УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОДИНОЧНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЕ ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ

Л.А. Игумнов, А.А. Белов

Нижний Новгород

В работе представлен подход метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющий решать динамические задачи не только в изотропном, но и в анизотропном случае. Гранично-элементная схема метода ГИУ строится на базе регулярного интегрального уравнения первого рода (интегральное уравнение на плоской волне). Впервые в научной литературе представлен результат численного расчета трехмерной динамической задачи на основе интегрального уравнения на плоской волне.

Введение

Классические формулировки метода ГИУ с их дискретной реализацией и традиционные варианты метода граничных элементов (МГЭ) давно зарекомендовали себя как успешные подходы для решения трехмерных изотропных задач динамической теории упругости. Распространение методов ГИУ и МГЭ на анизотропные задачи и задачи, в которых модели материала не являются упругими, требует разработки специальных новых схем редукции. На современном этапе развития методов ГИУ и МГЭ для решения подобных динамических задач можно строить численные схемы на основе двух принципиально различающихся подходов. Это подход на основе двойного применения теоремы взаимности, восходящий к работе Д. Нардини и К.А. Бреббия [1], и подход, использующий структуру динамического фундаментального решения, восходящий к работе В.А. Бабешко [2].

1. Постановка задачи и метод решения

Уравнения движения упругодеформируемой среды и краевые условия имеют вид:

$$Lu = 0, \quad L = \sigma_{ij,j} - \partial_t^2, \quad (l^0 u)_i \equiv u_i \Big|_{\partial\Omega}, \ (l^1 u)_i \equiv fD_{ij}(u) m_j \Big|_{\partial\Omega} \equiv c_{ijkl} m_j u_{l,k},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}$, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; u – вектор смещений; c_{ijkl} – модули упругости ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

Тензор Грина для линейной анизотропной теории упругости можно найти в [3]:

$$U(x,\omega) = -c\Delta \int_{S^2} \overline{u}\, dS(n) = -c\Delta \int_{S^2} G(nx, \omega, n) F^{(0)} dS(n),$$

$$G(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{e^{ik_\alpha|\xi|}}{2ik_\alpha\lambda_\alpha} A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi) \otimes A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi), \quad \xi = nx,$$

$$U(x,t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{2} A_\alpha(\upsilon_\alpha^2 M + K) A_\alpha, \quad \upsilon_\alpha = \omega / k_\alpha,$$

где $K = L_0(n)$, $M = \rho I$, $F^{(0)} = 1$, $g_S = \overline{u}$, ρ – плотность, I – единичная матрица.

Для динамических задач справедливы следующие уравнения [4]:

$$\gamma \widehat{A}_\alpha \otimes \widehat{A}_\alpha \int_\Gamma \left[l^1 e^{ik_\alpha n(x-y)} l^0 \psi(y) - e^{ik_\alpha n(x-y)} l^1 \psi(y) \right] d_y \Gamma = 0, \qquad (1)$$

$$\gamma \widehat{A}_\alpha \otimes \widehat{A}_\alpha \int_\Gamma \left[l^1 \delta(\tau) * l^0 \psi(y,t) - \delta(\tau) * l^1 \psi(y,t) \right] d_y \Gamma = 0, \qquad (2)$$

$$\det A(k_\alpha) = 0, \quad A(k,\omega,n)\widehat{A} = 0, \quad A^*(k_\alpha \operatorname{sgn}\xi) = trA^*(k_\alpha)\widehat{A}_\alpha(\operatorname{sgn}\xi) \otimes \widehat{A}_\alpha(\operatorname{sgn}\xi),$$

$$\tau = t - \frac{n(x-y)}{\upsilon_\alpha},$$

$$\pm \gamma \tilde{n} \sum_{\alpha=1}^{3} i g_S(k_\alpha) \int_\Gamma \left[l^1 e^{ik_\alpha n(x-y)} l^0 \psi(y) - e^{ik_\alpha n(x-y)} l^1 \psi(y) \right] d_y \Gamma = 0, \qquad (3)$$

$$\pm \gamma \tilde{n} \sum_{\alpha=1}^{3} i g_S(k_\alpha) \int_\Gamma \left[l^1 \delta(\tau) * \psi(y,t) - \delta(\tau) * l^1 \psi(y,t) \right] d_y \Gamma = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, решение задачи методом ГИУ означает, что выполняются соотношения (1)–(4) для собственных чисел k_α и собственных векторов $\widehat{A}_\alpha$. Для теории упругости из уравнений (1) с учетом соотношения

$$\frac{iA^*(k_\alpha \operatorname{sgn}\xi)}{\left[\det A(k)\right]'\Big|_{k=k_\alpha}} = \frac{1}{2ik_\alpha\lambda_\alpha} A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi) \otimes A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi)$$

выделяется интегральное уравнение, совпадающее (при $x = 0$) с уравнением из [2, 5].

