

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-30-39

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРА ИЗ МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ И РАЗДУВАНИИ

© 2019 г.

Карякин М.И., Обрезков Л.П.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

karyakin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 26.11.2018

В рамках трехмерной нелинейной теории упругости рассмотрена задача о равновесии и устойчивости полого цилиндра, подверженного одновременному одноосному растяжению/сжатию и раздуванию/обжатию. Для описания механических свойств материала цилиндра использована пятиконстантная модель Мурнагана. Посредством полуобратного метода трехмерная задача сведена к исследованию нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для большинства известных в литературе наборов значений материальных параметров указанной модели численно установлено наличие падающего участка на диаграмме растяжения/раздувания, означающего возможное существование зон неустойчивости даже в области растягивающих напряжений. Анализ устойчивости проводился с применением бифуркационного подхода, основанного на линеаризации уравнений равновесия в окрестности построенного решения с использованием метода наложения малой деформации на конечную деформацию. Значение той или иной деформационной характеристики, при котором существовали нетривиальные решения однородной краевой задачи для получаемых в процессе линеаризации уравнений нейтрального равновесия, отождествлялось с критическим значением параметра нагружения, то есть значением, при котором система теряет устойчивость. В качестве таких параметров выбирались, как правило, коэффициент растяжения/укорочения цилиндра и коэффициент увеличения/уменьшения его внутреннего или внешнего радиуса. На плоскости упомянутых выше характеристик деформации построены области устойчивости при растяжении и сжатии, а также при сжатии внешним и раздувании внутренним давлением. Построены формы возможной потери устойчивости в зависимости от вида напряженного состояния, а также изучено влияние на устойчивость материальных и геометрических параметров.

Ключевые слова: материал Мурнагана, устойчивость, бифуркация, нелинейная упругость, полуобратный метод.

Введение

Несмотря на довольно долгую историю существования, задачи устойчивости упругих тел по-прежнему продолжают привлекать внимание исследователей. Это связано как с появившейся в последние годы возможностью использовать аппарат нелинейной теории упругости для анализа поведения трехмерных тел, так и с ре-

шением актуальных задач исследования материальной неустойчивости и использования его результатов для анализа применимости тех или иных математических моделей упругого поведения конструкционных или биологических материалов.

Рассмотрена потеря устойчивости круговым полым цилиндром при его одновременном растяжении и раздувании внутренним давлением. Изучению напряженно-деформированного состояния такого тела посвящены, в частности, публикации [1, 2], где данная задача рассмотрена в рамках теории упругости для несжимаемых сред. В настоящей статье анализ проведен без привлечения дополнительных гипотез; для описания свойств сжимаемой нелинейно-упругой среды использована пятиконстантная модель Мурнагана [3].

Такая модель активно используется при исследовании эффектов второго порядка при деформировании упругих тел в рамках теории конечных деформаций [4], для описания поведения металлов, сплавов, а также кристаллических твердых тел в области сверхвысоких давлений и зарождения пластической деформации [5], при моделировании механических экспериментов по определению свойств конструкционных материалов, работающих в области конечных деформаций [6], для учета начальных напряжений в упругих волноводах [7], для описания нелинейно-упругих свойств среды с макро- и микровключениями [8], при анализе геофизических явлений [9, 10]. Ряд вопросов использования модели Мурнагана в современных конечно-элементных пакетах обсуждается в [11]. Большая таблица значений параметров модели, полученных на основе акустических испытаний, приведена в [12]. Следует отметить, однако, что степень точности определения указанных параметров не известна; интервалы деформаций, в рамках которых эти параметры адекватно описывают поведение материала, не определены достаточно надежно [13].

1. Общие соотношения

Опишем деформацию осевого растяжения и раздувания полого кругового цилиндра высотой h с внутренним и внешним радиусами r_0 и r_1 полуобратным представлением вида:

$$R = P(r), \quad \Phi = \phi, \quad Z = \eta z, \quad (1)$$

где r , ϕ , z и R , Φ , Z – цилиндрические координаты соответственно в отсчетной и текущей конфигурациях, η – коэффициент удлинения цилиндра, $P(r)$ – функция, описывающая изменение радиальной координаты точки цилиндра. Будем предполагать, что цилиндр деформируется в жестком нагружающем устройстве [14, 15], что соответствует отсутствию касательных напряжений на торцах цилиндра. Случай $\eta < 1$ соответствует сжатию, $\eta > 1$ – растяжению цилиндра.

