

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-53-62

## КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В ПОЛЕ АДДИТИВНОГО ЦВЕТНОГО ШУМА\*

© 2019 г.

**Крысько В.А., Папкина И.В.,  
Кутепов И.Е., Крысько А.В.**

*Саратовский государственный технический университет  
им. Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

ilyakutepov@yandex.ru

*Поступила в редакцию 22.11.2018*

Делается попытка очистить от шумовых воздействий колебания балки, лежащей на вязкоупругом основании. Полагается, что справедлива гипотеза Бернулли – Эйлера. Рассматривается воздействие белого, красного, розового, фиолетового и синего шумов. Шум учитывается как составляющая внешней знакопеременной распределенной нагрузки. Уравнения движения балки получены в частных производных из принципа Гамильтона – Остроградского. Уравнения в частных производных сводятся к задаче Коши методом конечных разностей 2-го порядка точности, которая решается методами типа Рунге – Кутты.

С целью очистки колебаний балки от шума был использован метод главных компонент, с помощью которого обработаны решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие колебания прямолинейных балок, лежащих на вязкоупругом основании. Решения уравнений представлялись в виде двухмерного массива данных, соответствующих прогибам в узлах балки в различные моменты времени. Для оценки качества очистки сравнивались спектры мощности Фурье, полученные при отсутствии шумового воздействия, с шумовым воздействием и после очистки. Рассмотрены задачи для балок, шарнирно опертых по концам, жестко заделанных по концам и шарнирно опертых на одном конце и жестко заделанных на другом. Удалось полностью очистить сигналы от четырех типов шумов: белого, розового, синего, фиолетового.

*Ключевые слова:* балка Бернулли – Эйлера, белый шум, метод главных компонент, цветной шум.

### **Введение**

Метод главных компонент (РСА – Principal Component Analysis) сформулирован Сильвестром [1], доработан Пирсоном [2], детально исследован Хоттелингом [3]. С развитием цифровых технологий метод нашел широкое применение в биологии, логистике [4], туризме, химии [5, 6], экономике, социологии [7] и др.

С помощью РСА можно очистить сигнал от шумовых воздействий, он работает как фильтр: основная информация об исследуемом объекте содержится в первых

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-60027 мол\_а\_дк).

главных компонентах, а в остальных компонентах преобладает шумовая составляющая. Применяв обратное преобразование, получают изображение без шума.

Целью настоящей статьи является использование РСА для очистки от шумовой составляющей колебаний тонкой балки, лежащей на вязкоупругом основании, находящейся под действием знакопеременной нагрузки и аддитивного шума. Применение РСА для исследования характера колебаний механических систем в литературе найдено не было.

Очень часто колебания объектов сопровождаются техническими шумами, спектральная плотность мощности которых подчинена степенному закону

$$S(\omega) = h_\gamma \omega^\gamma, \quad -2 \leq \gamma \leq 2,$$

где  $h_\gamma$  – масштабный коэффициент, определяющий уровень шума. Традиционно с каждым целочисленным значением  $\gamma$  связывают определенный цвет, исходя из аналогии между параметрами распределения случайного процесса сигнала и спектрами различных цветов видимого цвета. Белый шум ( $\gamma = 0$ ) – это сигнал, имеющий одинаковую мощность в одинаковых полосах частот любой части диапазона. На практике сигнал может быть белым шумом только в ограниченной полосе частот. Для фиолетового шума  $\gamma = -2$ , для красного шума  $\gamma = +2$ , для розового шума  $\gamma = +1$ , для синего шума  $\gamma = -1$ . Все цветные шумы ограничены по частоте. Подобный тип шумов наблюдается в природе и технике [8–11]. Цветные шумы проявляются в основном в электронных компонентах схем: угольных компаундах резисторов [11], конденсаторах [12], вакуумных приборах [12], твердотельных элементах – транзисторах и диодах [13–15]. В стабильных генераторах шумы вызывают уширение линии-репера и соответствующий сдвиг частоты, а также другие эффекты [16–20]. Исследование свойств шумов проводилось как моделированием [21], в том числе физическим [22, 23] и математическим [24], так и экспериментально [25], при этом наблюдения на интервалах вплоть до инфранизких частот 5–10 Гц не выявили отклонения от степенного закона.

