

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

В.Н. Кукуджанов, А.Л. Левитин

Москва

В.С. Синюк

Долгопрудный

Развивается численно-аналитический метод расщепления для решения квазистатических задач деформирования с учетом повреждаемости материала. Метод был предложен В.Н. Кукуджановым для решения упругопластических динамических задач. Позднее он был распространен на решение методом конечных элементов квазистатических упругопластических задач с внутренними переменными при условии пластичности Мизеса. Метод применен к моделированию процессов локализации и континуального разрушения. Установлено его преимущество по сравнению с наиболее эффективным из используемых в настоящее время методов.

Метод расщепления для решения упругопластических динамических задач деформирования был предложен В.Н. Кукуджановым в работе [1]. В работе [2] этот метод распространен на решение методом конечных элементов (МКЭ) квазистатических упругопластических задач с внутренними переменными при условии пластичности Мизеса. В настоящей работе метод обобщается на повреждающиеся упругопластические среды со сложным условием пластичности, зависящим от двух первых инвариантов тензора напряжений и внутренних переменных, предложенным Гарсоном для пористого материала [3]. Система нелинейных уравнений краевой задачи решается полным методом Ньютона (с квадратичной скоростью сходимости), что требует вычисления матрицы Якоби, зависящей от вида дискретного алгоритма интегрирования определяющих уравнений. В традиционных методах вычисление якобиана для сложных условий пластичности может быть выполнено только численно. При расщеплении упругопластических уравнений достигается сильное упрощение решения. Решение на этапе корректор может быть получено в аналитическом виде. При этом вместо интегрирования системы $6 + k$ уравнений (k – число внутренних переменных) задача сводится к решению методом итераций одного нелинейного уравнения, которое во многих случаях интегрируется аналитически. Это сокращает время вычислений в несколько раз и упрощает вычисление якобиана. Сравнение с наиболее эффективным из используемых в настоящее время методов [4] показало преимущество предлагаемого метода. Метод применен к моделированию процессов локализации и континуального разрушения.

1. Введение

В настоящее время МКЭ успешно применяется для решения широкого круга нелинейных задач, в частности, для решения упругопластических и упруговязко-пластических задач. В большинстве работ интегрирование определяющих уравнений выполняется пошаговыми методами по параметру нагружения. При этом приходится численно интегрировать определяющие уравнения и полную систему уравнений краевой задачи. Выбор схемы интегрирования чрезвычайно важен для решения, особенно при больших деформациях, на порядки превосходящих упругие. В литературе предложено несколько методов интегрирования определяющих уравнений [5–7]. Использование явных методов приводит к условно устойчивым схемам [8]. При больших деформациях и при решении многомасштабных жестких задач необходимо использовать неявные безусловно устойчивые схемы [1, 8]. Как показано в [6], обратный метод Эйлера дает хорошие результаты при условии пластичности Мизеса. В работе [4] этот метод был обобщен на уравнения с условием пластичности, зависящим от двух инвариантов тензора напряжений и внутренних переменных модели, и применен к решению задач упругопластических пористых материалов с зависящим от давления условием пластичности.

2. Определяющие уравнения GTN-модели

Гарсоном, Твергардом и Нидельманом предложена связанная модель повреждаемости упругопластического материала, которая известна в литературе как GTN-модель [3, 9, 10].

В упругой области материал подчиняется закону Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{D} – тензор упругих модулей материала, двоеточие означает свертку тензоров по двум индексам. Скорости упругих $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ и пластических $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ деформаций аддитивны:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}. \quad (2.2)$$

Условие пластичности пористого материала получено Гарсоном исходя из решения задачи о сферически симметричном деформировании сферической поры в идеальнопластическом материале [3]:

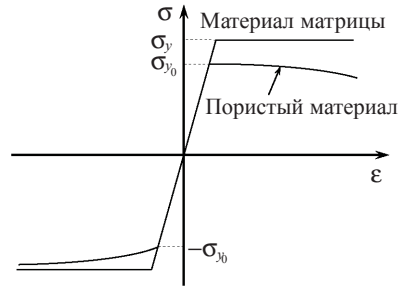
$$\Phi = \left(\frac{q}{\sigma_Y} \right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch} \left(-\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_Y} \right) - (1 + q_1^2 f^2) = 0, \quad (2.3)$$