Материал цилиндра будем считать гиперупругим; его свойства описываются функцией удельной потенциальной энергии деформации W , которая в изотропном случае зависит только от трех аргументов – главных инвариантов меры деформации Коши \mathbf{G} . Для используемой модели материала Мурнагана эта функция записывается в виде:

$$W = \frac{1}{4} \left[W_1 I_1 + W_2 I_1^2 + W_3 I_2 - m I_1 I_2 + W_4 I_1^3 + \frac{n}{2} (I_3 - 1) \right],$$

$$W_1 = -3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}, \quad W_2 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m),$$

$$W_3 = -2\mu + 3m - \frac{n}{2}, \quad W_4 = \frac{1}{6}(l + 2m),$$

где $I_k = I_k(\mathbf{G})$, $k = 1, 2, 3$, – главные инварианты меры деформации; $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$, \mathbf{C} – градиент деформации, выражение для которого с учетом (1) имеет вид

$$\mathbf{C} = P' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{P}{r} \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\Phi + \eta \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z. \quad (2)$$

В (2) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ – базисные векторы цилиндрических координат соответственно в отсчетной и актуальной конфигурациях; штрихом обозначено дифференцирование по переменной r .

Материальные параметры λ, μ при малых деформациях имеют смысл постоянных Ламе линейно-упругого тела; l, m, n – постоянные Мурнагана. В ряде работ вместо них используются другие три параметра – ν_1, ν_2, ν_3 , называемые постоянными Ламе 3-го порядка:

$$l = \frac{1}{2} \nu_1 + \nu_2, \quad m = \nu_2 + 2\nu_3, \quad n = 4\nu_3.$$

Экспериментальные данные о значениях этих параметров получают, как правило, на основе исследований, связанных с задачами нелинейной акустики, или по результатам статических испытаний при высоких давлениях [12].

Для описания напряженного состояния цилиндра будем использовать тензор напряжений Пиолы \mathbf{D} , определяющее соотношение для которого имеет вид $\mathbf{D} = \partial W / \partial \mathbf{C}$, а уравнения равновесия записываются в области, занимаемой телом в отсчетной конфигурации:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1), (2) уравнения (3) сводятся к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $P(r)$. Это уравнение достаточно громоздко и здесь не приводится. Граничными условиями для уравнения (3) служат либо условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности цилиндра

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4)$$

либо условие равенства этой нагрузки раздувающему давлению p :

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = -p(\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{e}_r. \quad (5)$$

Что касается граничных условий на торцах, то часть из них, обеспечивающих условие скользящей заделки

$$D_{zR} = 0, \quad D_{z\Phi} = 0, \quad (6)$$

выполняется точно, а условие на продольные напряжения – в интегральном смысле, что гарантирует необходимую величину растягивающей силы и служит для определения связи между этой силой и коэффициентом удлинения η .

Анализ устойчивости построенных решений осуществляется в рамках бифуркационного подхода на основе анализа уравнений нейтрального равновесия [16–18], которые выводятся следующим образом: к соотношению (1) добавляется малое возмущение, после чего оно примет вид

$$R = P(r) + \varepsilon u(r, \phi, z), \quad \Phi = \phi + \varepsilon v(r, \phi, z), \quad Z = \eta z + \varepsilon w(r, \phi, z). \quad (7)$$

Здесь ε – формальный малый параметр. Вычисляя градиент деформации для (7) и линеаризуя его по формуле

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{C} \Big|_{\varepsilon=0},$$

последовательно находим выражения для линеаризованной меры деформации Коши $\dot{\mathbf{G}}$, ее инвариантов, а затем и линеаризованного тензора напряжений Пиолы $\dot{\mathbf{D}}$. Итогом этого процесса является линейная однородная краевая задача для системы дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (8)$$

с соответствующими однородными краевыми условиями для функций $u(r, \phi, z)$, $v(r, \phi, z)$, $w(r, \phi, z)$. Анализ полученной системы проводится методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} u(r, \phi, z) &= U(r) \cos \frac{z\pi m_1}{h} \cos n_1 \phi, \\ v(r, \phi, z) &= V(r) \cos \frac{z\pi m_1}{h} \sin n_1 \phi, \\ w(r, \phi, z) &= W(r) \sin \frac{z\pi m_1}{h} \cos n_1 \phi. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) m_1 и n_1 – натуральные числа, называемые номерами мод потери устойчивости. При таком разделении автоматически выполняются граничные условия (6) и отсутствуют дополнительные вертикальные перемещения на торцах цилиндра. Предметом анализа становится линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$: существование ее нетривиальных решений при достижении параметрами нагружения некоторых критических значений отождествляется с потерей устойчивости.

