

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-40-52

**УПРУГОЕ МОМЕНТНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ***

© 2019 г.

Чан Ле Тхай¹, Тарлаковский Д.В.^{1,2}

¹*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

²*НИИ механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

tdvhome@mail.ru

Поступила в редакцию 29.12.2018

Исследуется распространение нестационарных осесимметричных поверхностных возмущений в полупространстве, заполненном упругой однородной изотропной средой Коссера. Используется цилиндрическая система координат. Замкнутая система уравнений включает в себя уравнения относительно нетривиальных компонент потенциалов перемещения и угла поворота, а также соотношения, связывающие перемещения с потенциалами, и компонент тензоров напряжений и моментных напряжений с перемещениями и углом поворота. На граничной плоскости заданы нормальные перемещения, а угол поворота и касательные перемещения отсутствуют. Начальные условия нулевые. Все компоненты напряженно-деформированного состояния предполагаются ограниченными. Используется система безразмерных величин.

Решение представляется в виде свертки по времени и обобщенной свертки по радиусу поверхностных возмущений с функциями влияния. Для их построения применяются преобразования Ханкеля по радиусу и Лапласа по времени, а также разложение в степенные ряды по малому параметру в линейном приближении. Найдено изображение всех поверхностных функций влияния. Для примера рассматривается функция, соответствующая нормальному напряжению. Ее оригинал ищется на границе полупространства с использованием связи осесимметричной и плоской задач, а именно, с учетом пропорциональности изображений Ханкеля и Фурье. При этом используется построенное ранее решение плоской задачи. В результате искомая функция представляется в виде интегралов, которые понимаются в смысле регуляризованных значений. Найдены аналитические выражения для этих интегралов и самой функции влияния.

Приведены примеры расчетов функций влияния зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице. Рассмотрены также два варианта действия на полупространство поверхностных нормальных перемещений: сосредоточенное в начале координат и распределенное по кругу возмущения. Анализ результатов показывает, что влияние моментных свойств среды суще-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00471).

ственно зависит от величины параметра, характеризующего связь упругих перемещений и вращательных движений. Для рассматриваемого материала в количественном отношении оно невелико. Однако учет моментных напряжений приводит к качественным изменениям, а именно, наблюдается дополнительный волновой фронт.

Ключевые слова: среда Коссера, поверхностные функции влияния, метод малого параметра, интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, связь плоской и осесимметричной задач.

Введение

В последнее время отмечается возрастающий интерес к моделям сред, позволяющим учитывать микростроение вещества. Одна из таких моделей – среда Коссера. Общая моментная теория упругости впервые была разработана E. Cosserat, F. Cosserat в 1909 году [1]. Каждая частица среды Коссера является бесконечно малым абсолютно твердым телом. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота, то есть величиной, являющейся функцией времени и положения. При таких предположениях в теле возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры.

Затем на протяжении нескольких десятилетий не было практически ни одной публикации, посвященной континууму Коссера. Только через полвека после выхода знаменитой работы братьев Коссера появились яркие труды, касающиеся возможностей применения положений микрополярного континуума в различных областях механики сплошных сред [2–14].

В статье [15] исследована задача о нестационарном осесимметричном движении упругого моментного полупространства под действием нормальных поверхностных перемещений при отсутствии на границе касательных напряжений и угла поворота. В настоящей статье вместо напряжений полагаются равными нулю касательные перемещения, что приводит к более сложному результату, для реализации которого потребовалось использовать в качестве вспомогательного решение аналогичной плоской задачи [16].

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера [17] при отсутствии массовых сил и моментов. В цилиндрической системе координат $Or\vartheta z$ ($r \geq 0$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$, $z \geq 0$) с направленной вглубь полупространства осью Oz осесимметричное движение описывают следующие соотношения [15, 18]:

– уравнения относительно скалярного потенциала ϕ , ненулевой компоненты ψ векторного потенциала перемещений и угла поворота ω (точками обозначены производные по времени τ)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \Delta\phi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)\Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha)\frac{\psi}{r^2}, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}\Delta\omega - 2\alpha\beta\Delta\psi - 4\alpha\beta\omega - r^{-2}(\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\beta\psi), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

– связи касательного u и нормального w перемещений с потенциалами

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}; \quad (2)$$

– связи нетривиальных физических компонент тензоров напряжений $\sigma_{\xi\zeta}$ и моментных напряжений $\mu_{\xi\zeta}$ ($\{\xi, \zeta\} = r, \vartheta, z$) с перемещениями и углом поворота

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{r} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\ \sigma_{zr} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{r\vartheta} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \eta \frac{\omega}{r}, \quad \mu_{\vartheta r} = -\frac{\omega}{r} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \mu_{z\vartheta} = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \mu_{\vartheta z} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ второе и третье уравнения в (1) становятся независимыми, то есть поля перемещений и поворота не связаны между собой.