### Постановка задачи

Рассмотрим тонкую балку длиной  $l$ , высотой  $h$  и шириной  $b$ , лежащую на вязкоупругом основании. Балка нагружается равномерно распределенной по ее поверхности нагрузкой  $q(x, t)$ , действующей в направлении нормали к срединной поверхности балки. Полагаем, что:

- справедлива гипотеза Бернулли – Эйлера [26];
- внешние силы не меняют своего направления при деформации балки;
- продольный размер балки значительно превышает ее поперечные размеры;
- имеет место вязкоупругое основание.

В задаче не учитывается инерция вращения элементов балки, однако учитываются силы инерции, отвечающие за перемещения вдоль нормали к срединной линии. В этом случае уравнение колебаний балки имеет вид [27]

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = q \quad (1)$$

с граничными условиями:

- для балки, жестко заделанной по концам,

$$w(0, t) = w'_x(0, t) = w(l, t) = w'_x(l, t) = 0; \quad (2)$$

– для балки, свободно опертой по концам,

$$w(0, t) = w_x''(0, t) = w(1, t) = w_x''(1, t) = 0; \quad (3)$$

– для балки, жестко заделанной на левом конце и свободно опертой на правом,

$$w(0, t) = w_x'(0, t) = w(1, t) = w_x''(1, t) = 0; \quad (4)$$

начальные условия имеют вид:

$$w(x, 0) = 0; \quad \dot{w}(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (1) приведено к безразмерному виду с помощью замены:

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon l}{c}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{l}{c}, \quad \bar{k} = \frac{l^4}{Eh^3} k, \quad \lambda = \frac{l}{h}, \quad (6)$$

где  $w(x, t)$  – прогиб элемента;  $\varepsilon$  – коэффициент сопротивления среды;  $h$  – высота балки;  $l$  – длина балки;  $t$  – время;  $E$  – модуль упругости;  $\rho$  – плотность;  $q$  – внешняя нагрузка;  $k$  – коэффициент, характеризующий жесткость основания. Далее черточка над безразмерными переменными опускается.

Аддитивные шумы добавлены в уравнение (1) в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью  $w_n$ :

$$q = q_0 \sin \omega_p t + w_n(x), \quad (7)$$

где  $q_0$  – амплитуда вынуждающей знакопеременной нагрузки,  $\omega_p$  – частота знакопеременной нагрузки. Белый и цветные шумы генерировались средствами MathLab.

Уравнения (1) преобразовывались к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени с помощью конечных разностей с аппроксимацией  $O(\Delta x^2)$ :

$$\ddot{w}_i + \varepsilon \dot{w}_i = \frac{1}{\lambda^2} \left[ -\frac{1}{12} \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} - kw_i + q \right]. \quad (8)$$

Установлено, что для получения результатов с необходимой степенью точности достаточно разбить длину балки  $[0, 1]$  на 40 частей ( $i = \overline{1, 40}$ ) [28]. Задача Коши решалась методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности и методом Бутчера (метод Рунге – Кутты 6-го порядка). Была установлена сходимость этих методов и предпочтение отдано методу Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Для исключения ошибочных результатов была исследована сходимость численных методов, а также сравнены результаты, полученные различными численными методами [29]. Устойчивость решения по времени, то есть подбор шага по времени, осуществлялся по принципу Рунге. Достоверность численных результатов обеспечивается совпадением полученных решений с результатами, полученными при применении метода конечных элементов по пространственной координате в форме Бубнова, с последующим решением задачи Коши методами типа Рунге – Кутты от второго до восьмого порядка точности [29].

### Выбор количества главных компонент

Применим метод главных компонент [30] к матрице  $W$  размерностью  $I \times J$ , полученной в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения (1). Размерность матрицы соответствует количеству интервалов разбиения длины бал-

ки  $I = 40$  и интервалов времени  $J = 65567$ . При таком количестве отсчетов по времени наблюдается установившийся режим колебаний [31].

Из матрицы  $W$  получаем автошкалированную матрицу  $\tilde{W}$  с элементами:

$$\tilde{w}_{ij} = \frac{w_{ij} - m_j}{s_j}.$$

Здесь  $w_{ij}$  – элементы матрицы  $W$ ;  $m_j$  – среднее по столбцу  $j$  матрицы  $W$ ;  $s_j$  – среднее квадратическое отклонение величин столбца  $j$  матрицы  $W$ . После автошкалирования среднее значение всех переменных становится равным нулю, а среднее квадратическое отклонение – равным единице.

