчетной плоскости $x_3 = 0$); t_0 – начальный

момент времени t ; ∂_i – оператор дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); G – область, занимаемая конструкцией в плане.

Таким образом, в соотношениях (2) и (3) не известны функции $w, u_i, \varepsilon_{i3}^0$ и $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ($i = 1, 2$), зависящие от времени t и только двух пространственных координат x_1 и x_2 .

Уравнения движения гибких КМ-пластин в рамках приближения Кармана и при учете выражений (3) имеют вид [19]:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^\varepsilon &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + X_i(t, \mathbf{x}) + \sigma_{i3}^{(+)} - \sigma_{i3}^{(-)}, \\ 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left[F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right] + X_3(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \ddot{\gamma}_i^0 &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} + m_i(t, \mathbf{x}) + h(\sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$F_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad F_{i3}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{i3}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad (5)$$

$$M_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3 \quad (i, j = 1, 2), \quad \rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k;$$

$$u_i^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = 2h\rho u_i + \frac{1}{3} h^2 \rho (\varepsilon_{i3}^{(+)} - \varepsilon_{i3}^{(-)}), \quad (6)$$

$$\gamma_i^0(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{3} h^3 \rho \left(\frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w + \varepsilon_{i3}^{(+)} + \varepsilon_{i3}^{(-)} \right), \quad i = 1, 2;$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности материалов связующего и волокон k -го семейства; $\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x} \pm h)$ – известные из силовых граничных условий напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностях пластины; σ_{ij} – осредненные напряжения в композиции; X_i – приведенные внешние нагрузки, порожденные объемными силами (вычисляются по правилу простой смеси, аналогично ρ); m_i – приведенные внешние моменты от объемных сил; F_{ij}, F_{i3} – мембранные и перерезывающие силы; M_{ij} – изгибающие и крутящие моменты; $u_i^\varepsilon, \gamma_i^0$ – введенные для удобства функции; точка – дифференцирование по времени t .

В рамках итерационной структурной модели нелинейно-упругого поведения пространственно-армированной среды, предложенной в [8] (где ядра ползучести следует приравнять нулю) и используемой в настоящей статье, на каждой итерации метода переменных параметров упругости в фиксированный момент времени t связь между осредненными деформациями и напряжениями в композиции определяется линеаризованным матричным равенством (см. (25) в [8])

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}^T; \quad (8)$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ – 6×6 -матрица, элементы которой a_{ij} ($i, j = \overline{1, 6}$) зависят от деформированного состояния ε_{ij} , определенного из решения на предыдущей итерации, и от струк-

туры армирования (плотностей ω_k и направлений армирования); T – операция транспонирования.

С каждым k -м семейством волокон свяжем локальную ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$ так, что ось $x_1^{(k)}$ совпадает с направлением траектории армирования, а оси $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ перпендикулярны этим траекториям. Тогда направление армирования волокнами k -го семейства можно задать углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). При этом направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между локальной $x_i^{(k)}$ и глобальной x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) системами координат определяются по формулам (2) из [8].

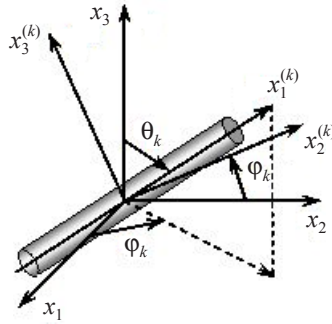


Рис. 2. Локальная система координат

При выводе соотношений (7) в [8] попутно были получены следующие линейризованные матричные равенства:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{E}_k\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \{\varepsilon_{ij}^{(0)}\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \{\varepsilon_{ij}^{(k)}\}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы, по структуре аналогичные (8), элементы которых $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – деформации связующего и арматуры k -го семейства; \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k – 6×6 -матрицы, определенные соотношениями (30) и (22) в [7], элементы которых зависят от структуры армирования и деформированного состояния репрезентативной ячейки композиции, известного из решения на предыдущей итерации.

Первое равенство (9) определяет на текущей итерации деформации связующего $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ через осредненные деформации композиции $\boldsymbol{\varepsilon}$, а второе соотношение (9) выражает деформации арматуры k -го семейства $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ через деформации связующей матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, то есть в конечном итоге также через $\boldsymbol{\varepsilon}$.

В настоящем исследовании КМ-пластина рассматривается как гибкая тонкостенная система, следовательно, с приемлемой для практических приложений точностью напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ можно линейно аппроксимировать по поперечной координате x_3 [20]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (10)$$

Линейризованное матричное равенство (7) является системой шести алгебраических уравнений. Из третьего равенства этой системы можно выразить линейную поперечную деформацию КМ-пластины:

$$\varepsilon_{33} = a_{33}^{-1}(\sigma_{33} - a_{31}\varepsilon_{11} - a_{32}\varepsilon_{22} - a_{34}\varepsilon_{23} - a_{35}\varepsilon_{31} - a_{36}\varepsilon_{12}), \quad (11)$$

в правой части которой деформации ϵ_{ij} можно выразить по формулам (2), то есть через функции w , u_l , ϵ_{i3}^0 , $\epsilon_{i3}^{(\pm)}$ и их производные по x_l ($l = 1, 2$), а напряжение σ_{33} известно из (10).