где $q = \sqrt{2/3} \mathbf{s} : \mathbf{s}$ – интенсивность касательных напряжений; $\mathbf{s} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$ – девиатор тензора напряжений Коши; $p = -1/3 \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ – гидростатическое давление; $\sigma_Y(\bar{\varepsilon}_m^{pl})$ – предел текучести сплошного материала (материала матрицы), зависящий от интенсивности пластических деформаций; $f = V_{por} / V$ – пористость (объемная доля пор в материале); $\bar{\varepsilon}_m^{pl} = \sqrt{2/3} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}_m^{pl}$ – интенсивность пластической деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{pl}$ материала матрицы.

Твергард в [10] ввел в это условие константы q_1, q_2 (как коэффициенты корректировки пористости и давления) для того, чтобы модель Гарсона согласовывалась с численным расчетом модельной задачи о растяжении материала с периодической

пористой структурой в случае плоской деформации. Твергард получил $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1,0$. Варьируя эти параметры, можно приблизить результаты численного расчета к экспериментальным данным.

На рис. 1 приведена зависимость $\sigma(\epsilon)$ для материала с начальной пористостью f_0 при одноосном растяжении и сжатии. При сжатии материал упрочняется, так как пористость уменьшается, а при растяжении разупрочняется из-за зарождения и роста пор.



Ђсѓ. 1

Рассматриваемая модель описывает поведение металлов с не слишком большой долей пор. Хотя материал матрицы, содержащий поры, предполагается пластически несжимаемым, поведение эффективного материала зависит от давления из-за наличия пор.

В качестве пластического потенциала принимается условие пластичности. Пластическая деформация представляется в виде (ассоциированный закон):

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{d\Phi}{d\sigma} = \dot{\lambda} \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{s} \right), \quad (2.4)$$

$\dot{\lambda}$ – неотрицательный скалярный множитель.

2.1. Эволюция интенсивности пластической деформации и пористости.

Упрочнение–разупрочнение материала матрицы описывается зависимостью $\sigma_Y(\bar{\epsilon}_m^{pl})$. С учетом того, что работа пластических деформаций выполняется только материалом матрицы, получим уравнение, описывающее эволюцию $\bar{\epsilon}_m^{pl}$:

$$(1 - f) \sigma_Y \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl}. \quad (2.5)$$

Изменение пористости материала происходит вследствие роста существующих пор и зарождения новых:

$$\dot{f} = \dot{f}_{gr} + \dot{f}_{nucl}.$$

Из уравнения неразрывности, считая материал матрицы пластически несжимаемым, получим уравнение для роста пор:

$$\dot{f}_{gr} = (1 - f) \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} : \mathbf{I}. \quad (2.6)$$

Зарождение пор происходит вследствие относительного движения зерен, зависит от интенсивности пластических деформаций и может быть описано соотношением [9]:

$$\dot{f}_{nucl} = A \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl}, \quad A(\bar{\epsilon}_m^{pl}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon}_m^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

Интенсивность деформаций, при которой зарождаются поры, подчиняется нормальному распределению со средней величиной ϵ_N и дисперсией s_N . Объемная доля зарождающихся пор равна f_N . Поры зарождаются только при растяжении (объемная пластическая деформация больше нуля).

3. Численное моделирование поврежденности упругопластических материалов (вязкое разрушение)

Поврежденность материала связана с разупрочнением, локализацией пластических деформаций и даже с фазовыми превращениями. Это создает определенные трудности при интегрировании определяющих уравнений и решении начально-краевых задач. Для моделирования процессов поврежденности необходимы специальные численные методы.

3.1. Метод расщепления. Новый эффективный численно-аналитический метод интегрирования уравнений упруговязкопластических сред с внутренними или структурными переменными, основанный на методе расщепления определяющих соотношений по физическим процессам, предложен В.Н. Кукуджановым [1].