В методе главных компонент используются формальные переменные  $t_a$  ( $a = \overline{1, A}$ ), представляющие собой линейную комбинацию переменных  $w_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ).

Матрица  $\tilde{W}$  представляется в виде линейного разложения

$$\tilde{W} = TP^t + E = \sum_{a=1}^A t_a p_a^t + E, \quad (9)$$

где  $T$  – матрица счетов размерностью  $I \times A$ ;  $P$  – матрица нагрузок размерностью  $A \times J$ ;  $E$  – матрица остатков размерностью  $I \times J$ ;  $A$  – число главных компонент.

Для вычисления матрицы счетов  $T$  и матрицы нагрузок  $P$  использовалось сингулярное разложение матрицы  $\tilde{W} = USV^t$ , где  $T = US$ ,  $P = V$  [29]. Если выбрать число главных компонент  $A$ , то матрица остатков

$$\overline{\overline{E}}_A = (\overline{\overline{e}}_{Aij})_{i=1, j=1}^{n=65567, m=40}$$

вычисляется по формуле

$$\overline{\overline{E}}_A = \tilde{W} - \overline{\overline{T}}_A \overline{\overline{P}}_A^t.$$

Матрицы имеют переменную размерность

$$\overline{\overline{T}}_A = (\overline{\overline{t}}_{Aij})_{i=1, j=1}^{n=65567, m=A} \text{ и } \overline{\overline{P}}_A = (\overline{\overline{p}}_{Aij})_{i=1, j=1}^{n=40, m=A}.$$

Число главных компонент должно быть таково, чтобы информация, заключенная в главных компонентах, отражала большую часть объясненной дисперсии.

### Численный эксперимент

Рассмотрим колебания балки, находящейся на вязкоупругом основании с коэффициентом постели  $k = 1$ . На балку действует равномерно распределенная поперечная знакопеременная нагрузка с амплитудой  $q_0 = 100$  и частотой  $\omega_p = 5$ , интенсивности шума  $w_n = 0, 50$ , коэффициент сопротивления среды  $\epsilon = 0$ . Исследовались установившиеся сигналы на временном интервале  $200 < t < 1224$ . В таблицах 1–5 приведены графики спектров мощности  $S$ , построенные с помощью быстрого преобразования Фурье без учета шума в нагрузке ( $w_n = 0$ , кривые синего цвета), с учетом шума с интенсивностью  $w_n = 50$  (кривые красного цвета) и после обработки сигнала с помощью РСА (кривые зеленого цвета).

При воздействии на балку с граничными условиями (2) знакопеременной нагрузки при отсутствии шума получаем квазипериодический сигнал на пяти частотах  $\omega_p, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  (таблица 1). При добавлении белого шума, несмотря на то, что

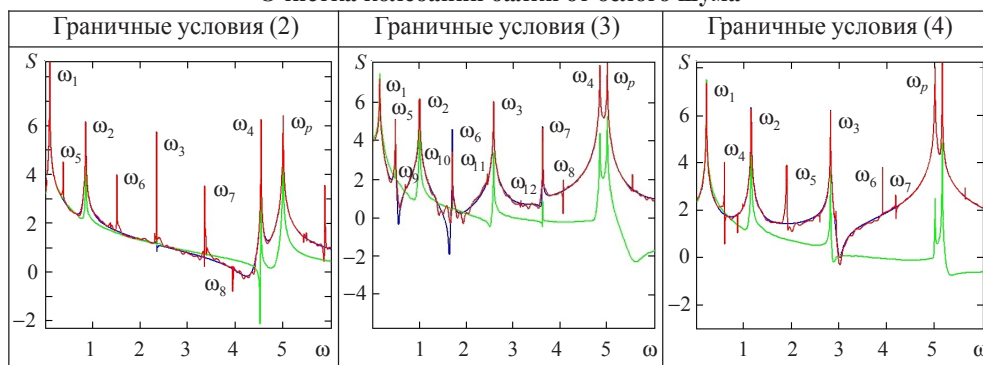
белый шум имеет одинаковую спектральную мощность на всех частотах, при граничных условиях (2) для балки появляются всего четыре новые зависимые частоты  $\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8$ .

Для балки с граничными условиями (3) колебания происходят на семи зависимых частотах  $\omega_1 = \omega_4/5 = 2\omega_2/3 = \omega_3/3$  и  $\omega_5, \omega_6, \omega_7$ ; добавление белого шума приводит к появлению гармоник очень малой амплитуды на частотах  $\omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}$ , близких к частотам  $\omega_5, \omega_6, \omega_7$ .