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи необходимо использовать силовые [19]

$$\sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) = P_i \quad (i = 1, 2), \quad \sum_{i=1}^2 n_i \left(F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) = P_{n3},$$

$$M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 = M_{nn}, \quad (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) = M_{n\tau}, \quad (12)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad t \geq t_0$$

и кинематические (см. (3))

$$w(t, \mathbf{x}) = w_*(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) + \frac{h^2}{3} [\epsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \epsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x})] = \bar{u}_i(t, \mathbf{x}),$$

$$\frac{2}{3} h^3 \left[\frac{8}{5} \epsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) - \partial_i w(t, \mathbf{x}) + \epsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \epsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) \right] = \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2$$

граничные условия, а в момент времени $t = t_0$ следует задать начальные условия [19]:

$$w(t_0, \mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \quad 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) + \frac{h^2}{3} [\epsilon_{i3}^{(+)}(t_0, \mathbf{x}) - \epsilon_{i3}^{(-)}(t_0, \mathbf{x})] = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{2}{3} h^3 \left[\frac{8}{5} \epsilon_{i3}^0(t_0, \mathbf{x}) - \partial_i w_0(\mathbf{x}) + \epsilon_{i3}^{(+)}(t_0, \mathbf{x}) + \epsilon_{i3}^{(-)}(t_0, \mathbf{x}) \right] = \bar{\bar{u}}_{0i}(t_0, \mathbf{x}), \quad (14)$$

$$2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) + \frac{h^2}{3} [\dot{\epsilon}_{i3}^{(+)}(t_0, \mathbf{x}) - \dot{\epsilon}_{i3}^{(-)}(t_0, \mathbf{x})] = \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{2}{3} h^3 \left[\frac{8}{5} \dot{\epsilon}_{i3}^0(t_0, \mathbf{x}) - \partial_i \dot{w}_0(\mathbf{x}) + \dot{\epsilon}_{i3}^{(+)}(t_0, \mathbf{x}) + \dot{\epsilon}_{i3}^{(-)}(t_0, \mathbf{x}) \right] = \bar{\bar{v}}_{0i}(t_0, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2.$$

Здесь

$$\bar{u}_i(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3,$$

$$\bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

$$n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha;$$

P_i – заданные на кромке Γ_p мембранные силы по направлениям x_i ($i = 1, 2$); P_{n3} – заданная на Γ_p перерезывающая сила; M_{nn} , $M_{n\tau}$ – заданные на кромке Γ_p изгибающий и крутящий моменты; w_* – заданный на кромке Γ_u прогиб; U_{i*} – заданные на торцевой поверхности пластины перемещения в тангенциальных направлениях x_i ; w_0 , \dot{w}_0 , U_{0i} , V_{0i} ($i = 1, 2$) – заданные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек конструкции; $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ – контур, ограничивающий область G , занимаемую пластиной в плане; α – угол, задающий направление внешней нормали к Γ .

Возможно задание и пяти смешанных из (12), (13) граничных условий.

2. Численный метод расчета

Для численного интегрирования исследуемой нелинейной начально-краевой задачи используем процедуру шагов по времени [8, 13, 19, 21], то есть значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени.

Предполагаем, что в два предшествующих момента времени t_m уже известны значения функций:

$$\begin{aligned} u_i^m(\mathbf{x}) = u_i(t_m, \mathbf{x}), \quad w^m(\mathbf{x}) = w(t_m, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_{i3}^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_{i3}^0(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ X_j^m(\mathbf{x}) = X_j(t_m, \mathbf{x}), \quad m_i^m(\mathbf{x}) = m_i(t_m, \mathbf{x}), \quad a_{sl}(\mathbf{x}, x_3) = a_{sl}(t_m, \mathbf{r}), \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (16) \\ s, l = \overline{1, 6}, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h. \end{aligned}$$

Поэтому по формулам (5) при учете (2), (7), (8), (10) и (11) в момент времени t_n можем вычислить значения всех внутренних силовых факторов F_{ij} , F_{i3} и M_{ij} , входящих в уравнения движения (4) и силовые граничные условия (12).

Аппроксимируем вторые производные по времени t в левых частях равенств (4) их конечными разностями на трехточечном шаблоне, что позволяет построить явную численную схему решения рассматриваемой задачи. При этом конечно-разностные аналоги уравнений (4) при учете обозначений, аналогичных (16), принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left[F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w^n \right] + X_3^n(\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(+)}(\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{\tau^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left[F_{ij} - F_{j3} \partial_i w^n \right] + X_i^n(\mathbf{x}) + \sigma_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) - \sigma_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}), \quad (17) \\ \frac{1}{\tau^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^0 \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left[M_{ij} - F_{i3} + m_i(\mathbf{x}) + h \left(\sigma_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) + \sigma_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}) \right) \right], \quad \mathbf{x} \in G, \\ &i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Правые части в (17) при $t = t_n$ известны, поэтому, учитывая (16) и необходимые граничные условия (12) и (13), из этих уравнений можем определить по явной схеме значения неизвестных функций w , u_i^ε и γ_i^0 в следующий момент времени t_{n+1} .