В соотношениях (1)–(3) использованы такие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в них и далее опущены):

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \\ \sigma'_{\xi\zeta} &= \frac{\sigma_{\xi\zeta}}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu'_{\xi\zeta} = \frac{L\mu_{\xi\zeta}}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \beta = \frac{\rho L^2}{J}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_3^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma_1^{-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь t – время; L – некоторый характерный линейный размер; λ, μ – упругие постоянные Ламе; $\alpha, \gamma, \varepsilon$ – физические параметры моментной среды; ρ – ее плотность; J – мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); c_1, c_2 и c_3 – скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

Считаем, что в начальный момент времени среда находится в покое:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Все искомые функции предполагаются ограниченными, на граничной плоскости заданы нормальные перемещения, а касательные перемещения и угол поворота равны нулю:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (6)$$

Искомые компоненты напряженно-деформированного состояния как решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5) и (6) записываем в виде сверток по времени τ и декартовым координатам x, y в плоскости $z = 0$ (свертки обозначены звездочками):

$$U_v(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) *** G_v. \quad (7)$$

Под функциями $U_v(r, z, \tau)$ понимаются кинематические параметры и компоненты напряженно-деформированного состояния $u, w, \omega, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{zr}, \mu_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta r}, \mu_{z\vartheta}$ или $\mu_{\vartheta z}$, а под $G_v(r, z, \tau)$ – соответствующие им поверхностные функции влияния:

$$G_u = u, \quad G_w = w, \quad G_\omega = \omega, \quad G_{zz} = \sigma_{zz}, \quad G_{rz} = \sigma_{rz},$$

$$G_{zr} = \sigma_{zr}, \quad G_{r\vartheta} = \mu_{r\vartheta}, \quad G_{\vartheta r} = \mu_{\vartheta r}, \quad G_{z\vartheta} = \mu_{z\vartheta}, \quad G_{\vartheta z} = \mu_{\vartheta z},$$

которые есть ограниченные решения уравнений (1) с начальными условиями (5) и следующими граничными условиями:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0, \quad (8)$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака [19].

Далее ограничимся определением только напряжений σ_{zz} и соответствующей функции влияния.

2. Изображения решения

К начально-краевой задаче (1)–(5) применяем преобразования Лапласа по времени τ и Ханкеля по радиусу r нулевого порядка для φ , w и первого порядка для ψ , u , ω (значки L и H указывают на соответствующие изображения; s и q – параметры этих преобразований). Соответствующие изображения соотношений (1)–(3) приведены в [15, 18]. Там же показано, что для перемещений и нормального напряжения имеют место равенства:

$$u^{HL}(q, z, s) = -qC_0(q, s)E_0(q, z, s) + \sum_{l=1}^2 k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s),$$

$$w^{HL}(q, z, s) = -k_0(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) + q \sum_{l=1}^2 C_l(q, s)E_l(q, z, s), \quad (9)$$

$$\omega^{HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s);$$

$$\gamma_1^2 \sigma_{zz}^{HL}(q, z, s) = k_3^2(q, s)C_0(q, s)E_0(q, z, s) -$$

$$- 2q \sum_{l=1}^2 k_l(q, s)C_l(q, s)E_l(q, z, s), \quad k_3^2(q, s) = 2q^2 + \gamma_1^2 s^2, \quad (10)$$

$$E_j(q, z, s) = \exp(-k_j(q, s)z), \quad T_l(q, s) = (\gamma_1^{-2} + \alpha)[q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2.$$

Здесь C_j – постоянные интегрирования; $k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + s^2}$, а $k_{1,2}(q, s)$ – корни биквадратного уравнения, причем $\text{Re } k_j(q, s) > 0$.