Для балки с граничными условиями (4) добавление белого шума приводит к появлению гармоник на частотах  $\omega_4, \omega_5, \omega_6$  и  $\omega_7$ .

Таблица 1

**Очистка колебаний балки от белого шума**

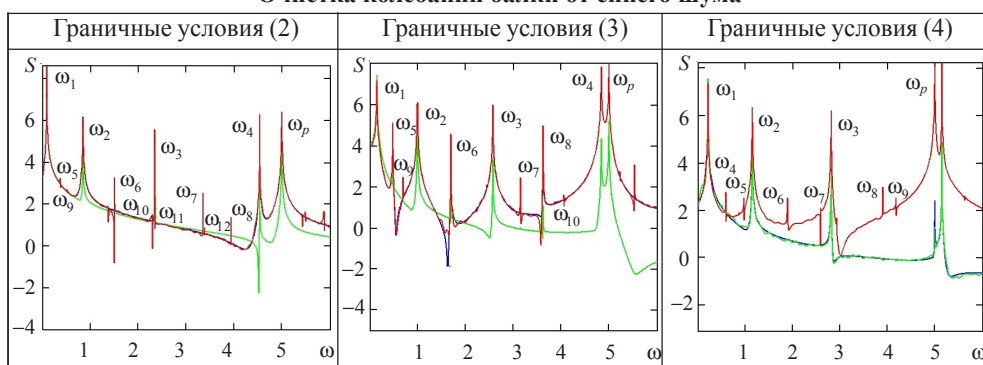


В результате очистки сигнала удалось получить спектры, на которых отсутствуют частоты, появившиеся в результате воздействия белого шума.

Добавление синего шума (таблица 2) к нагрузке балки с граничными условиями (2) приводит к появлению восьми частот  $\omega_5-\omega_{12}$ , балки с граничными условиями (3) – к появлению трех дополнительных частот  $\omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ ; балки с граничными условиями (4) – шести дополнительных частот  $\omega_4-\omega_9$ . Очистка сигнала позволила избавиться от дополнительных частот в спектре.

Таблица 2

**Очистка колебаний балки от синего шума**

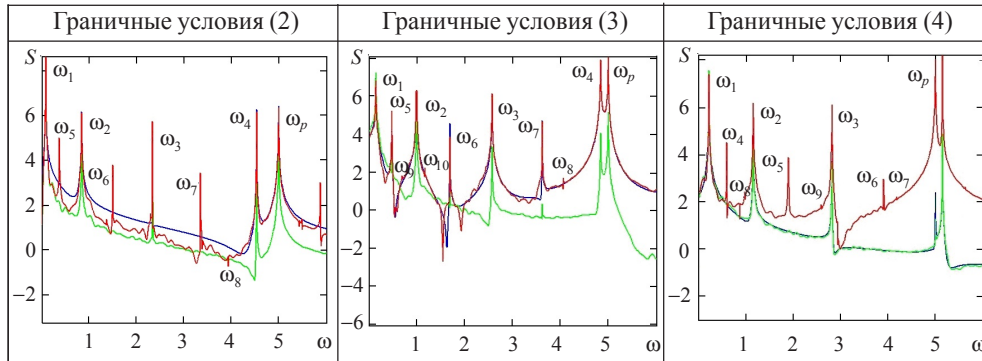


Аналогичные результаты получаются при добавлении к нагрузке балки розового шума (таблица 3). У балки с граничными условиями (2) появляются четыре частоты  $\omega_5-\omega_8$  по сравнению с белым шумом; у балки с граничными условиями (3) появляются три дополнительные частоты  $\omega_8, \omega_9, \omega_{10}$ ; у балки с граничными усло-

виями (4) – шесть дополнительных частот  $\omega_4$ – $\omega_9$ . Очистка сигнала позволила избавиться от дополнительных частот в спектре.