2. Одноосное растяжение цилиндра

Рассмотрим частный случай деформации, описанной в п. 1, а именно осевое растяжение без внутреннего давления, то есть граничное условие (4) применимо и к внутренней, и к внешней боковым поверхностям цилиндра. При такой постановке задачи функция $P(r)$ может быть найдена в явном виде:

$$\begin{aligned} P(r) &= P_1(\eta)r, \\ P_1(\eta) &= \sqrt{\frac{m\eta^2 - n - 12l + 4(\lambda + \mu + l\eta^2) - 2m(1 + \eta^2) + A_1}{-4(2l + m)}}, \\ A_1 &= \sqrt{B_1 + B_2 + B_3}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_1 = 4m^2 - 8m^2\eta^2 + n^2\eta^4 - 2n^2\eta^2 + n^2 + 8n(l - \lambda - \mu) - 4mn - 32l\mu - 24lm,$$

$$B_2 = 16(\lambda^2 + \mu^2) + 32\lambda(\mu + m) + 16m\mu + 4m^2\eta^4 - 4nm\eta^4 - 24lm\eta^4 - 16nl\eta^4,$$

$$B_3 = 8n(\lambda + \mu + m)\eta^4 + 48lm\eta^2 - 32m\eta^2(\lambda + \mu) - 16m\mu\eta^2.$$

Формы потери устойчивости в данной задаче будем полагать осесимметричными, тогда выражения (7) примут следующий вид:

$$R = P(r) + \varepsilon u(r, z), \quad \Phi = \phi, \quad Z = \eta z + \varepsilon w(r, z), \quad (11)$$

а выражения (9) запишутся в форме:

$$u(r, z) = U(r) \cos \frac{z\pi m}{h}, \quad w(r, z) = W(r) \sin \frac{z\pi m}{h}. \quad (12)$$

Как показали численные расчеты, наименьшее значение параметра η , при котором происходит потеря устойчивости конструкции, при одноосном растяжении всегда соответствует первой моде, то есть случаю $m = 1$.

В качестве примера рассмотрим два набора материальных констант из [12], соответствующих таким материалам, как сталь Rех535:

$$\lambda = 1,09, \quad \mu = 0,818, \quad \nu_1 = -1,75, \quad \nu_2 = -2,4, \quad \nu_3 = -1,69$$

и медь:

$$\lambda = 1,07, \quad \mu = 0,477, \quad \nu_1 = -5,6, \quad \nu_2 = 1,72, \quad \nu_3 = -3,98.$$

На рис. 1 представлены диаграммы нагружения – графики зависимости безразмерной растягивающей осевой силы $Q = D_{zz}/\mu$ от коэффициента удлинения цилиндра с геометрическими характеристиками $r_0/r_1 = 0,75$, $h/r_1 = 10$ для этих материалов, а также расположение первой точки бифуркации на этих диаграммах. На рис. 1 обозначено: сплошные линии – для набора материальных параметров стали Rех 535, штриховые – для набора материальных параметров меди.

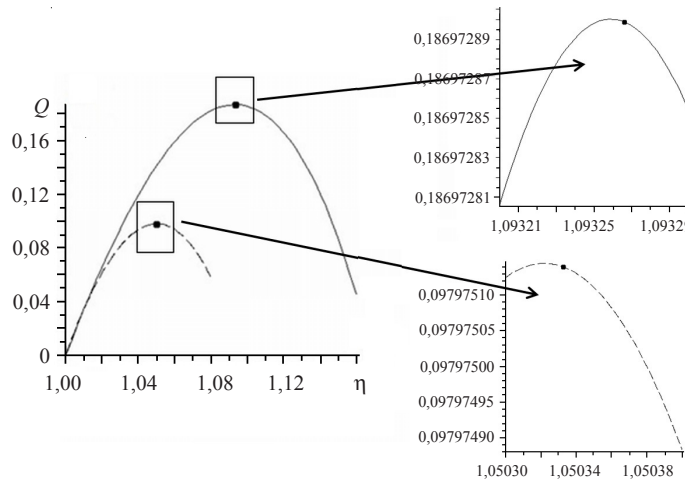


Рис.1. Точки бифуркации на диаграмме нагружения цилиндра

Видно, что точки потери устойчивости находятся за точками максимума на диаграмме нагружения. При увеличении длины соответствующих цилиндров бифуркационные значения будут асимптотически стремиться к точке максимума.