Изображения граничных условий (8) записываются так:

$$u^{HL}|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}|_{z=0} = 0.$$

Подстановка сюда равенств (9) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$C_0(q, s) = -\frac{K_1(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad C_1(q, s) = -\frac{qT_2(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad C_2(q, s) = \frac{qT_1(q, s)}{2\pi R_1(q, s)}, \quad (11)$$

где

$$R_1(q, s) = q^2 R(q, s) + k_0(q, s)K_1(q, s),$$

$$R(q, s) = T_1(q, s) - T_2(q, s), \quad K_1(q, s) = k_1(q, s)T_2(q, s) - k_2(q, s)T_1(q, s).$$

Далее аналогично [15, 16, 18] используем разложения в степенные ряды по малому параметру α . Соответствующие равенства для $k_{1,2}(q, s)$ таковы:

$$\begin{aligned} k_l(q, s) &= k_{0l}(q, s) + \alpha k_{1l}(q, s) \quad (l=1, 2), \quad k_{0l}(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2}, \quad \gamma_0 = 1, \\ k_{11}(q, s) &= -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q, s)}, \quad k_{12}(q, s) = \frac{2\beta\gamma_2^2}{k_{02}(q, s)}, \quad T_1(q, s) = T_{12}(q, s)\alpha^2, \\ T_2(q, s) &= T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s), \quad T_{12}(q, s) = -\frac{4\beta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \\ T_{20}(q, s) &= \gamma_1^{-2}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)s^2, \quad T_{21} = -\gamma_1^{-2}\gamma_2^2(4\beta + \gamma_1^2 s^2). \end{aligned}$$

Представляя аналогично постоянные в (11), с помощью (10) находим изображение искомой функции влияния:

$$G_{zz}^{HL}(q, z, s) = G_{zz0}^{HL}(q, z, s) + \alpha G_{zz1}^{HL}(q, z, s), \quad G_{zzm}^{HL}(q, z, s) = \sum_{j=0}^1 G_{zzjm}^{HL}(q, z, s), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G_{zz00}^{HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^{-2} k_{01}(q, s) k_3^2(q, s)}{2\pi R_I(q, s)} \exp(-k_0(q, s)z), \\ G_{zz01}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^2 s^2 q^2 k_3^2(q, s) \exp(-k_0(q, s)z)}{4\pi k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)}, \\ G_{zz10}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^{-2} q^2 k_{01}(q, s) \exp(-k_{01}(q, s)z)}{\pi R_I(q, s)}, \\ G_{zz11}^{HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^2 s^2 q^2}{2\pi R_I(q, s)} \left[\frac{q^2}{k_{01}(q, s) R_I(q, s)} - z \right] \exp(-k_{01}(q, s)z), \\ R_I(q, s) &= q^2 - k_0(q, s) k_{01}(q, s). \end{aligned}$$

3. Определение оригиналов

Наиболее просто оригиналы находятся для поверхности полупространства. Соответствующие изображения, согласно (12), имеют вид:

$$G_{0zzm}^{HL}(q, s) = \sum_{j=0}^1 G_{zzjm}^{HL}(q, 0, s) = s^2 G_{33m}^{HL}(q, s), \quad G_{33m}^{HL}(q, s) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_{33m}^{FL}(q, s). \quad (13)$$

Здесь

$$\Gamma_{330}^{FL}(q, s) = \frac{k_{01}(q, s)}{R_I(q, s)}, \quad \Gamma_{331}^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{2k_{01}(q, s) R_I^2(q, s)}.$$

Отметим, что знание оригиналов функций $G_{330}^{HL}(q, s)$ и $G_{331}^{HL}(q, s)$ в соответствии с (7), (12) и (13) при учете свойств преобразования Лапласа и свертки позволяет записать нормальное напряжение так:

$$\sigma_{zz}(r, 0, \tau) = \ddot{w}_0(r, \tau) *** G_{33}(r, \tau), \quad G_{33}(r, \tau) = G_{330}(r, \tau) + \alpha G_{331}(r, \tau). \quad (14)$$

Далее используем тот факт, что, как следует из [16], Γ_{33m}^{FL} являются изображениями Фурье по декартовой координате x (им соответствует верхний индекс F) и Лапласа составляющих решений плоской задачи для упругой моментной полуплоскости. Их оригиналы имеют следующий вид ($H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда):

$$\Gamma_{33m}(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 \Gamma_{33mj}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|) \quad (m = 0, 1).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_{3300}(x, \tau) &= \frac{(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2) \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)}, & \Gamma_{3301}(x, \tau) &= \frac{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)}, \\ \Gamma_{3310}(x, \tau) &= \frac{\gamma_1^4 \tau^4 \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 (\tau^2 - v_1^2 x^2)^2}, \\ \Gamma_{3311}(x, \tau) &= \frac{\gamma_1^4 \tau^2 [\tau^4 + (\tau^2 - x^2)(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)]}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} (\tau^2 - v_1^2 x^2)^2}, & v_1 &= \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} < 1. \end{aligned}$$