Таблица 3

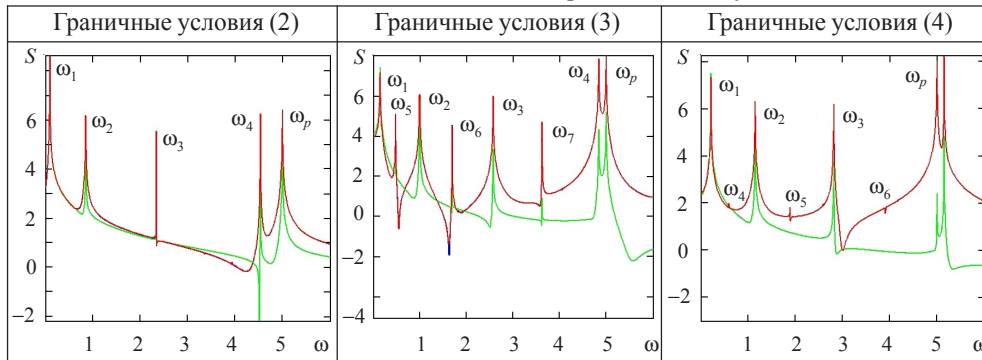
**Очистка колебаний балки от розового шума**



На частотный спектр колебаний балки с краевыми условиями (3) никакого воздействия не оказывает фиолетовый шум (таблица 4), весь набор частот присутствует как в оригинальном спектре, так и в спектре с шумом и в очищенном спектре. Для балок с граничными условиями (2) и (4) удалось получить очищенные спектры.

Таблица 4

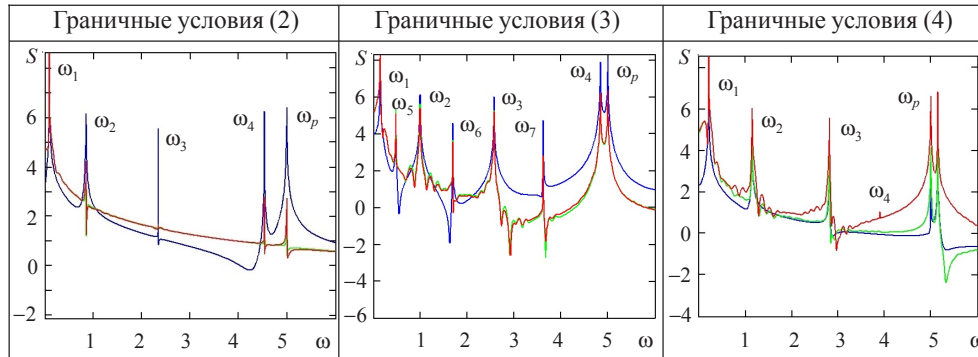
**Очистка колебаний балки от фиолетового шума**



При воздействии аддитивного красного шума (таблица 5) на колебания балки значительное влияние оказывают граничные условия: у балки с граничными условиями (2) после добавления шума исчезла гармоника на частоте  $\omega_3$ . Воздействие красного шума для граничных условий (3) и (4) привело к тому, что в спектре наблюдалось множество новых частот, при этом очистить сигнал не удалось.

После обработки результатов расчета колебаний балки для всех типов граничных условий (2)–(4), полученных при добавлении белого, розового, синего и фиолетового шумов, методом главных компонент с числом главных компонент 1 и 2 на спектре мощности остались частоты, которые были в сигнале без учета шума в нагрузке. Сигнал максимально очищен от шума и при этом сохраняется полезная информация о режиме колебаний. При увеличении числа главных компонент до 3 и 4 происходит полное сохранение информации о шумовых частотах.

## Очистка колебаний балки от красного шума



## Заключение

Шумы могут оказывать существенное влияние на колебания балки. Они приводят к появлению новых гармоник в сигнале на линейно зависимых частотах.

Метод главных компонент может быть применен для очищения сигнала от внешнего аддитивного белого и цветного шума колебаний балок с граничными условиями типа (2)–(4). Удалось полностью очистить сигналы от четырех типов шумов: белого, розового, синего, фиолетового. Колебания балки, полученные при воздействии красного шума, не поддаются очистке при краевых условиях (2) и (4).