Отметим, что при произвольной пространственной структуре армирования (при произвольных θ_k и φ_k на рис. 2) матрица \mathbf{A} не имеет нулевых элементов, то есть в этом общем случае, согласно (8), четвертое и пятое уравнения в системе (7), записанные на лицевых поверхностях ($x_3 = \pm h$), при учете (2) приводят к таким силовым граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(A_{l3ij}^{(\pm)} - \left(a_{33}^{(\pm)} \right)^{-1} A_{l333}^{n+1} A_{33ij}^{(\pm)} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\partial_i u_j^{n+1} + \partial_j u_i^{n+1} \right) \mp h \partial_i \partial_j w^{n+1} \right] \pm \\ \pm \frac{2h}{3} \left(\partial_i \varepsilon_{j3}^{n+1} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{n+1} \right) + \frac{h}{4} (1 \pm 2) \left(\partial_i \varepsilon_{j3}^{n+1} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{n+1} \right) - \frac{h}{4} (1 \mp 2) \left(\partial_i \varepsilon_{j3}^{n+1} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{n+1} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \partial_i^{n+1} w \partial_j^{n+1} w \Big] + \sum_{i=1}^2 \left(A_{l3i3}^{(\pm)} - \left(a_{33}^{(\pm)} \right)^{-1} A_{l333}^{n+1} A_{33i3}^{n+1} \right) \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = \sigma_{l3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) - \\
& - \left(a_{33}^{(\pm)} \right)^{-1} A_{l333}^{n+1} \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad l = 1, 2,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{13ii}^{(\pm)} = a_{5i}^{(\pm)}, \quad A_{1333}^{(\pm)} = a_{53}^{(\pm)}, \quad A_{1313}^{(\pm)} = a_{55}^{(\pm)}, \quad A_{1323}^{(\pm)} = a_{54}^{(\pm)}, \quad A_{1312}^{(\pm)} = \frac{1}{2} a_{56}^{(\pm)}, \\
A_{23ii}^{(\pm)} = a_{4i}^{(\pm)}, \quad A_{2333}^{(\pm)} = a_{43}^{(\pm)}, \quad A_{2313}^{(\pm)} = a_{45}^{(\pm)}, \quad A_{2323}^{(\pm)} = a_{44}^{(\pm)}, \quad A_{2312}^{(\pm)} = \frac{1}{2} a_{46}^{(\pm)},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$A_{33ii}^{(\pm)} = a_{3i}^{(\pm)}, \quad A_{3313}^{(\pm)} = a_{35}^{(\pm)}, \quad A_{3323}^{(\pm)} = a_{34}^{(\pm)}, \quad A_{3312}^{(\pm)} = \frac{1}{2} a_{36}^{(\pm)}, \quad a_{lj}^{(\pm)} = a_{lj} \Big|_{x_3 = \pm h}, \quad i = 1, 2;$$

a_{lj} – элементы матрицы \mathbf{A} в определяющем соотношении (7). К уравнениям (18) следует добавить равенства (см. (6)):

$$\begin{aligned}
2h\rho u_i + \frac{h^2 \rho}{3} \left(\varepsilon_{i3}^{(+)} - \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) &= u_i^\varepsilon(\mathbf{x}), \\
\frac{2h^3 \rho}{3} \left(\frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^{0} + \varepsilon_{i3}^{(+)} + \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) &= \gamma_i^0(\mathbf{x}) + \frac{2h^3 \rho}{3} \partial_i^{n+1} w, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Так как значения функций w , u_i^ε и γ_i^0 предполагаются уже известными из уравнений (17), то правые части в равенствах (18) и (20) также известны при $t = t_{n+1}$. Система уравнений (18), (20) состоит из восьми уравнений и замкнута относительно неизвестных функций u_i , ε_{i3}^0 , $\varepsilon_{i3}^{(+)}$, $\varepsilon_{i3}^{(-)}$, причем уравнения (18) содержат производные первого порядка от этих неизвестных функций по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$). Следовательно, система (18), (20) является системой дифференциальных уравнений и для нее необходимо сформулировать соответствующую краевую задачу. Исследование корректности постановки этой краевой задачи выходит за рамки настоящей статьи. Однако следует подчеркнуть, что в общем случае пространственного армирования, когда, согласно (19), коэффициенты при производных от функций u_i , ε_{i3}^0 и $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ в уравнениях (18) отличны от нуля, нельзя построить явную численную схему интегрирования рассматриваемой задачи.