В работе [2] В.А. Бабешко предложил метод построения новых интегральных уравнений для решения краевых задач. В дальнейшем этот подход был применен А.О. Ватульяном [5]. Соответствующие уравнения для изотропного случая выглядят следующим образом [6]:

$$\int_S U(x,n) e_u^1(x) dS + \int_S T(x,n) e_u^0(x) dS = 0, \qquad (5)$$

$$T = \mu i s \cdot \begin{Vmatrix} Am_1 + Bn_1 & Am_2 + Bn_2 & Am_3 + Bn_3 \\ Dn_1 - Bn_3 & Dn_2 & Bn_1 + Dn_3 \\ Cn_1 & Bn_3 + Cn_2 & Cn_3 - Bn_2 \end{Vmatrix},$$

$$U = \mathrm{e} \cdot \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ 0 & -n_3 & n_2 \end{Vmatrix},$$

$$s = \mathrm{diag}(-2k_1e_1, k_2e_2, k_2e_2),\ \mathrm{e} = \mathrm{diag}(e_1, e_2, e_2),\ e_j = \exp[ik_jnx],$$

$$A = \frac{\nu}{1-2\nu},\ B = mn,\ C = n \times i_1m,\ D = n \times i_2m.$$

На базе уравнений (1), (2) можно построить МГЭ-схему решения динамических краевых задач.

2. Численные исследования

Первый численный результат на основе уравнения (5) был получен в [6] для задачи об установившихся крутильных колебаниях изотропного упругого цилиндрического тела. Численные результаты для трехмерного случая упругой динамики до сих пор отсутствуют. Мы рассматриваем две задачи: о действии нестационарного давления на поверхности шара единичного радиуса и куба с единичной длиной ребра. Приведенные параметры Ламе и плотность материала: $\lambda = 6$, $\mu = 3$, $\rho = 7$.

В момент времени $t = 0$ к границе шара прикладывается равномерно распределенное нормальное давление интенсивности $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Поверхности шара и куба разбиваются на 216 биквадратичных элемента, перемещения ищутся для всех угловых точек элементов конструкций, с учетом симметрии можно выделить 27 элементов, находящихся в положительной области декартовой системы координат. Обе задачи для классических ядер решались с учетом симметрии, а для модифицированных ядер решения искались по всей сетке. Гранично-элементная сетка на сфере строилась путем проекции равномерной сетки куба на сферу.

Численная МГЭ-схема для классических ядер описана в [7]. Вариант численной МГЭ-схемы, использованной для решения уравнения (5), построен на ее основе, однако есть два отличия: численное интегрирование по Гауссу организовано на основе формулы с фиксированным порядком и адаптивный алгоритм не применялся; для решения итоговой системы линейных алгебраических уравнений использовался алгоритм регуляризации по Тихонову.

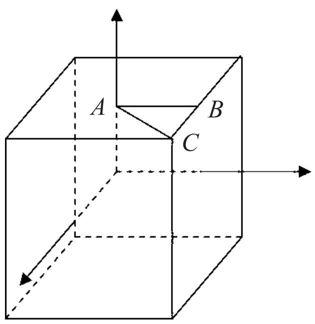

Рис. 1

На рис. 1 изображен куб и отмечены точки, для которых представлены результаты расчетов. Сетка на кубе является регулярной.

На рис. 2–7 показаны результаты, полученные на основе классической МГЭ-схемы и на основе МГЭ для ГИУ из (5). Гладкие спектральные функции на рис. 3, 5–7 соответствуют классическому варианту ядер, осциллирующие спектральные функции на рис. 2, 4 – ГИУ на плоских волнах.

На рис. 2 представлены поверхностные перемещения шара, причем нижний график получен по классической МГЭ-схеме. На рис. 3 представлен параметризованный по Тихонову модуль амплитудно-частотной функции перемещений. На рис. 4 представлено поведение перемещений в соответствующих точках куба, причем нижний график соответствует классической МГЭ-схеме. На рис. 5–7 представлены соответственно действительная и мнимая части, а также модуль амплитудно-частотной функции перемещений точек куба.