Последние равенства в (13) позволяют найти оригинал функции $G_{33m}^{HL}(q, s)$ с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля [19, 20]. При этом учитываем, что функции $\Gamma_{33m}(x, \tau)$ – четные функции по x и для них использовалось преобразование Ханкеля нулевого порядка. В результате получаем

$$\begin{aligned} G_{33mj}(r, \tau) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty x (x^2 - r^2)_+^{-3/2} \Gamma_{33mj}(x, \tau) dx = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{mj}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r), \\ I_{mj}(r, \tau) &= \int_r^{\tau/\gamma_j} \frac{x \Gamma_{33mj}(x, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Интегралы $I_{mj}(r, \tau)$ с помощью замены переменной интегрирования приводят к следующему виду (они понимаются в смысле регуляризованных значений):

$$\begin{aligned} I_{00}(r, \tau) &= -\frac{1}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_0^2} \frac{(\gamma_1^2 y - \tau^2) \sqrt{\tau^2 - y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)} dy, \\ I_{01}(r, \tau) &= \frac{\tau^2}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_1^2} \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)} dy, \\ I_{10}(r, \tau) &= \frac{\gamma_1^4 \tau^4}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_0^2} \frac{\sqrt{\tau^2 - y}}{y(y - r^2)^{3/2} (\tau^2 - v_1^2 y)^2} dy, \\ I_{11}(r, \tau) &= \frac{\gamma_1^4 \tau^2}{4\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \int_{r^2}^{\tau^2/\gamma_1^2} \frac{\tau^4 + (\tau^2 - y)(\tau^2 - \gamma_1^2 y)}{y(y - r^2)^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 y} (\tau^2 - v_1^2 y)^2} dy. \end{aligned}$$

Вычисляя их с помощью разложения рациональных частей подынтегральной функции на элементарные дроби и табличных интегралов [21, 22], окончательно получаем

$$G_{330}(r, \tau) = \frac{\tau}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \left[\frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) - \frac{\gamma_1 v_1^3}{(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{3/2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^j H(\tau - \gamma_j r) \right],$$

$$G_{331}(r, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau}{2\pi(1+\gamma_1^2)^2} \left[\frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) + \frac{v_1^5}{(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{5/2}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=0}^1 (a_{1j} \tau^2 + b_{1j} r^2) H(\tau - \gamma_j r) \right], \quad (15)$$

где

$$a_{10} = \frac{(1+2\gamma_1^2)(2-\gamma_1^4+\gamma_1^2)}{2\gamma_1^5}, \quad b_{10} = \frac{(1+2\gamma_1^2)(\gamma_1^2-1)}{2\gamma_1^3}, \\ a_{11} = \frac{\gamma_1^8 - (\gamma_1^6 + 3\gamma_1^4 + 2\gamma_1^2 + 1)}{2\gamma_1^7}, \quad b_{11} = \frac{1-\gamma_1^6}{2\gamma_1^5}.$$

4. Примеры расчетов функции влияния

Полагаем, что материалом, заполняющим полупространство, является зернистый композит, состоящий из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [8]:

$$\lambda = 7,59 \text{ ГПа}, \mu = 1,89 \text{ ГПа}, \alpha = 7,45 \text{ МПа}, \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}, J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м.}$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1$ м. При этом безразмерные параметры в (4) таковы:

$$\gamma_1 = 2,45; \gamma_2 = 0,92; \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \beta = 5,1 \cdot 10^6; v_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}} = 0,962.$$

На рис. 1 и 2 представлены построенные с помощью (15) зависимости функций влияния $G_{330}(r, \tau)$ и $G_{331}(r, \tau)$ от времени τ при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует $r = 0,1$, штриховая – $r = 0,15$, а штрихпунктирная $r = 0,2$.

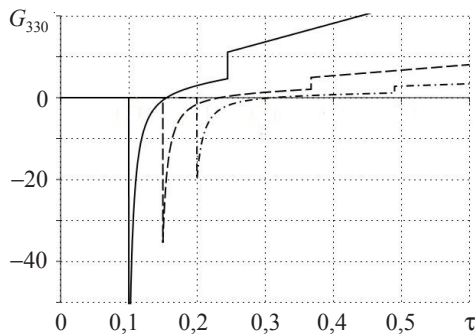


Рис. 1

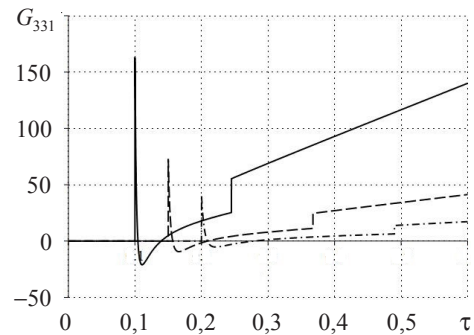


Рис. 2

На рис. 3 и 4 изображены зависимости тех же функций от радиуса r при различных значениях времени: сплошная кривая соответствует $\tau = 0,2$, штриховая – $\tau = 0,4$, а штрихпунктирная – $\tau = 0,6$.