В связи с этим далее будем рассматривать лишь частные случаи пространственного армирования, при которых можно использовать явную численную схему типа «крест». А именно, предполагаем: структура пространственного армирования пластины такова, что если арматура некоторого k -го семейства является наклонной, то есть $0 < \theta_k < \pi/2$, $1 \leq k \leq K$ (см. рис. 2), то обязательно найдется n -е семейство наклонных волокон с такими параметрами армирования, что $\theta_n = \pi - \theta_k$, $\varphi_n = \varphi_k$, $\omega_n = \omega_k$ ($1 \leq n \leq K$, $n \neq k$). Такие структуры пространственного армирования достаточно часто встречаются на практике [1–5]; к ним, в частности, относятся структуры, изображенные на рис. 1б и в. Если структура армирования обладает указанной особенностью, то, согласно структурным моделям армированных сред, построен-

ным в [7, 8], для элементов матрицы \mathbf{A} в (7) выполняются равенства: $a_{lj} \equiv 0$, $l = 4, 5$, $j = 1, 3$ и $j = 6$. При этом в силу соотношений (19) уравнения (18) принимают вид:

$$\sum_{i=1}^2 A_{l3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = \sigma_{l3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad l = 1, 2. \quad (21)$$

Из системы четырех линейных алгебраических уравнений (21) можно определить четыре неизвестные функции $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$. После этого при известных w , u_i^ε , γ_i^0 и $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ из уравнений (20) вычисляются значения функций u_i и ε_{i3}^0 ($i = 1, 2$). Затем по формулам (2) и (11) в момент времени t_{n+1} определяются осредненные деформации композиции ε_{ij} , а из (9) последовательно вычисляются деформации компонентов композиции ε_0 и ε_k . Используя структурные соотношения из [7, 8], на основании метода переменных параметров упругости по известным ε_0 и ε_k уточняются элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{H} и \mathbf{E}_k ($1 \leq k \leq K$) в равенствах (7) и (9), а также коэффициенты в уравнениях (21) (см. обозначения (19)). Таким образом, в каждой точке \mathbf{r} пластины независимо от других точек в каждый момент времени t_{n+1} необходимо организовать итерационный процесс по методу переменных параметров упругости, который качественно аналогичен процедуре посадки напряженного состояния на поверхность текучести при решении задач упругопластического изгиба тонкостенных конструкций [13]. Для начала такого итерационного процесса элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{H} и \mathbf{E}_k берутся из решения рассматриваемой задачи в предыдущий момент времени t_n . После того как итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, по описанной выше схеме можно получить решение в следующий момент времени t_{n+2} и т.д. Проведенные многочисленные расчеты показывают, что для определения в каждый момент времени деформированного состояния в компонентах композиции с точностью до трех значащих цифр необходимо делать не менее пяти итераций по методу переменных параметров упругости.

Согласно [19], для начала расчетов по численной схеме (17) в момент времени $t_1 = \tau$ необходимо определить значения функций $w(\mathbf{x})$, $u_i^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\gamma_i^0(\mathbf{x})$, которые вычисляются по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^\varepsilon(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^\varepsilon(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ \gamma_i^0(\mathbf{x}) &= \gamma_i^0(\mathbf{x}) + \tau \dot{\gamma}_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\gamma}_i^0(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ w(\mathbf{x}) &= w(\mathbf{x}) + \tau \dot{w}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь значения функций u_i^ε , \dot{u}_i^ε , γ_i^0 и $\dot{\gamma}_i^0$ известны из (6) при учете начальных условий (14), а функции \ddot{u}_i^ε , $\ddot{\gamma}_i^0$ и \ddot{w} – из уравнений движения (4) в начальный момент времени t_0 . Приближенные равенства в (22) выполняются с точностью τ^3 , если при $t = t_0$ пластина находится в естественном состоянии покоя и внешние нагрузки отсутствуют.

Если область G , занимаемая КМ-пластиной в плане, прямоугольна, то, заменяя в (12) и (17) производные их конечно-разностными аналогами, получим в конечном итоге явную численную схему типа «крест» [13, 19]. Если же область G имеет неканоническую форму, то для дискретизации соотношений (12) и (17) по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$) можно использовать вариационно-разностный подход, рекомендованный в [13]. Необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы типа «крест» следуют из критерия устойчивости Куранта и для рассматриваемой КМ-пластины аналогичны неравенствам (39) из [19].

На основании общеизвестных формул перехода от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической [22] полученные выше соотношения можно записать и в полярной системе координат, если область G является кольцом, кругом или их сектором.

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве примеров рассмотрим динамический изгиб прямоугольных удлиненных пластин толщиной $2h = 2$ см, имеющих размеры в плане $a = 80$ см, $b = 20$ см ($G: |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2$). Кромки конструкций жестко закреплены (см. (13), (15) при $w_* = U_{i*} = 0$). В начальный момент времени $t_0 = 0$ пластины покоятся (см. (14) и (15) при $w_0 = U_{0i} = 0$ и $\dot{w}_0 = V_{0i} = 0$). Касательные напряжения на лицевых поверхностях отсутствуют ($\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$), поэтому, согласно (21), имеем $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$. Массовыми нагрузками пренебрегаем, то есть в (4) и (17) $X_j \equiv 0, m_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$). КМ-пластины нагружаются избыточным давлением, порожденным воздушной взрывной волной [21] (см. (4) и (17)):

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\alpha = -\frac{\ln 0,01}{t_{\min} - t_{\max}} > 0, \quad t_{\min} > t_{\max}; \quad (24)$$

t_{\max} – момент времени, в который давление $p(t)$ достигает по модулю максимального значения $|p_{\max}|$; t_{\min} – момент времени, при котором нагрузку $|p(t)|$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с $|p_{\max}|$ (так, выражение (24) соответствует условию $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным [21], в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс.