## Список литературы

1. Sylvester J.J. On the reduction of a bilinear quantic of the  $n$ th order to the form of a sum of  $n$  products by a double orthogonal substitution. *Messenger of Mathematics*. 1889. No 19. P. 42–46.
2. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*. 1901. No 2. P. 559–572.
3. Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*. 1933. No 24. P. 417–441.
4. Quan X., Jiao L., Du H. Comprehensive evaluation and spatial distribution analysis of logistic development in Xinjiang. *International Conference on Optoelectronics and Image Processing*. 2010. Vol. 1. Art. No 5663067. P. 340–343.
5. Kamp S.D., Morrison S.J. Use of chemical and isotopic signatures to distinguish between uranium mill-related and naturally occurring groundwater constituents. *Ground Water Monitoring and Remediation*. 2014. Vol. 34. Iss. 1. P. 68–78.
6. Гуц А.К., Фролова Ю.В. *Математические методы в социологии. Серия Синергетика: от прошлого к будущему*. М.: Изд-во УРСС, 2007. 216 с.
7. Wang X.Z., Yang Y., Li R., Mcguinness C., Adamson J., Megson I.L., Donaldson K. Principal component and causal analysis of structural and acute in vitro toxicity data for nanoparticles. *Nanotoxicology*. 2014. Vol. 8. Iss. 5. P. 465–476.
8. Saba E.M. et al. *Electrocardiogram Noise Reduction*: Patent USA 9504522. 2016.
9. Salmon J. et al. Poisson noise reduction with non-local PCA. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2012. Vol. 48. No 2. P. 279–294.
10. Chien J.C. et al. A pulse-position-modulation phase-noise-reduction technique for a 2-to-16 GHz injection-locked ring oscillator in 20 nm CMOS. *Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC), IEEE International*. 2014. P. 52–53.
11. Hooge F.N.  $1/f$  Noise. *Physica*. 1976. Vol. 83. No 1. P. 14–23.
12. Radeka V.  $1/f$  noise in physical measurements. *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1969. Vol 16. Iss. 5. P. 17–35.



13. Шумовые и деградационные процессы в полупроводниковых приборах. *Материалы докладов международных научно-технических семинаров*. М.: МЭИ, 1993–2000.
14. Букингом М. *Шумы в электронных приборах и системах*. М.: Мир, 1986. 148 с.
15. Santosa H., Hong M.J., Kim S.P., Hong K.S. Noise reduction in functional near-infrared spectroscopy signals by independent component analysis. *Review of Scientific Instruments*. 2013. Vol. 84. Iss. 7. P. 073106.
16. Christensson E., Lundstrom L., Svensson C. Low frequency noise in MOS transistors. II Experiments. *Solid-State Electronics*. 1968. Vol. 11. No 9. P. 813–820.
17. Жигальский Г.П. Шум вида  $1/f$  и нелинейные эффекты в тонких металлических пленках. *УФН*. 1997. Т. 167. Вып. 6. С. 623–648.
18. Троицкий В.С. Некоторые вопросы теории флуктуаций в автогенераторах. Влияние фликкер-шума. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1958. №1. С. 20–33.
19. Аткинсон В.Р., Фий Л., Ньюмен Ж. Спектральный анализ чрезвычайно низкочастотных изменений частоты кварцевых генераторов. *ТМЭП*. 1963. Т. 51. №2. С. 413–414.
20. Катлер Л.С., Сирл С.Л. Некоторые аспекты теории и измерения частотных флуктуаций стандартов частоты. *ТМЭП*. 1966. Т. 54. Вып. 2. P. 136–154.
21. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Zakharov V.M., Erofeev N.P., Krylova E.Yu., Mrozowski J., Krysko V.A. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2016. Vol. 79. P. 225–253.
22. Анисимов М.П., Черевко А.Г. *Флуктуационные явления в физико-химическом эксперименте*. Новосибирск: Наука, 1986. 113 с.
23. Brophy J.J. Statistics of  $1/f$  noise. *Physical Review*. 1968. Vol. 166. No 3. P. 827–831.
24. Потемкин В.В., Степанов А.В. О стационарном характере шума  $1/f$  в низкочастотном диапазоне. *Радиотехника и электроника*. 1980. Т. 25. №6. С. 1269–1275.
25. Restle R., Weissman M.B., Black R.D. Tests of gaussian statistical properties of  $1/f$  noise. *Journal of Applied Physics*. 1983. Vol. 54. Iss. 10. P. 5844–5847. <http://doi.org/10.1063/1.331809>.
26. Euler L. Sur la force des colonnes. *Memories de L'Academie de Berlin*. 1757. Vol. 13. P. 252–282.
27. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Deterministic chaos in one-dimensional continuous systems. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. Singapore. 2016. Vol. 90. P. 576. <https://doi.org/10.1142/9775>.
28. Awrejcewicz J. et al. Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli – Euler and Timoshenko type beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 5. No 4. P. 319–363.
29. Awrejcewicz J. et al. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. Vol. 23. No 4. P. 043130. DOI: 10.1063/1.4838955.
30. Померанцев А. *Метод главных компонент (PCA)*. Российское хемометрическое общество [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://rcs.chemometrics.ru/Tutorials/pca.htm> (дата обращения: 23.12. 2013). 2008.
31. Мицкевич С.А., Захарова А.А., Крысько А.В. Установившиеся колебания балочных МЭМС-резонаторов в вязкой среде при действии локальной ударной нагрузки. *Компьютерные науки и информационные технологии: Матер. Международ. науч. конф.* Саратов: ИЦ Наука, 2016. С. 277–280.