Рассмотрим интегрирование методом расщепления определяющих уравнений упругопластической среды, которые содержат структурные переменные и не зависят от изменения масштаба времени, имея в виду интегрирование уравнений GTN-модели.

Общая схема расщепления упругопластических уравнений выглядит следующим образом. Расщеплению подвергается только уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{D} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}), \quad (3.1)$$

где $d\boldsymbol{\sigma}/dt$ – объективная производная по времени от тензора напряжений Коши.

Предиктор берется при $f^{\text{A}} = 0$, тогда материал среды упругий, и совместно с уравнениями движения на шаге Δt необходимо решать упругую задачу при начальных условиях, полученных на предыдущем шаге для полной упругопластической задачи:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (3.2)$$

Затем на этапе корректор решаются уравнения релаксации напряжений (3.1) при $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$ совместно с уравнениями, описывающими внутреннюю структуру материала (упрочнение, повреждаемость и т.д.) при начальных условиях, полученных на этапе предиктор.

Используя закон ассоциированного течения, получим уравнение релаксации напряжений:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \mathbf{D} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.3)$$

$$\dot{H}_i = F_i(\boldsymbol{\sigma}, H_j), \quad (3.4)$$

где H_i – параметры, описывающие внутреннюю структуру материала.

Задача интегрирования определяющих уравнений для нахождения напряжений и внутренних параметров среды при заданных деформациях представляет самостоятельную задачу независимо от того, в какой форме (слабой [2] или дифференциальной [1]) формулируются уравнения равновесия.

В случае классической или равновесной упругопластической среды, свойства которой не зависят от изменения масштаба времени, в уравнениях (3.2), (3.4) можно исключить время t и перейти к дифференцированию по переменной λ :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\lambda} = -\mathbf{D} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \lambda} = \tilde{F}_i(\boldsymbol{\sigma}, H_j). \quad (3.6)$$

Решая уравнения (3.5) и (3.6) при начальных условиях $\boldsymbol{\sigma}(\lambda_0) = \boldsymbol{\sigma}^{el}$, $H_i(\lambda_0) = H_i^{el}$, полученных после решения упругой задачи, на этапе корректора, найдем решение как функции λ , $\boldsymbol{\sigma}^{el}$ и H_i^{el} .

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\lambda, \boldsymbol{\sigma}^{el}, H_i^{el}), \quad H_i = H_i(\lambda, \boldsymbol{\sigma}^{el}, H_i^{el}). \quad (3.7)$$

Подставив найденные решения в условие пластичности, получим уравнение для определения параметра λ :

$$\Phi(\lambda, p(\lambda), q(\lambda), H_i(\lambda)) = 0. \quad (3.8)$$

Решая это уравнение, найдем λ , подстановка которого в (3.7) даст окончательное решение задачи.

Вычисление якобиана. При решении краевых задач методом конечных элементов принцип возможных перемещений сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений. Для решения этой системы уравнений методом Ньютона нужно вычислить якобиан $\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}$ – полная деформация). Вычисление якобиана зависит от алгоритма интегрирования определяющих уравнений. При сложных условиях пластичности, используя стандартный метод, это удастся сделать только в численном виде. При интегрировании определяющих соотношений методом расщепления достигается существенное упрощение этой задачи и она может быть решена аналитически.

Покажем это на примере упругопластической среды с линейным упрочнением. На этапе предиктор полная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ считается упругой и решение для напряжений зависит только от $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$, поэтому

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}. \quad (3.9)$$

Продифференцируем уравнение для напряжения $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}$ по $\boldsymbol{\varepsilon}$ с учетом (3.9):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\left(\frac{\partial p^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \otimes \mathbf{I} + \left(\frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) x + \mathbf{s}^{el} \left(\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -K\mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2G\mathbf{I} - \frac{2}{3}G\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.11)$$

где K – модуль объемного сжатия, $G = \mu$ – модуль сдвига, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, \otimes – тензорное произведение, x – коэффициент корректировки.