Графики показывают, что для рассматриваемого материала влияние моментных свойств среды в количественном отношении незначительно. Однако учет моментных напряжений приводит к качественным изменениям. А именно, наблюдается распространяющийся со скоростью v_1^{-1} дополнительный волновой фронт.

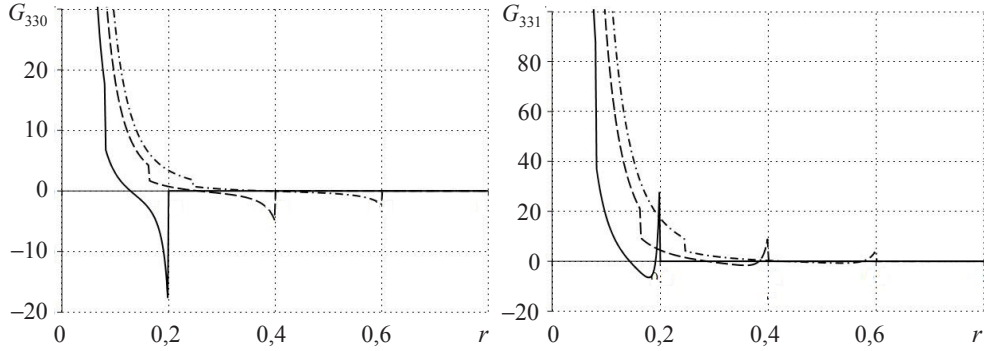


Рис. 3

Рис. 4

5. Примеры действия нормальных перемещений

В качестве первого примера рассмотрим действие на границе полупространства сосредоточенного в начале координат возмущения вида $w_0(r, \tau) = \tau_+^2 \delta(x, y)/2$. Учитывая, что при этом $\dot{w}_0(r, \tau) = H(\tau)\delta(x, y)$, из формулы (14) получаем

$$\sigma_{zz}(r, 0, \tau) = \sigma_{zz0}(r, 0, \tau) + \alpha \sigma_{zz1}(r, 0, \tau). \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{zz0}(r, 0, \tau) = H(\tau) * G_{330}(r, \tau) = & \frac{1}{4\pi(1+\gamma_1^2)} \left\{ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 (\tau^2 - \gamma_j^2 r^2)_+ - \right. \\ & \left. - 2\gamma_1 v_1^3 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \left[\frac{1}{r\sqrt{\gamma_j^2 - v_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - v_1^2 r^2}} \right] H(\tau - \gamma_j r) \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz1}(r, 0, \tau) = H(\tau) * G_{331}(r, \tau) = & \frac{\gamma_1^4}{4\pi(1+\gamma_1^2)^2} \left\{ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 (\tau^2 - \gamma_j^2 r^2)_+ - \right. \\ & \left. - 2v_1^5 \sum_{j=0}^1 \left[\frac{a_{1j}}{\sqrt{\tau^2 - v_1^2 r^2}} + \frac{(b_{1j} + a_{1j} v_1^2) r^2}{3(\tau^2 - v_1^2 r^2)^{3/2}} - \frac{b_{1j} + 3a_{1j} \gamma_j^2 - 2a_{1j} v_1^2}{3r(\gamma_j^2 - v_1^2)^{3/2}} \right] H(\tau - \gamma_j r) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

При проведении расчетов полагалось, что материал полупространства имеет указанные в п. 4 характеристики. На рис. 5 и 6 представлены построенные с помощью формул (17) и (18) зависимости нормальных напряжений $\sigma_{zz0}(r, \tau)$ и $\sigma_{zz1}(r, \tau)$ от времени τ при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует $r = 0,1$, штриховая – $r = 0,15$, а штрихпунктирная – $r = 0,2$.