#### References

1. Sylvester J.J. On the reduction of a bilinear quantic of the  $n$ th order to the form of a sum of  $n$  products by a double orthogonal substitution. *Messenger of Mathematics*. 1889. No 19. P. 42–46.
2. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Phil. Mag.* 1901. No 2. P. 559–572.
3. Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *J. Educ. Psychol.* 1933. No 24. P. 417–441.
4. Quan X., Jiao L., Du H. Comprehensive evaluation and spatial distribution analysis of logistic development in Xinjiang. *International Conference on Optoelectronics and Image Processing*. 2010. Vol. 1. Art. No 5663067. P. 340–343.



5. Kamp S.D., Morrison S.J. Use of chemical and isotopic signatures to distinguish between uranium mill-related and naturally occurring groundwater constituents. *Ground Water Monit. Remed.* 2014. Vol. 34. Iss. 1. P. 68–78.
6. Guts A.K., Frolova Yu.V. *Matematicheskie metody v sotsiologii. Seriya Sinergetika: ot proshlogo k budushchemu* [Mathematical Methods in Sociology. Series Synergetics: from Past to Future]. Moscow. URSS Publ. 2007. 216 p. (In Russian).
7. Wang X.Z., Yang Y., Li R., McGuinness C., Adamson J., Megson I.L., Donaldson K. Principal component and causal analysis of structural and acute in vitro toxicity data for nanoparticles. *Nanotoxicology*. 2014. Vol. 8. Iss. 5. P. 465–476.
8. Saba E.M. et al. *Electrocardiogram Noise Reduction*. Patent USA 9504522. 2016.
9. Salmon J. et al. Poisson noise reduction with non-local PCA. *J. Math. Image. Vis.* 2012. Vol. 48. No 2. P. 279–294.
10. Chien J.C. et al. A pulse-position-modulation phase-noise-reduction technique for a 2-to-16 GHz injection-locked ring oscillator in 20 nm CMOS. Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC). *IEEE International*. 2014. P. 52–53.
11. Hooge F.N.  $1/f$  Noise. *Physica*. 1976. Vol. 83. No 1. P. 14–23.
12. Radeka V.  $1/f$  noise in physical measurements. *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1969. Vol. 16. Iss. 5. P. 17–35.
13. Shumovye i degradatsionnye protsessy v poluprovodnikovyykh priborakh [Noise and degradatsionny processes in semiconductor devices]. *Materialy dokladov mezhdunarodnykh nauchno-tekhnicheskikh seminarov* [Materials of Reports of the International Scientific and Technical Seminars MEI]. Moscow. MEI Publ. 1993–2000 (In Russian).
14. Buckingham M.J. *Noise in Electronic Devices and Systems*. Chichester. Ellis Horwood Ltd Publ. 1986. 372 p.
15. Santosa H., Hong M.J., Kim S.P., Hong K.S. Noise reduction in functional near-infrared spectroscopy signals by independent component analysis. *Rev. Sci. Instrum.* 2013. Vol. 84. No 7. P. 073106.
16. Christensson E., Lundstrom L., Svensson C. Low frequency noise in MOS transistors. II Experiments. *Solid-State Electronics*. 1968. Vol. 11. No 9. P. 813–820.
17. Zhigal'skii G.P.  $1/f$  noise and nonlinear effects in thin metal films. *Physics-Uspokhi*. 1997. Vol. 40. Iss. 6. P. 599–622.
18. Troitsky V.S. Nekotorye voprosy teorii fluktuatsiy v avtogeneratorakh. Vliyanie flikker shuma [Some questions of the theory of fluctuations in oscillators. Noise flicker effect]. *Izvestiya vuzov. Radiofizika* [Radiophysics and Quantum Electronics]. 1958. No 1. P. 20–33 (In Russian).
19. Atkinson W.R., Fey L., Newman J. Spectrum analysis of extremely low frequency Variations of quartz oscillation. *Proceeding of the IEEE*. 1963. Vol. 51. No 2. P. 379.
20. Catler L.S., Searle C.L. Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations of frequency standards. *Proceeding of the IEEE*. 1966. Vol. 54. Iss. 2. P. 136–154.
21. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Zakharov V.M., Erofeev N.P., Krylova E.Yu., Mrozowski J., Krysko V.A. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise. *Mech. Syst. Signal PR*. 2016. Vol. 79. P. 225–253.
22. Anisimov M.P., Cherevko A.G. *Fluktuatsionnye yavleniya v fiziko-khimicheskoy eksperimente* [Fluctuation Phenomena in Physicochemical Experiment]. Novosibirsk. Nauka Publ. 1986. 113 p. (In Russian).
23. Brophy J.J. Statistics of  $1/f$  noise. *Phys. Rev.* 1968. Vol. 166. No 3. P. 827–831.
24. Potemkin V.V., Stepanov A.V. O stacionarnom kharaktere shuma  $1/f$  v nizkochastotnom diapazone [The stationary nature of the  $1/f$  noise in the low frequency range]. *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics]. 1980. Vol. 25. No 6. P. 1269–1275 (In Russian).
25. Restle R., Weissman M.B., Black R.D. Tests of gaussian statistical properties of  $1/f$  noise. *J. Appl. Phys.* 1983. Vol. 54. Iss. 10. P. 5844–5847. <http://doi.org/10.1063/1.331809>.
26. Euler L. Sur la force des colonnes. *Memories de L'Academie de Berlin*. 1757. Vol. 13. P. 252–282.
27. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Deterministic chaos in one-dimensional continuous systems. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. Singapore. 2016. Vol. 90. P. 576. <https://doi.org/10.1142/9775>.