Цикл проведенных расчетов показал, что для большинства наборов материальных параметров модели Мурнагана характерно именно такое поведение, соответствующее теоретическим предсказаниям, сформулированным в [19], и численным результатам, полученным для модели материала Блейтца и Ко [16]. Особняком в этом ряду стоит модель, параметры которой соответствуют оргстеклу [12]:

$$\lambda = 0,39, \quad \mu = 0,186, \quad \nu_1 = -0,078, \quad \nu_2 = -0,07, \quad \nu_3 = 0,047.$$

Диаграмма нагружения при таких значениях параметров приведена на рис. 2.

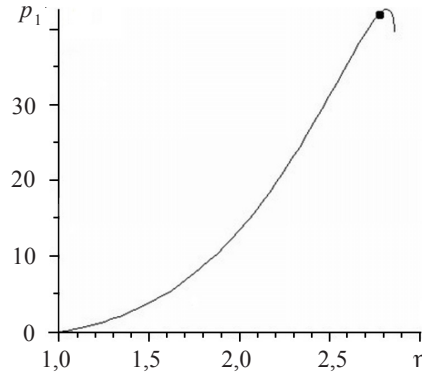


Рис. 2. Диаграмма нагружения для набора материальных параметров оргстекла

В этом случае точка потери устойчивости (точка на кривой) находится перед точкой максимума на возрастающем участке диаграммы нагружения. Этот факт может показаться нарушением теоремы Спектора [14], однако более тщательный анализ показал, что, несмотря на выполнение основного условия теоремы – монотонной зависимости осевой силы от удлинения, для выбранного набора материальных параметров в зоне больших деформаций нарушается дополнительное условие, а именно третье неравенство Бэйкера – Эриксона. Представим его здесь, сохраняя обозначения, введенные в [14]:

$$BE_3 = \psi_1 + \psi_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) > 0, \quad \forall \lambda_3 \in [1, \Lambda],$$

здесь $\psi_i = \partial W / \partial I_i$, λ_i – собственные значения тензора $\mathbf{G}^{1/2}$, в частности $\lambda_3 = \eta$, а Λ – значение η , при котором диаграмма нагружения имеет максимум. Для рассматриваемого материала $\Lambda = 2,81863$, а, согласно проведенным расчетам, левая часть в BE_3 обращается в нуль при $\lambda_3 \approx 2,41$. Это означает непригодность данного набора материальных констант в области больших деформаций. Отметим, что в случае не одноосного, а всестороннего растяжения, еще более ограничительным является требование сильной эллиптичности, которое для набора параметров, соответствующих оргстеклу, нарушается при $\lambda_3 > 2,01$ [19].

3. Растяжение и раздувание цилиндра

Рассмотрим теперь общий случай, когда $p \neq 0$. Прежде всего отметим, что в этом случае для используемого материала функция $P(r)$ не может быть найдена аналитически. Это существенно затрудняет расчеты по сравнению со случаем несжимаемых материалов [2]. Теперь на каждом шаге исследования линеаризованной задачи необходимо предварительно решать нелинейную краевую задачу для определения ее коэффициентов. Кроме того, нельзя ограничиваться рассмотрением только осесимметричных форм потери устойчивости.

Для упрощения расчетов в качестве второго (кроме коэффициента удлинения цилиндра) параметра нагружения был выбран коэффициент увеличения/уменьшения внутреннего или внешнего радиуса цилиндра. Области устойчивости/неустойчивости строились именно на плоскости этих параметров. При необходимости построенное на первом этапе решение осесимметричной нелинейной задачи позволя-

ет легко переходить от этих деформационных характеристик к силовым характеристикам – величине осевой силы и внутреннего или внешнего давления.