Второй вариант возмущения – распределенное по радиусу r перемещение вида

$$w_0(r, \tau) = \tau_+ f_0(r) H(a - r),$$

где

$$f_0(r) = (a^2 - r^2)^2, \quad a > 0.$$

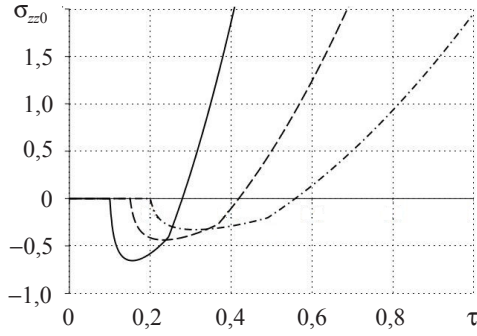


Рис. 5

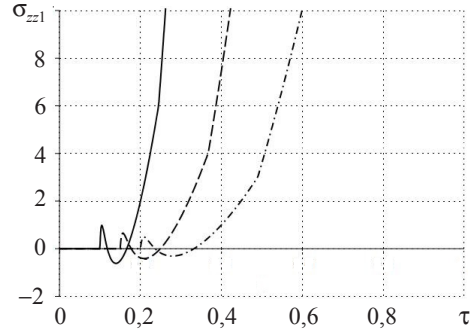


Рис. 6

Учитывая, что в этом случае

$$\ddot{w}_0(r, \tau) = f(r)\delta(\tau), \quad f(r) = H(a-r)f_0(r),$$

приходим к равенству (16); входящие в него функции с использованием формулы для вычисления свертки зависящих от радиуса функций определяются так [19]:

$$\sigma_{zzm}(r, 0, \tau) = f(r) ** G_{33m}(r, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \rho G_{33m}(\rho, \tau) J(r, \rho) d\rho \quad (m = 0, 1),$$

где

$$J(r, \rho) = \int_{-1}^1 \frac{f_0[R(r, \rho, z)]}{\sqrt{1-z^2}} H[a - R(r, \rho, z)] dz, \quad (19)$$

$$R(r, \rho, z) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho z}, \quad b(r, \rho) = \frac{r^2 + \rho^2 - a^2}{2r\rho}.$$

Анализ подынтегральной функции в (19) показывает, что имеет место равенство

$$J(r, \rho) = H(a-r)[H(a-r-\rho)J_1(r, \rho) + H(r-|\rho-a|)J_2(r, \rho)] + \\ + H(r-a)H(a-|\rho-r|)J_2(r, \rho),$$

где

$$J_1(r, \rho) = I(r, \rho; -1), \quad J_2(r, \rho) = I[(r, \rho; b(r, \rho))],$$

$$I(r, \rho; z) = \int_z^1 \frac{f_0[R(r, \rho, z)]}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

Вычисляя интеграл $I(r, \rho; z)$ [21, 22], получаем:

$$J_2(r, \rho) = B(r, \rho) \arccos b(r, \rho) - \frac{3}{2} B_0(r, \rho) \sqrt{B_-(r, \rho) B_+(r, \rho)},$$

$$J_1(r, \rho) = \pi B(r, \rho), \quad B_{\pm}(r, \rho) = \pm[\rho^2 - (r \mp a)^2].$$

$$B(r, \rho) = (r^2 + \rho^2 - a^2)^2 + 2r^2\rho^2, \quad B_0(r, \rho) = r^2 + \rho^2 - a^2.$$

Окончательно приходим к формуле для напряжений:

$$\frac{1}{2}\sigma_{zzm}(r,0,\tau) = H(r-a) \int_{r-a}^{a+r} \rho G_{33m}(\rho,\tau) J_2(r,\rho) d\rho + \\ + H(a-r) \left[\int_0^{a-r} \rho G_{33m}(\rho,\tau) J_1(r,\rho) d\rho + \int_{a-r}^{a+r} \rho G_{33m}(\rho,\tau) J_2(r,\rho) d\rho \right].$$

Входящие сюда интегралы находятся численно в среде Maple. Результаты расчетов зависимости функции нормальных напряжений $\sigma_{zz0}(r, \tau)$ и $\sigma_{zz1}(r, \tau)$ от радиуса r при $a=0,5$ для различных значений времени τ (сплошная кривая соответствует $\tau = 0,2$, штриховая – $\tau = 0,4$, а штрихпунктирная – $\tau = 0,6$) представлены на рис. 7 и 8.