Предполагаем, что нелинейно-упругая связь между напряжением σ и деформацией ε в материалах компонентов композиции конструкций при растяжении-сжатии характеризуется билинейной диаграммой:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где $E_k, E_s^{(k)}$ – модули Юнга и линейного упрочнения материала k -й фазы композиции ($k = 0$ – связующее, $k \geq 1$ – арматура k -го семейства); $\sigma_s^{(k)}$ – напряжение, при превышении которого материал ведет себя нелинейно. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции КМ-пластин приведены в таблице 1, где ν – коэффициент Пуассона, c – скорость звука. Характеристики связующей матрицы условно соответствуют эпоксидной смоле [23], а арматуры – волокнам из L -стекла [24].

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	c , м/с
Связующее	1210	0,4	20	2,8	1,114	1521,2
Армирующие волокна	4300	0,25	1500	51,0	10,851	3443,9

Структуры армирования квазиоднородны и прямолинейны: $\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq K$ (см. (1) и рис. 2). Сравниваются три типа структур: 1) ортогональное плоское 2D-армирование (рис. 1а), когда два семейства волокон ($K = 2$) укладываются параллельно отсчетной плоскости КМ-пластины по направлениям x_1 и x_2 с интенсивностями армирования $\omega_1 = 0,266$ и $\omega_2 = 0,324$; 2) ортогональное пространственное 3D-армирование (рис. 1б), когда три семейства волокон ($K = 3$) укладываются по направлениям x_1 , x_2 и x_3 с плотностями $\omega_1 = 0,235$, $\omega_2 = 0,324$ и $\omega_3 = 0,031$ [1]; 3) неортогональное пространственное 4D-армирование (рис. 1в), когда два первых семейства волокон укладываются по направлениям x_1 и x_2 , а третье и четвертое семейства – по наклонным направлениям, определяемым углами (см. рис. 2): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (то есть на рис. 1в $\theta = \pi/4$). В этом случае интенсивности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0,066$, $\omega_2 = 0,324$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0,1$. Во всех рассматриваемых структурах армирования общий расход волокон одинаков.

Для проведения численных расчетов по направлениям x_1 и x_2 введем равномерную сетку с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/100 = 2$ мм, а шаг по времени τ выберем равным 0,5 мкс. При этих данных получаем отношения $\Delta x_1/\tau = 4$ км/с и $2h/\tau = 40$ км/с, которые существенно превышают значения c , приведенные в таблице для компонентов композиции. Следовательно, необходимые условия устойчивости схемы «крест» выполняются для каждого компонента композиции [13], а значит, и для композиции пластины, причем с запасом [19].

На рис. 3 изображены поперечные колебания центральных точек исследуемых КМ-пластин ($w_0(t) = w(t, 0, 0)$), а на рис. 4 – осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(0)}$ в связующем материале соответствующей композиции ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a/2$, $|x_2| \leq b/2$, $|x_3| \leq h$), рассчитанные при $p_{\max} = 11$ МПа (см. (23)).

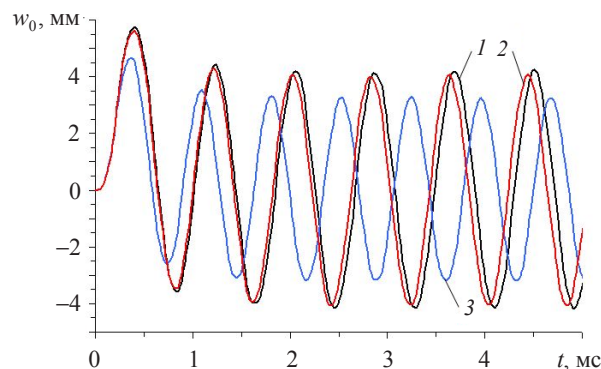


Рис. 3. Поперечные осцилляции центральных точек КМ-пластин

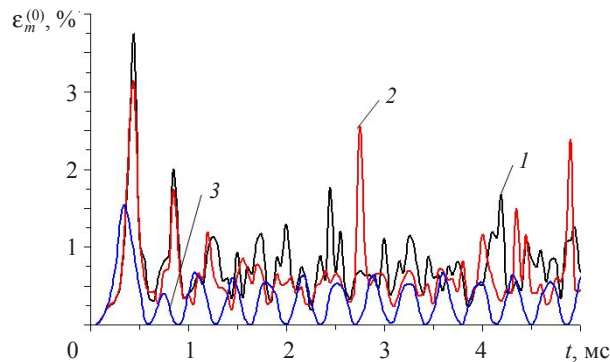


Рис. 4. Зависимость максимального значения интенсивности деформаций в связующем КМ-пластин от времени

Кривые 1 на рис. 3 и 4 соответствуют ортогональному плоскому 2D-армированию КМ-пластины (см. рис. 1а); кривые 2 – ортогональному пространственному 3D-армированию (см. рис. 1б); кривые 3 – неортогональному пространственному 4D-армированию (см. рис. 1в).