Расчеты показали, что для достаточно толстостенных цилиндров (толщина стенки составляет не меньше 10% от радиуса) область устойчивости полностью определяется четырьмя бифуркационными кривыми, соответствующими наборам мод $(m, n) = (1,0), (1,1), (1,2)$ и $(2,2)$. В качестве примеров таких результатов на плоскости параметров η и $\xi = P(r_0)/r_0$ изображена область устойчивости для цилиндра с размерами $r_0/r_1 = 0,9, h/r_1 = 10$ при использовании материальных параметров стали Rех535 (рис. 3), где точкой отмечено недеформированное состояние.

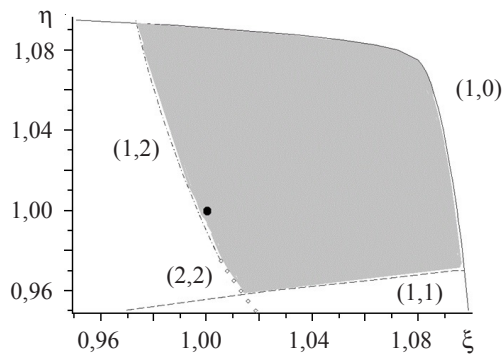


Рис. 3. Область устойчивости цилиндра

Каждый из «граничных» наборов мод соответствует своей форме потери устойчивости. На рис. 4а-г приведены эти формы для цилиндра с соотношением внутреннего и внешнего радиусов до деформации $r_0/r_1 = 0,9$ и высотой $h/r_1 = 10$. Значения деформационных характеристик, которым соответствуют эти формы: а) $m = 1, n = 1, \eta = 0,965, \xi = 1,063$; б) $m = 1, n = 0, \eta = 1,02, \xi = 1,0923$; в) $m = 1, n = 2, \eta = 1,04, \xi = 0,985$; г) $m = 2, n = 2, \eta = 0,97, \xi = 1,007$.

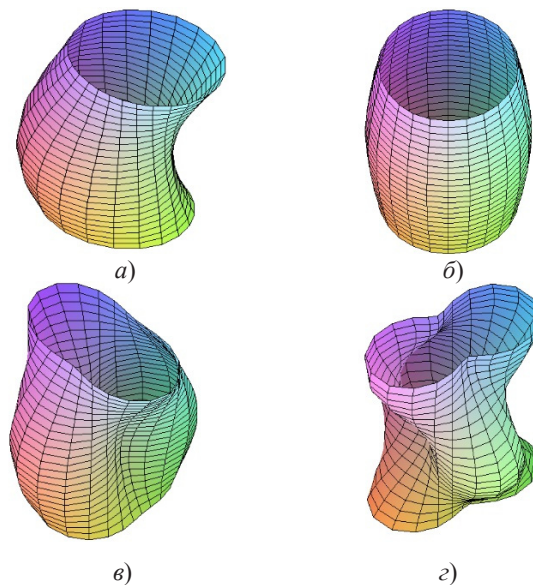


Рис. 4. Формы потери устойчивости раздуваемого и растягиваемого цилиндра

Уменьшение толщины цилиндра может привести к изменению представленной на рис. 4 картины, но только в области сжимающих нагрузок, где может наблюдаться сгущение точек бифуркации, свидетельствующее о том, что реальную форму потери устойчивости предсказать достаточно сложно, на нее существенно влияют несовершенства конструкции и отличие приложенной нагрузки от идеальной.

Отметим, что задача определения реальной формы тела после потери устойчивости, в частности нахождения амплитуд этих мод, требует существенно более сложного анализа трехмерных нелинейных уравнений, например, на основе схем, представленных в [20], и выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение

Проведено исследование равновесия и устойчивости тела в форме полого кругового цилиндра из сжимаемого нелинейно-упругого материала при одновременном действии осевой силы и внутреннего давления. В качестве модели материала использовалась пятиконстантная модель Мурнагана, основным методом построения равновесного состояния являлся полуобратный метод нелинейной теории упругости, исследование устойчивости осуществлялось в рамках статического бифуркационного подхода. На примере варианта материала Мурнагана с набором констант, соответствующих оргстеклу, показана существенность дополнительных условий теоремы Спектора при анализе применимости математических моделей поведения упругих тел в области больших деформаций. Все изученные варианты материальных параметров модели Мурнагана демонстрируют наличие падающего участка и при растяжении, и при раздувании, и при одновременном действии обоих нагружающих факторов. На плоскости параметров «коэффициент растяжения–коэффициент раздувания» построены области устойчивости как при растягивающих, так и при сжимающих напряжениях. Установлен, в частности, качественно одинаковый вид этих областей для достаточно толстых цилиндров. Построены формы потери устойчивости в граничных точках такой области.