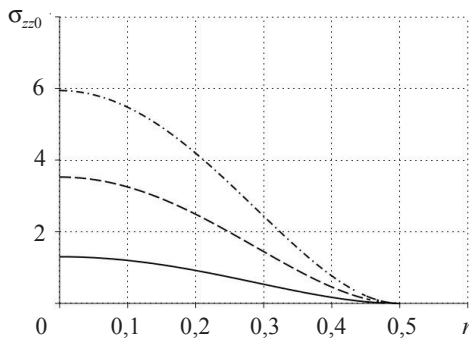


Рис. 7

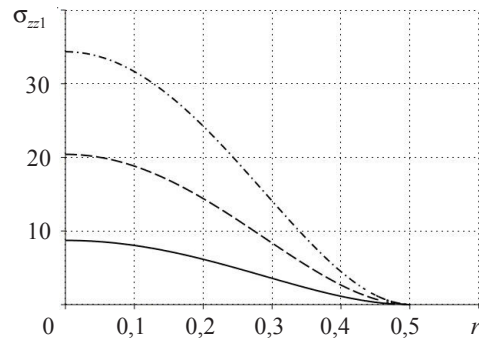


Рис. 8

Заключение

Построено аналитическое решение нестационарной задачи о распространении осесимметричных поверхностных возмущений смешанного типа в полупространстве, заполненном средой Коссера. Показано, что влияние моментных свойств среды существенно зависит от величины параметра, характеризующего связь упругих перемещений и вращательных движений. При этом учет моментных напряжений приводит к качественным изменениям. А именно, наблюдается распространяющийся со скоростью v_1^{-1} дополнительный волновой фронт.

Список литературы

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения. *ФТТ*. 1964. Т. 6. №9. С. 2689–2699.
3. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. *Механика: Сб. пер.* М.: Мир, 1964. № 4. С. 115–128.
4. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. *ПММ*. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
5. Nowacki W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Ser. Technical Sciences*. 1966. Vol. 14. P. 505–512.
6. Кунин И.А. *Теория упругих сред с микроструктурой*. М.: Наука, 1975. 416 с.
7. Nikitin E., Zubov L.M. Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress. *Journal of Elasticity*. 1998. Vol. 51. No 1. P. 1–22.
8. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
9. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н., Улитин М.В. Анализ волнового реше-

ния уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн. *ПМТФ*. 2008. № 2. С. 196–203.

10. Khurana A., Tomar S.K. Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces. *International Journal of Solids and Structures*. 2009. No 46. P. 135–150.

11. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Finite element analysis of two- and three-dimensional static problems in the asymmetric theory of elasticity as a basis for the design of experiments. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. No 8. P. 1739–1750.

12. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *РЭНСИТ*. 2013. Т. 5. №1. С. 119–125.

13. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела. *Изв. РАН. МТТ*. 2014. №1. С. 95–107.

14. Емельянов А.Н. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости. *Вестник МГУ. Сер. I*. 2015. №1. С. 40–45.

15. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2017. Т. 159. Кн. 2. С. 231–245.

16. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений. *Труды МАИ*. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731> (Дата обращения: 25.10.2018).

17. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.

18. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Осесимметричная задача Лэмба для среды Коссера. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>.

19. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.

20. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. *Динамические контактные задачи с подвижными границами*. М.: Физматлит, 1995. 352 с.

21. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Наука, 1971. 1108 с.

22. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции*. М.: Физматлит, 2002. 632 с.

References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 226 p.

2. Aero E.L., Kuvshinskiy E.V. Kontinualnaya teoriya asimmetrichnoy uprugosti. Uchet vnutrennego vrashcheniya [Continual theory of asymmetric elasticity. Accounting for internal rotation]. *Fizika tverdogo tela [Soviet Physics. Solid State]*. 1964. Vol. 6. No 9. P. 2689–2699 (In Russian).

3. Mindlin R.D. Influence of couple-stresses on stress concentration. *Experimental Mechanics*. 1963. Vol. 3. Iss. 1. P. 1–7.

4. Palmov V.A. Osnovnye uravneniya teorii nesimmetrichnoy uprugosti [Basic equations of the theory of asymmetric elasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech]*. 1964. Vol. 28. Iss. 3. P. 401–408 (In Russian).

5. Nowacki W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity. *Bull. Polish Acad. Sci. Series Techn. Sc.* 1966. Vol. 14. P. 505–512.

6. Kunin I.A. *Teoriya uprugikh sred s mikrostrukturoy [The Theory of Elastic Media with Microstructure]*. Moscow. Nauka Publ. 1975. 416 p. (In Russian).

7. Nikitin E., Zubov L.M. Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress. *J. Elasticity*. 1998. Vol. 51. No 1. P. 1–22.

8. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy [Wave Processes in Solids with Microstructure]*. Moscow. MGU Publ. 1999. 328 p. (In Russian).

9. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N., Ulitin M.V. Analysis of the wave solution of

the elastokinetic equations of a Cosserat continuum for the case of bulk plane waves. *J. Appl. Mech. Tech. Physics*. 2008. Vol. 49. Iss. 2. P. 323–329.