Так как выражение для x получается в явном виде [1], нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial x}{\partial q^{el}} \frac{\partial q^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\sigma_\gamma + 2\mu_1 H^{el}}{(1 + 2\mu_1 / 3\mu)(q^{el})^2} \cdot 3G \frac{\mathbf{s}^{el}}{q^{el}}, \quad (3.12)$$

где $q^{el} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^{el} : \mathbf{s}^{el}}$. С учетом (3.10)–(3.12) получим окончательный результат:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2Gx \mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3} Gx \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{3G}{q^{el}} \left(\frac{\partial x}{\partial q^{el}} \right) \mathbf{s}^{el} \otimes \mathbf{s}^{el}. \quad (3.13)$$

Результаты расчета. Рассмотрим задачу о сдвиге бруска в трехмерном случае. Стальной брусок размерами $5 \times 2 \times 1$ мм жестко закреплен на торцах. Верхняя граница перемещается в направлении, показанном на рис. 2,а стрелками на верхней границе. Перемещение сдвига равно толщине бруска и составляет 2 мм. Безразмерные константы материала, отнесенные к пределу текучести, таковы: $E = 500$; $\nu = 0,3$; модуль пластического упрочнения $\mu_1 = 0,1$.

На рис. 2,б показаны деформация бруска, деформация лагранжевой сетки и изолинии интенсивности касательных напряжений в материале.

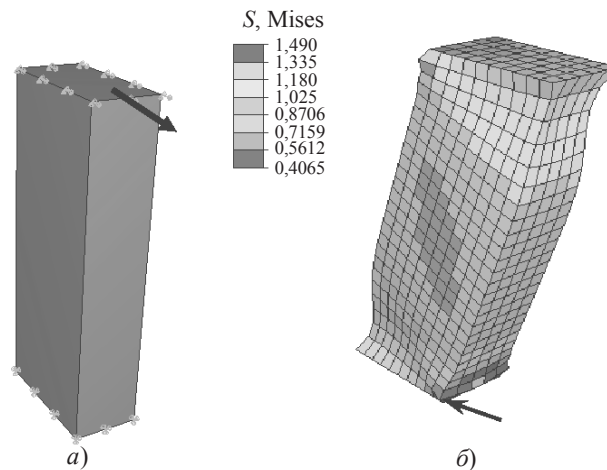


Рис. 2

На рис. 3 изображены зависимости интенсивности касательных напряжений q и давления p , отнесенных к пределу текучести σ_y , в выделенном стрелкой на рис. 2,б элементе. На рис. 3 сплошная линия соответствует расчету с малым шагом по методу [4], а крестики – расчету по методу расщепления.

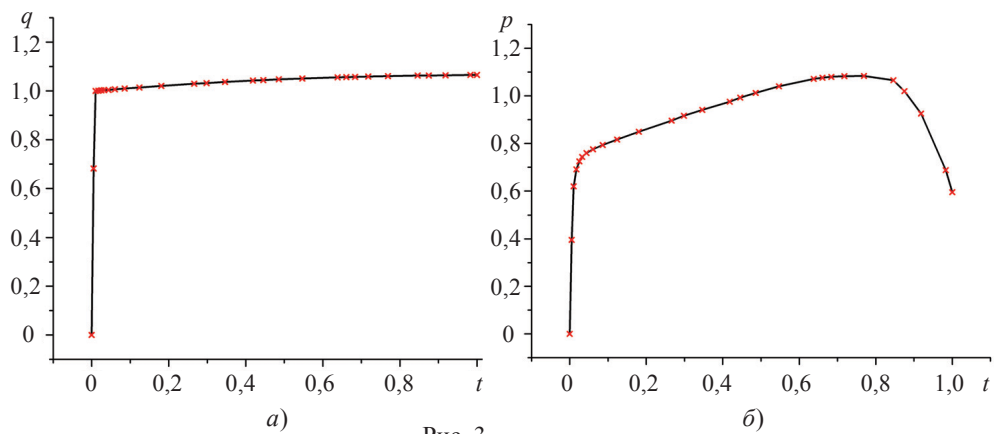


Рис. 3

Вычисления проводились при автоматическом выборе шага двумя разными методами: методом, предложенным в [4] и заложенным в пакете ABAQUS, и методом расщепления. Для решения задачи методом расщепления был написан отдельный программный модуль, в котором было реализовано интегрирование определяющих соотношений по изложенной выше схеме.