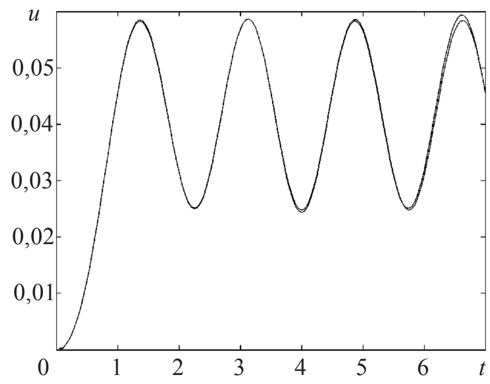

Рис. 2

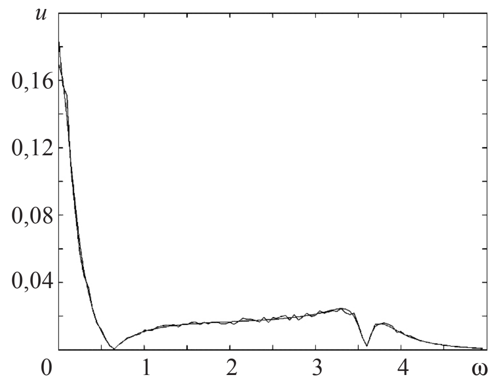

Рис. 3

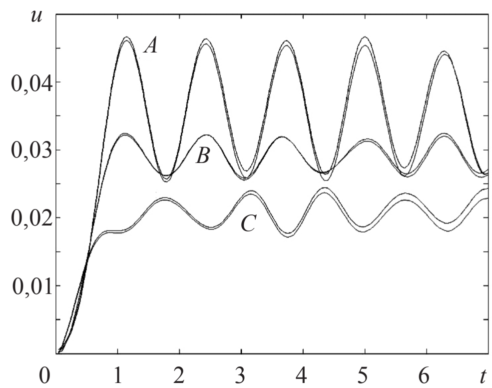

Рис. 4

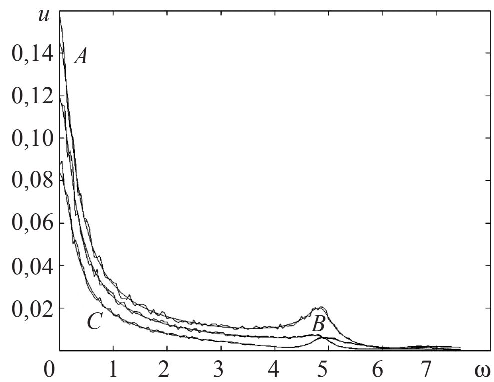

Рис. 5

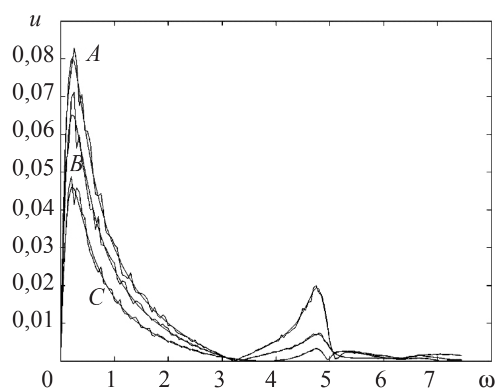

Рис. 6

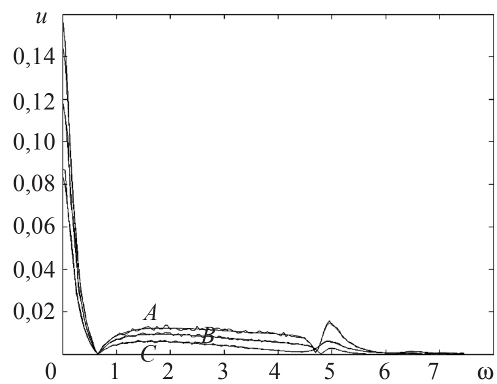

Рис. 7

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности использования ГИУ на одиночной плоской волне для решения трехмерных динамических задач теории упругости. Достигнутая точность расчетов не уступает точности МГЭ-схем для классических ГИУ.

Работа выполнена при частичном финансировании Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

Литература

1. *Бреббия, К*. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел – М.: Мир, 1987. – 524с.

2. *Бабешко, В.А*. Новый метод решения краевых задач механики сплошной среды и математической физики для неклассических областей / В.А. Бабешко // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284, № 1. – С. 73–76.

3. *Norris, A.N.* Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids / A.N. Norris // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1994. – № 447. – P. 175–188.

4. *Игумнов, Л.А*. Граничные интегральные уравнения трехмерных задач на плоских волнах / Л.А. Игумнов // Докл. РАН. – 2006. – Т. 409, №5. – С. 1–3.

5. *Ватульян, А.О.* О граничных интегральных уравнениях I-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости / А.О. Ватульян // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333, №3. – С. 312–314.

6. *Ватульян, А.О.* Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости / А.О. Ватульян, В.М. Шамшин // ПММ. – 1998. – Т. 62, вып.3. – С. 492–496.

7. Гранично-элементная методика решения трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости и вязкоупругости / Л.А.Игумнов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб. / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2005. – Вып. 67. – С. 91–101.

[13.09.2006]

NUMERICAL SOLUTION OF NONSTATIONARY PROBLEMS OF THREE-DIMENTIONAL THEORY OF ELASTICITY USING METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS ON A SINGLE PLANE WAVE

L.A. Igumnov, A.A. Belov

An approach of the boundary integral equations method (BIEM) which enables to solve dynamic problems not only in an isotropic case but also in an anisotropic one is presented. A boundary-element scheme of BIEM is based on a regular integral equation of the first kind (an integral equation on a plane wave). The result of the numerical computation of the 3-dimentional dynamic problem based on an integral equation on a plane wave is shown for the first time in scientific and technical literature.