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3, 4 показывает, что в случае рассматриваемых материалов компонентов композиции (см. табл. 1) замена плоской структуры 2D-армирования на ортогональную пространственную 3D-структуру практически не влияет на уменьшение податливости такой конструкции (см. рис. 3), но позволяет уменьшить максимальное значение интенсивности деформаций в связующем $\max_{t \geq t_0} \varepsilon_m^{(0)} = \max_{t \geq t_0} \varepsilon_m^{(0)}(t)$ на 16,5% (см. рис. 4). Сопоставление кривых 1 и 3 на рис. 3 и 4 свидетельствует о том, что замена структуры 2D-армирования на структуру 4D-армирования позволяет уменьшить максимальное значение прогиба КМ-пластины на 19,4%, а значения величины $\max \varepsilon_m^{(0)}$ – в 2,4 раза.

Увеличение жесткости волокон, то есть усиление анизотропии композиции, приводит к увеличению эффекта от замены плоской 2D-структуры на пространственную структуру 4D-армирования. Так, при $p_{\max} = 13$ МПа и $E_k = 86,8$ ГПа, $\rho_k = 2520$ кг/м³, $1 \leq k \leq K$ (что условно соответствует стекловолокнам марки S-994 [24]) замена плоской структуры 2D-армирования на пространственную структуру 4D-армирования приводит к уменьшению максимального значения прогиба КМ-пластины на 30%, а значения $\max \varepsilon_m^{(0)}$ – в 4,5 раза. Расчеты проводились с прежним шагом по времени τ .

В случае слабо выраженной анизотропии композиции: $3 \leq E_0/E_k \leq 10$, $1 \leq k \leq K$ (что условно соответствует металлокомпозициям), такая замена практически не приводит к уменьшению податливости КМ-конструкции, но позволяет уменьшить величину $\max \varepsilon_m^{(0)}$ на несколько десятков процентов. Действительно, в [25] на основе использования теории Редди было показано, что перекрестно-армированная в плоскости пластина слабо сопротивляется поперечным сдвигам только в случае сильно выраженной анизотропии композиции, когда $E_0/E_k \geq 30$ ($1 \leq k \leq K$). В случае слабо выраженной анизотропии, когда связующее является достаточно жестким, расчет прогиба КМ-пластин с относительной толщиной порядка 1/10 можно вполне адекватно проводить по классической теории. Поэтому в случае слабо выраженной анизотропии замена плоской перекрестной структуры армирования на пространственную структуру не приводит к заметному уменьшению прогибов КМ-пластин, так

как такая замена структуры армирования не увеличивает существенно сдвиговую жесткость конструкции в поперечном направлении.

Расчеты проведены для относительно толстых КМ-пластин ($2h/\min(a, b) = 1/10$). Дополнительные расчеты показали, что в случаях относительно тонких конструкций ($2h/\min(a, b) \leq 1/20$) замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру как 3D-, так и 4D-армирования (с сохранением общего расхода волокон), как правило, не позволяет уменьшить податливость КМ-пластины и максимальные значения интенсивности деформаций в составляющих композиции.

Встречаются ситуации, когда замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру, наоборот, приводит к увеличению ее податливости в поперечном направлении не только для тонкой, но и для относительно толстой конструкции. Так, для кольцевой пластины толщиной $2h = 5$ см, ограниченной кромками радиусов $r_0 = 10$ см и $r_1 = 60$ см, жестко закрепленной по внешней кромке $r = r_1$ и контактирующей по внутренней кромке $r = r_0$ с жесткой шайбой (уравнение движения шайбы и условия сопряжения пластины с шайбой приведены в [19]; см. там соотношения (44) и (45)), при характеристиках материалов фаз композиции, приведенных в таблице, оказалось, что радиально-окружная структура 2D-армирования (см. рис. 1а) обеспечивает меньшую податливость такой конструкции в поперечном направлении, чем структура 4D-армирования (см. рис. 1в, где, как и на рис. 1а, под x_2 следует понимать радиальное, а под x_1 – окружное направление), хотя КМ-пластина с такими размерами может рассматриваться как относительно толстая: $2h/(r_1 - r_0) = 1/10$. Шаг по времени τ выбирался прежним.