Были получены следующие результаты: шаг по времени в точности совпадает в обоих методах; количество итераций в методе Ньютона одинаковое в обоих случаях; время расчета методом расщепления меньше (12 мин 18 с по сравнению с 13 мин 26 с); значения для интенсивности и давления совпали с хорошей точностью. Относительная погрешность не превышает 10^{-5} .

3.2. Интегрирование определяющих соотношений GTN модели. Для простоты примем, что зарождение пор отсутствует и матрица идеальнупластической, тогда уравнение для роста пор имеет вид: $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$.

Преобразование системы определяющих соотношений. В уравнениях (3.3), (3.4) можно исключить время и записать закон Гука в полных дифференциалах:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}), \quad (3.14)$$

где

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{s}, \quad \mathbf{D} = 2G\mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}.$$

Преобразуя эти выражения, получим

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{D} : \mathbf{I} - \frac{3d\lambda}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{D} : \mathbf{s}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{D} : \mathbf{s} = 2G\mathbf{s}, \quad \mathbf{D} : \mathbf{I} = 3K\mathbf{I}.$$

Запишем уравнение для напряжения в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{q}. \quad (3.16)$$

Уравнение для давления имеет вид:

$$dp = -K(d\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) - d\lambda K \frac{\partial \Phi}{\partial p}. \quad (3.17)$$

Уравнение для девиатора напряжений, так как $\partial \Phi / \partial q = 2q$, приведем к виду:

$$d\mathbf{s} = 2Gd\boldsymbol{\varepsilon} - 6Gsd\lambda. \quad (3.18)$$

Преобразуем уравнение для пористости:

$$df_{gr} = (1-f)d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbf{I} = (1-f)d\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f} : \mathbf{I} \right) = (1-f)d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial p}.$$

В предположении, что $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$, окончательно получим:

$$df = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp}. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.17)–(3.19) в совокупности с условием пластичности (2.3) представляют собой замкнутую систему определяющих соотношений. Расщеплению подвергаются только уравнения (3.17) и (3.18).

Ниже для сравнения приведены система определяющих уравнений полной задачи и система уравнений в методе расщепления на этапе корректора:

<i>Полная задача</i>	<i>Метод расщепления</i>
$dp = -K(d\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) - d\lambda K \frac{\partial \Phi}{\partial p}$	$dp = -d\lambda K \frac{\partial \Phi}{\partial p}$
$d\mathbf{s} = 2G d\boldsymbol{\varepsilon} - 6G \mathbf{s} d\lambda$	$d\mathbf{s} = -6G \mathbf{s} d\lambda$
$df = -d\lambda(1-f) \frac{\partial \Phi}{\partial p}$	$df = -d\lambda(1-f) \frac{\partial \Phi}{\partial p}$
$\Phi = \left(\frac{q}{\sigma_Y} \right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch} \left(-\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_Y} \right) - (1 + q_1^2 f^2)$	

начальные условия берутся
с предыдущего шага

в качестве начальных условий
берется упругое решение

Этап корректор. Решаем задачу релаксации напряжений. Система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = -\bar{K} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} = -\bar{K} 3q_1 q_2 f \operatorname{sh} \left(\frac{3}{2} q_2 \bar{p} \right), \quad (3.20)$$

$$d\bar{\mathbf{s}} = -6\bar{G} \bar{\mathbf{s}} d\bar{\lambda}, \quad (3.21)$$

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\lambda}} = -(1-f) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}}, \quad (3.22)$$

$$\Phi = \bar{q}^2 + 2q_1 f \operatorname{ch} \left(-\frac{3}{2} q_2 \bar{p} \right) - (1 + q_1^2 f^2), \quad (3.23)$$

$\bar{p} = p/\sigma_Y$, $\bar{K} = K/\sigma_Y$, $\bar{G} = G/\sigma_Y$, $\bar{\lambda} = \lambda/\sigma_Y$, $\bar{q} = q/\sigma_Y$; f – безразмерная величина. Начальные условия берутся из решения упругой задачи:

$$\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0, \quad \bar{\mathbf{s}}(\bar{\lambda}_0) = \bar{\mathbf{s}}_0 \Rightarrow \bar{q}(\bar{\lambda}_0) = \bar{q}_0, \quad f(\bar{\lambda}_0) = f_0. \quad (3.24)$$