Список литературы

1. Зубов Л.М., Шейдаков Д.И. Об устойчивости цилиндрической трубы при осевом растяжении и внутреннем давлении. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2006. Т. 2. №3. С. 8–15.
2. Zubov L.M., Sheidakov D.I. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation. *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 6–11.
3. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: Wiley, 1951. 140 p.
4. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90–105.
5. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *Materials Engineering*. 2016. Vol. 84. P. 33–57.
6. Ambroziak A. Application of the Murnaghan model in analysis of non-linear elastic material properties of PVC-coated fabric. *TASK Quarterly: Scientific Bulletin of Academic Computer Centre in Gdansk*. 2006. Vol. 10. No 3. P. 253–265.
7. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы. *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 289–302.
8. Samsonov A.M., Semenova I.V., Garbuzov F.E. Nonlinear guided bulk waves in hetero-

geneous elastic structural elements. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 94. P. 343–350.

9. Гузев М.А., Молотков И.А. Продольная волна конечной амплитуды в нелинейной однородной упругой среде. Уравнения Ландау – Мурнагана. *Дальневосточный математический журнал*. 2016. Т. 16. №2. С. 160–168.

10. Осипова Е.Б. Конечные деформации и устойчивость равновесия сжимаемого упругого полого шара при следящем внутреннем давлении. *Физическая мезомеханика*. 2009. Т. 12. №6. С. 79–86.

11. Jemiolo S., Franus A. Numerical implementation of the Murnaghan material model in ABAQUS/Standard. *MATEC Web Conferences*. 2018. Vol. 196. P. 01042.

12. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.

13. Rushchitsky J.J. On the constants of the nonlinear Murnaghan's hyperelastic material model. *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52. No 5. P. 508–519.

14. Spector S. On the absence of bifurcation for elastic bars in uniaxial tension. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1984. Vol. 85. No 2. P. 171–199.

15. Ericksen J.L. Equilibrium of bars. *Journal of Elasticity*. 1975. Vol. 5. No 3. P. 191–201.

16. Александрин М.В., Карякин М.И. Об устойчивости растяжения нелинейно-упругого цилиндра. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2010. №1. С. 7–12.

17. Horgan C.O. Material instabilities for large deformations of the generalized Blatz – Ko material. *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50. No 11(2). P. 94–96.

18. Owen N. Some remarks on the stability of the homogeneous deformation for an elastic bar. *Journal of Elasticity*. 1990. Vol. 23. P. 113–125.

19. Зингерман К.М. Проверка условия сильной эллиптичности для материала Мурнагана при всестороннем растяжении или сжатии. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2003. №1. С. 65–70.

20. Гетман И.П., Карякин М.И., Устинов Ю.А. Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу. *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.

References

1. Zubov L.M., Sheidakov D.I. Ob ustoychivosti tsilindricheskoj trubki pri osevom rastyazhenii i vnutrennem davlenii [On the stability of the cylindrical tube under the axial tension and internal compression]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN [Bulletin of Southern Research Center of Russian Academy of Science]*. 2006. Vol. 2. No 3. P. 8–15 (In Russian).

2. Zubov L.M., Sheidakov D.I. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation. *ASME. J. Appl. Mech.* 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 6–11.

3. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York. Wiley. 1951. 140 p.

4. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90–105.

5. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *Materials Engineering*. 2016. Vol. 84. P. 33–57.

6. Ambroziak A. Application of the Murnaghan model in analysis of non-linear elastic material properties of PVC-coated fabric. *TASK Quarterly: Scientific Bulletin of Academic Computer Centre in Gdansk*. 2006. Vol. 10. No 3. P. 253–265.

7. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid. *J. Appl. Math. Mech.* 2009. Vol. 73. No 2. P. 209–219.

8. Samsonov A.M., Semenova I.V., Garbuzov F.E. Nonlinear guided bulk waves in heterogeneous elastic structural elements. *Int. J. Nonlin. Mech.* 2017. Vol. 94. P. 343–350.