Заключение

Проведенный анализ динамического изгибного поведения прямоугольных нелинейно-упругих пластин с пространственными и плоскими структурами армирования показал, что в случае относительно толстых КМ-пластин (с относительной толщиной порядка $1/10$), имеющих слабо выраженную анизотропию композиции, замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру с сохранением общего расхода волокон приводит не столько к уменьшению податливости пластины в поперечном направлении, сколько к уменьшению интенсивности деформаций в связующем материале композиции (на десятки процентов). В случаях сильно выраженной анизотропии композиции пластины замена плоско-перекрестной структуры армирования в относительно толстой прямоугольной пластине на пространственную структуру армирования позволяет уменьшить максимальный прогиб конструкции на несколько десятков процентов, а значения интенсивности деформаций в связующем – в разы. В относительно тонких прямоугольных пластинах (с относительной толщиной порядка $1/20$ и менее) эффект уменьшения их податливости при замене плоско-перекрестной структуры армирования на пространственные структуры практически не наблюдается.

В конструкциях более сложной формы, например в кольцевых пластинах с жесткой внутренней шайбой, даже при их относительно большой толщине такая замена плоской структуры армирования на пространственную структуру может оказаться неэффективной. Следовательно, вопрос о целесообразности замены плоско-перекрестной структуры армирования в нелинейно-упругих КМ-пластинах на пространственную структуру армирования в каждом конкретном случае должен решаться

отдельно. При этом имеет смысл ставить задачи отыскания рациональных и оптимальных пространственных структур армирования.

Разработанная математическая модель изгибного деформирования пространственно-армированных пластин из нелинейно-упругих материалов может быть использована для расчета тонкостенных КМ-конструкций, компоненты композиции которых чувствительны к виду напряженного состояния в них (например, являются упругими материалами, по разному сопротивляющимися растяжению и сжатию [26]). Предложенная модель позволяет описывать изгибное деформирование КМ-пластин как гибких систем, в которых ударно-волновые процессы в поперечном направлении и откольные явления не учитываются. Согласно экспериментальным данным [27], такие явления в КМ-конструкциях наблюдаются тогда, когда время нарастания внешней поперечной нагрузки имеет порядок 0,1 мкс, поэтому предложенная модель может быть использована в тех случаях, когда время нарастания внешней нагрузки много больше 0,1 мкс. Таким условиям отвечают, например, нагрузки, вызванные воздействием воздушной или подводной взрывной волны [21].

Список литературы

1. Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение. *Механика полимеров*. 1973. №6. С. 1011–1018.
2. *Пространственно-армированные композиционные материалы*: Справочник. Ред. Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
3. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites. *SAMPE Journal*. 2001. Vol. 37. No 3. P. 3–17.
4. Шустер Й., Гейдер Д., Шарп К., Глования М. Измерение и моделирование теплопроводности трехмерных тканых композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45. №2. С. 241–254.
5. Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик. *Механика полимеров*. 1973. №5. С. 853–860.
6. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 1982. №1. С. 14–22.
7. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель. *Механика композитных материалов*. 2010. Т. 46. №5. С. 663–678.
8. Янковский А.П. Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов. *Конструкции из композиционных материалов*. 2012. №2. С. 12–25.
9. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 355 с.
10. Whitney J.M., Leissa A.W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36. No 2. P. 261–266.
11. Немировский Ю.В., Резников Б.С. *Прочность элементов конструкций из композитных материалов*. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с.
12. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12. No 2. P. 69–77.
13. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
14. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 336 с.

15. Reddy J.N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. N.Y.: John Wiley, 1984. 760 p.
16. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
17. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
18. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
19. Янковский А.П. Моделирование динамического поведения гибких армированных пластин из нелинейно-упругих материалов. *Конструкции из композиционных материалов*. 2017. №1. С. 12–26.
20. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
21. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.
22. Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
23. *Справочник по композитным материалам*: В 2-х кн. Кн. 1. Ред. Дж. Любин. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
24. *Композиционные материалы*. Справочник. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
25. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин. *Научный вестник НГТУ*. 2004. №3 (18). С. 91–113.
26. Трещёв А.А. Изотропные пластины и оболочки, выполненные из материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. М.–Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. 249 с.
27. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А. *Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.

References

1. Zhigun I.G., Dushin M.I., Poliakov V.A., Yakushin V.A. Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoy pryamykh vzaimno ortogonalnykh volokon. 2. Eksperimentalnoe izuchenie [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study]. *Mekhanika polimerov [Mechanics of Polymers]*. 1973. No 6. P. 1011–1018 (In Russian).
2. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Spatially Reinforced Composite Materials. Handbook]*. Eds. by Yu.M. Tarnopol'skii, I.G. Zhigun, V.A. Poliakov. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1987. 224 p. (In Russian).
3. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites. *SAMPE J*. 2001. Vol. 37. No 3. P. 3–17.
4. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2009. Vol. 45. No 2. P. 241–254.
5. Tarnopol'skii Yu.M., Poliakov V.A., Zhigun I.G. Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoy pryamykh vzaimno ortogonalnykh volokon. 1. Raschet uprugikh kharakteristik [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of elastic characteristics]. *Mekhanika polimerov [Mechanics of Polymers]*. 1973. No 5. P. 853–860 (In Russian).
6. Kregers A.F., Teters G.A. Strukturnaya model deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]. *Mekhanika kompozitnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. 1982. No 1. P. 14–22 (In Russian).
7. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mechanics of Composite Materials*. 2010. Vol. 46. No 5. P. 451–460.