Полностью проинтегрировать всю систему уравнений в аналитическом виде, как в случае условия текучести Мизеса, не удается. Точно интегрируются уравнения для компонент девиатора (3.21) и давления (3.22). Для интенсивности касательных напряжений имеем:

$$\frac{d\bar{q}}{\bar{q}} = -6\bar{G} d\bar{\lambda}. \quad (3.25)$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях (3.24), найдем

$$\bar{q} = \bar{q}_0 \exp(-6\bar{G}(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)). \quad (3.26)$$

Из (3.20) и (3.22) следует:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = \frac{\bar{K}}{1-f} \frac{df}{d\bar{\lambda}} \Rightarrow d\bar{p} = \frac{\bar{K}}{1-f} df.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом начальных условий, получим:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 - \bar{K} \ln\left(\frac{1-f}{1-f_0}\right), \quad f = 1 - (1-f_0) \exp\left(\frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\bar{K}}\right). \quad (3.27)$$

Исключая пористость f из уравнения (3.20), согласно ее представлению в виде второго из соотношений (3.27), приходим к дифференциальному уравнению для \bar{p} . Это уравнение проинтегрировать в удобном аналитическом виде не удастся, но его численное решение на отрезке $\Delta\lambda$ по неявной схеме может быть легко найдено с любой требуемой точностью. Найденные $p(\lambda)$ и $f(\lambda)$ подставляются в условие пластичности Гарсона (3.23), из которого также численно определяется значение $\lambda = \lambda_*$, отвечающее коэффициенту корректировки. В этом случае все дальнейшее решение краевой задачи должно выполняться в численном виде.

Приближенные аналитические выражения для $p(\lambda)$ и $f(\lambda)$ можно также найти, используя на малом шаге $\Delta\lambda$ линейризацию уравнений (3.23)–(3.27). Такой подход, основанный на линейризации уравнений, применен ниже. Функция $\Phi(x)$ определяется в аналитическом виде, все последующие выкладки также проводятся аналитически, что существенно упрощает вычисление якобиана и дальнейшее интегрирование уравнений краевой задачи. Однако следует отметить, что из-за линейризации уменьшается точность вычислений. В результате линейризации получим:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = C_0^p + C_p^p \bar{p}. \quad (3.28)$$

Интегрируя (3.28) с учетом начального условия $\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0$, найдем зависимость $\bar{p}(\bar{\lambda})$ в явном виде:

$$\bar{p} = \left(\bar{p}_0 + \frac{C_0^p}{C_p^p} \right) \exp(C_p^p (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)) - \frac{C_0^p}{C_p^p}. \quad (3.29)$$

Явное выражение для пористости таково:

$$f = C_0^f + C_{\Delta p}^f \Delta \bar{p}. \quad (3.30)$$

Задавая коэффициент корректировки $X = \exp(-10^{-3}(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0))$, где множитель 10^{-3} введен, чтобы не было высоких степеней в выражениях для давления и интенсивности напряжения, запишем линейризованные выражения для искомых функций:

$$\bar{q} = \bar{q}_0 X^\beta, \quad \bar{p} = a + bX^\alpha, \quad f = c + dX^\alpha. \quad (3.31)$$

Здесь $\alpha = -10^{-3} C_p^p$, $\beta = 6 \cdot 10^{-3} \bar{G}$, $a = -C_0^p / C_p^p$, $b = -\bar{p}_0 - a$, $c = C_0^f - C_{\Delta p}^f \bar{p} + C_{\Delta p}^f a$, $d = C_{\Delta p}^f b$; все необходимые коэффициенты приведены в приложении. Подставляя выражения (3.31) в условие пластичности (3.23), приходим к алгебраическому нелинейному уравнению $\Phi(X) = 0$, которое может быть решено методом Ньютона отно-