28. Awrejcewicz J. et al. Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli – Euler and Timoshenko type beams. *Lat. J. Solids Stru.* 2008. Vol. 5. No 4. P. 319–363.

29. Awrejcewicz J. et al. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. Vol. 23. No 4. P. 043130. DOI: 10.1063/1.4838955.

30. Pomerantsev A. *Metod glavnykh komponent (PCA)*. Rossiyskoe khemometricheskoe obshchestvo [Principal Component Analysis (PCA). Russian chemometric society]. Electronic resource. Access mode: <http://rcs.chemometrics.ru/Tutorials/pca.htm>. 2008 (In Russian).

31. Mitskevich S.A., Zakharova A.A., Krysko A.V. Ustanovivshiesya kolebaniya balochnykh MEMS-rezonatorov v vyazkoy srede pri deystvii lokalnoy udarnoy nagruzki [Steady-state vibrations of beam MEMS resonators in a viscous medium under the influence of a local shock loads]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii [Computer Science and Information Technology. Materials of the International Scientific Conference]*. Saratov. Nauka Publ. 2016. P. 277–280 (In Russian).

## VIBRATIONS OF A BEAM IN A FIELD OF COLOR NOISE

**Krysko V.A., Papkova I.V., Kutepov I.E., Krysko A.V.**

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

An attempt is made to clear vibrations of a beam resting on a viscoelastic support from noise effects. It is assumed that Bernoulli-Euler hypothesis holds. Effects of white, red, pink, purple and blue noise are considered. Noise is accounted for as a component of an alternating distributed load. Equations of motion of the beam are obtained as partial derivatives from Hamilton-Ostrogradski principle. Partial derivative equations are reduced to a Cauchy problem, using a second-order accuracy finite difference method, which is solved by Runge-Kutta-type methods.

To clear vibrations of the beam from noise, the main component method was applied. This method was used to process the solutions of linear partial differential equations describing vibrations of rectangular beams resting on a viscoelastic support.

Solutions of the equations were represented in the form of a 2D data array corresponding to deflections in the nodes of the beam at different times. The quality of clearing was assessed by comparing the Fourier power spectra obtained in the absence of noise effects with those that had noise effects, and after clearing. Problems for beams simply supported at both ends, fully fixed at both ends, simply supported at one end and fully fixed at the other one are considered. It was possible to clear the signals from four types of noise: white, pink, blue and purple.

*Keywords:* Bernoulli – Euler beam, white noise, main component method, color noise.