10. Khurana A., Tomar S.K. Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces. *Int. J. Solids Struct.* 2009. No 46. P. 135–150.

11. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Finite element analysis of two- and three-dimensional static problems in the asymmetric theory of elasticity as a basis for the design of experiments. *Acta Mech.* 2012. Vol. 223. No 8. P. 1739–1750.

12. Lay Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D.V. Difraktsiya nestatsionarnykh voln na sfericheskoy polosti v psevdokontinuumе Kossera [Diffraction of waves by a spherical cavity in a Cosserat pseudo-continuum]. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii [Radio Electronics. Nanosystems. Information Technology]*. 2013. Vol. 5. No 1. P. 119–125 (In Russian).

13. Gorbachev V.I., Emel'yanov A.N. Homogenization of the equations of the Cosserat theory of elasticity of inhomogeneous bodies. *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49. Iss. 1. P. 73–82.

14. Emel'yanov A.N. Effective material functions of layered composites in the linear moment theory of elasticity. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2015. Vol. 70. No 1. P. 8–12.

15. Tran Le Thai, Tarlakovskii D.V. Nestatsionarnoe osesimmetrichnoe dvizhenie uprugogo momentnogo poluprostranstva pod deystviem nestatsionarnykh normal'nykh poverkhnostnykh peremeshcheniy [Nonstationary axisymmetric motion of an elastic momentum semi-space under non-stationary normal surface movements]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2017. Vol. 159. No 2. P. 231–245 (In Russian).

16. Tran Le Thai, Tarlakovskii D.V. Momentno uprugaya poluploskost pod deystviem poverkhnostnykh nestatsionarnykh normal'nykh peremeshcheniy [Moment elastic half-plane under the action of surface non-stationary normal displacements]. *Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Trudy MAI]*. 2018. No 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>. (Accessed 25 October 2018) (In Russian).

17. Nowacki W. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Mir Publ. 1975. 872 p. (In Russian).

18. Tran Le Thai, Tarlakovskii D.V. Osesimmetrichnaya zadacha Lemba dlya sredy Kossera [Axisymmetric problem Lemba for the Cosserat medium]. *Izvestiya Saratovskogo unstituta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika [Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics.]*. 2018. Vol. 18. Iss. 4. P. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506> (In Russian).

19. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuous Media]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

20. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami [Dynamic Contact Problems with Moving Boundaries]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 1995. 352 p. (In Russian).

21. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]*. Moscow. Nauka Publ. 1971. 1108 p. (In Russian).

22. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii [Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 632 p. (In Russian).

ELASTIC MOMENT HALF-SPACE UNDER THE ACTION OF AXISYMMETRIC NON-STATIONARY SURFACE KINEMATIC PERTURBATIONS

Tran Le Thai¹, Tarlakovskii D.V.^{1,2}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

The article deals with elastic homogeneous isotropic half-space filled with the Cosserat medium. A cylindrical coordinate system is used. A closed system of equations includes equations for the non-

trivial components of the displacement and rotation potentials, as well as relations relating the displacements to the potentials and components of the stress and moment stress tensors with displacements and the angle of rotation. On the boundary plane, normal displacements are specified, and the angle of rotation and tangential displacements are absent. Initial conditions are zero. All components of the stress-strain state are assumed to be limited. A system of dimensionless quantities is used.

The solution is represented as a convolution with respect to time and a generalized convolution with respect to the radius of surface perturbations with influence functions. To construct them, Hankel transforms are applied along the radius and Laplace in time, as well as expansion in power series in a small parameter in the linear approximation. Found image of all surface influence functions. For example, the following function is considered corresponding to the normal voltage. Its original is on the border of a half-space using the connection of axisymmetric and plane problems, namely, taking into account the proportionality of the Hankel and Fourier images respectively. It uses the previously constructed solution of the planar problem. As a result, the desired function is represented as integrals, which are understood in the sense of regularized values. Analytic expressions for these integrals and the influence function itself are found.

Examples of calculations of the influence functions of a granular composite of aluminum shot in an epoxy matrix are given. Two variants of action on the half-space of surface normal displacements are also considered: the disturbance concentrated at the origin and distributed in a circle. Analysis of the results shows that the effect of the moment properties of the medium depends significantly on the value of the parameter characterizing the relationship of elastic displacements and rotational motions. For the material in question in quantitative terms it is not great. However, consideration of moment stress leads to qualitative changes. Namely, there is an additional wave front.

Keywords: Cosserat medium, superficial influence function, the small parameter method, Laplace and Hankel transforms, connection of plane and axisymmetric problems.