9. Guzev M.A., Molotkov I.V. Prodolnaya volna konechnoy amplitudy v nelineynoy odnorodnoy uprugoy srede. Uravneniya Landau – Murnagana [Longitudinal finite-amplitude wave in nonlinear homogeneous elastic medium. The equations of Landau – Murnaghan]. *Dalnevostochnyy matematicheskiy zhurnal [Far Eastern Mathematical Journal]*. 2016. Vol. 16. No 2. P. 160–168 (In Russian).

10. Osipova E.B. Konechnye deformatsii i ustoychivost ravnovesiya szhimaemogo uprugogo pologo shara pri sledyashchem vnutrennem davlenii [Finite strain and equilibrium stability in a compressed elastic hollow sphere at internal follower pressure]. *Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]*. 2009. Vol. 12. No 6. P. 79–86 (In Russian).
11. Jemiolo S., Franus A. Numerical implementation of the Murnaghan material model in ABAQUS/Standard. *MATEC Web Conf.* 2018. Vol. 196. P. 01042.
12. Lurie A.I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam. North-Holland. 1990. 618 p.
13. Rushchitsky J.J. On the constants of the nonlinear Murnaghan's hyperelastic material model. *J. Appl. Mech.* 2016. Vol. 52. No 5. P. 508–519.
14. Spector S. On the absence of bifurcation for elastic bars in uniaxial tension. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*. 1984. Vol. 85. No 2. P. 171–199.
15. Ericksen J. L. Equilibrium of bars. *Journal of Elasticity*. 1975. Vol. 5. No 3. P. 191–201.
16. Aleksandrin M.V., Karyakin M.I. Ob ustoychivosti rastyazheniya nelineynno-uprugogo tsilindra [On the stability of nonlinear elastic cylinder at tension]. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation]*. 2010. Iss. 1. P. 7–12 (In Russian).
17. Horgan C.O. Material instabilities for large deformations of the generalized Blatz – Ko material. *Appl. Mech. Rev.* 1997. Vol. 50. No 11(2). P. 94–96.
18. Owen N. Some remarks on the stability of the homogeneous deformation for an elastic bar. *Journal of Elasticity*. 1990. Vol. 23. P. 113–125.
19. Zingerman K.M. Proverka usloviya silnoy elliptichnosti dlya materiala Murnagana pri vvestoronnem rastyazhenii ili szhatii [Verification of the condition of strong ellipticity for Murnaghan's nonlinear elastic material undergoing uniform volumetric tension or compression]. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika [Bulletin of Tver State University. Applied Mathematics]*. 2003. No 1. P. 65–70 (In Russian).
20. Getman I.P., Karyakin M.I., Ustinov Y.A. Analysis of the non-linear behaviour of circular membranes with an arbitrary radial profile. *J. Appl. Math. Mech.* 2010. Vol. 74. No 6. P. 654–662.

STABILITY OF A CYLINDER FROM MURNAGHAN MATERIAL UNDER STRETCHING, COMPRESSION AND INFLATION

Karyakin M.I., Obrezkov L.P.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The problem of equilibrium and stability of a hollow cylinder subjected to simultaneous uniaxial tension/compression and inflation is considered within the framework of the three-dimensional nonlinear theory of elasticity. To describe the mechanical properties of the material of the cylinder five-constant Murnaghan model is used. By the semi-inverse method the three-dimensional problem is reduced to the study of a nonlinear boundary value problem for an ordinary second-order differential equation. For most sets of material parameters known from the literature, the presence of a falling section in the stretching/inflation diagram, indicating the possible existence of instability zones even in the area of tensile stresses, has been found numerically. The stability analysis was carried out using a bifurcation approach based on linearization of the equilibrium equations in the neighborhood of the constructed solution by means of the method of imposing a small strain on a finite one. The value of a particular deformation characteristic, for which non-trivial solutions of a homogeneous boundary-value problem exist for the equations of neutral equilibrium obtained in the linearization process, was identified with the critical value of the loading parameter, i.e. value at which the system loses stability. As a rule, the coefficient of stretching/shortening of the cylinder and the coefficient of increase/decrease of its internal or external radius were chosen as such parameters. On the plane of the above-mentioned deformation characteristics the areas of stability under tension and compression, as well as under compression by external force and inflation by internal pressure, are constructed. The forms of possible of stability loss depending on the type of stress state are constructed, and the effect on the stability of material and geometric parameters is studied.

Keywords: Murnaghan material, stability, bifurcation, nonlinear elasticity, semi-inverse method.