8. Yankovskii A.P. Modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya kompozitov s prostranstvennoy strukturoy armirovaniya iz nelineyno-nasledstvennykh materialov [Modeling the mechanical behavior of composites with a spatial reinforcement of nonlinear hereditary materials]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Composite Materials Constructions]. 2012. No 2. P. 12–25 (In Russian).
9. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic Plates]. Moscow–Leningrad. OGIZ Publ. 1947. 355 p. (In Russian).
10. Whitney J.M., Leissa A.W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. *J. Appl. Mech.* 1969. Vol. 36. No 2. P. 261–266.
11. Nemirovskii Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost elementov konstruktsiy iz kompozitnykh materialov* [Strength of Elements of Designs from Composites Materials]. Novosibirsk. Nauka Publ. 1986. 168 p. (In Russian).
12. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate. *J. Appl. Mech.* 1945. Vol. 12. No 2. P. 69–77.
13. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).
14. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugikh obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennye i novye zadachi* [Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Shells of Non-uniform Structure: Models, Methods, Algorithms, the Insufficiently Studied and New Problems]. Moscow. Librokom Publ. 2012. 336 p. (In Russian).
15. Reddy J.N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York. John Wiley. 1984. 760 p.
16. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of Rigid Polymeric Materials]. Riga. Zinatne Publ. 1972. 500 p. (In Russian).
17. Ambarcumian S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost, ustoychivost i kolebaniya* [The Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Fluctuations]. Moscow. Nauka Publ. 1987. 360 p. (In Russian).
18. Andreev A.N. *Uprugost i termouprugost sloistnykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and Thermo-elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis]. Saarbrücken. Palmarium Academic Publishing. 2013. 93 p. (In Russian).
19. Yankovskii A.P. Modelirovanie dinamicheskogo povedeniya gibkikh armirovannykh plastin iz nelineyno-uprugikh materialov. [Modeling of dynamic behavior of flexible reinforced plates of nonlinear elastic materials]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Composite Materials Constructions]. 2017. No 1. P. 12–26 (In Russian).
20. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga. Zinatne Publ. 1987. 295 p. (In Russian).
21. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.
22. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika* [Mechanics of Thin-walled Designs. Statics]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1977. 488 p. (In Russian).
23. *Handbook of Composites*. Ed. by G. Lubin. New York. Van Nostrand Reinhold Company Inc. 1982. 786 p.
24. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite Materials. Reference Book]. Ed. by D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).
25. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. O granitsakh primenimosti nekotorykh teoriy rascheta izgibaemykh armirovannykh plastin [On the limits of applicability of some theories for the calculation of bent reinforced plates]. *Nauchnyy vestnik NGTU* [Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University]. 2004. No 3 (18). P. 91–113 (In Russian).
26. Treshchev A.A. *Izotropnye plastiny i obolochki, vypolnennye iz materialov, chuvstvitelnykh k vidu napryazhennogo sostoyaniya* [Isotropic Plates and Shells Made from Materials, Sensitive to a Kind of an Stresses Condition]. Moscow–Tula. TulSU Publ. 2013. 249 p. (In Russian).
27. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi*

mekhaniki tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2014. 408 p. (In Russian).

MODELING OF BENDED BEHAVIOR OF SPACE-REINFORCED PLATES OF NONLINEAR-ELASTIC MATERIALS

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

Based on the procedure of time steps, a mathematical model of bending behavior is constructed for spatially-reinforced plates with nonlinear elastic deformation of the materials of the composition components. The solution of the formulated initial-boundary value problem is based on an explicit numerical “cross” scheme. The possible weakened resistance of reinforced plates to transverse shear is taken into account on the basis of kinematic hypotheses of the Reddy theory. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. It is shown that in the framework of Reddy theory, an explicit numerical scheme cannot be constructed for all arbitrary structures of spatial reinforcement of plates. The dynamic nonlinear elastic behavior of plane-cross and spatially reinforced rectangular plates under the action of an air blast wave is investigated. It is shown that with a strong anisotropy of the composition for relatively thick plates, the replacement of the plane-cross structure of the reinforcement with the spatial structure allows to reduce the flexibility of the structure in the transverse direction by tens of percent (up to 30% or more), and the intensity of deformations in the binder – at times. The reducing the relative thickness of the plate and the degree of anisotropy of its composition reduces the effect of replacing the plane-cross structure of the reinforcement on the spatial structure. In some cases, this effect may not appear even in relatively thick composite structures of more complex geometric shape, for example, in annular plates with a rigid inner insert.

Keywords: spatial reinforcement, plane-cross reinforcement, flexible plate, dynamic bending, Reddy theory, nonlinear elastic deformation, explosive load, “cross” scheme.