сительно коэффициента корректировки X :

$$X^{n+1} = X^n - \frac{\Phi(X^n)}{\Phi'(X^n)}, \quad (3.32)$$

$$\Phi'(X) = 2\beta\bar{q}_0^2 X^{2\beta-1} + \alpha X^{\alpha-1} \left[2q_1 d \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}q_2\bar{p}\right) + 3q_1 q_2 b f \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}q_2\bar{p}\right) - 2q_3 f d \right].$$

В качестве начального приближения берется $X_0 = 1$. Итерационный процесс (3.32) продолжается до тех пор, пока относительная погрешность ε в определении X не станет меньше, чем $\varepsilon_0 = 10^{-7}$.

Вычисление якобиана. При решении полной конечно-элементной системы уравнений методом Ньютона нужно вычислить якобиан $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}}$. В принятом подходе якобиан вычисляется в аналитическом виде.

Выражение для напряжений имеет вид

$$\bar{\sigma} = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n}. \quad (3.33)$$

Так как согласно (3.16) \mathbf{s}^{el} и \mathbf{n} коллинеарны, то

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}^{el}}{q^{el}} = \frac{\mathbf{s}_0}{q_0}.$$

Общее выражение для якобиана таково:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right) \otimes \mathbf{I} + \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right) \otimes \mathbf{n} + \bar{q} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right), \quad (3.34)$$

где

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varepsilon}} = C_0^{p,\varepsilon} \mathbf{I} + C_X^{p,\varepsilon} \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{\varepsilon}} \right), \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\varepsilon}} = C_0^{q,\varepsilon} \mathbf{n} + C_X^{q,\varepsilon} \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{\varepsilon}} \right), \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{\varepsilon}} = C_I^X \mathbf{I} + X_n^X \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{2G}{q^{el}} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right]. \quad (3.36)$$

Коэффициенты $C_0^{p,\varepsilon}$, $C_X^{p,\varepsilon}$, $C_0^{q,\varepsilon}$, $C_X^{q,\varepsilon}$ приведены в приложении. Окончательное выражение для якобиана имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} = C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + C_{nl} \mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + C_{ln} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (3.37)$$

В общем случае якобиан (3.37) несимметричный. Однако численные оценки показывают, что коэффициенты C_{nl} и C_{ln} на два порядка меньше, чем коэффициенты при симметричных членах. Поэтому выражение (3.37) можно привести к симметричному виду:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \cong C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2} (C_{nl} + C_{ln}) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}) + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (3.38)$$

Так как якобиан (3.38) является положительно определенным, гарантировано существование обратной матрицы, которая фигурирует в методе Ньютона для полной краевой задачи. Коэффициенты в (3.38) даны в приложении.

4. Результаты расчета

4.1. Одноосное растяжение. В качестве модельной задачи рассмотрим одноосное растяжение квадратного элемента, изображенного на рис. 4, в случае плоской деформации.

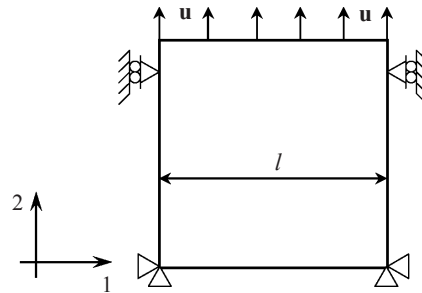


Рис. 4

Примем логарифмическую меру деформаций:

$$\varepsilon = \ln \left(1 + \frac{u(t)}{l} \right), \quad u(t) = 0,5t. \quad (3.39)$$

Начальная пористость материала $f = 0,001$.

Эта тестовая задача была решена двумя методами: методом, предложенным в [4] и заложенным в пакете ABAQUS, и методом расщепления. Решение с помощью пакета ABAQUS осуществлялось с маленьким шагом в $0,001t$, решение методом расщепления до $t = 1$ проводилось с автоматическим шагом, ограниченным значением $0,1t$.

На рис. 5 изображены зависимости давления и пористости f от параметра нагружения. Сплошной линией показано точное решение [4] (рассчитанное с очень малым шагом), крестиками – по методу расщепления.

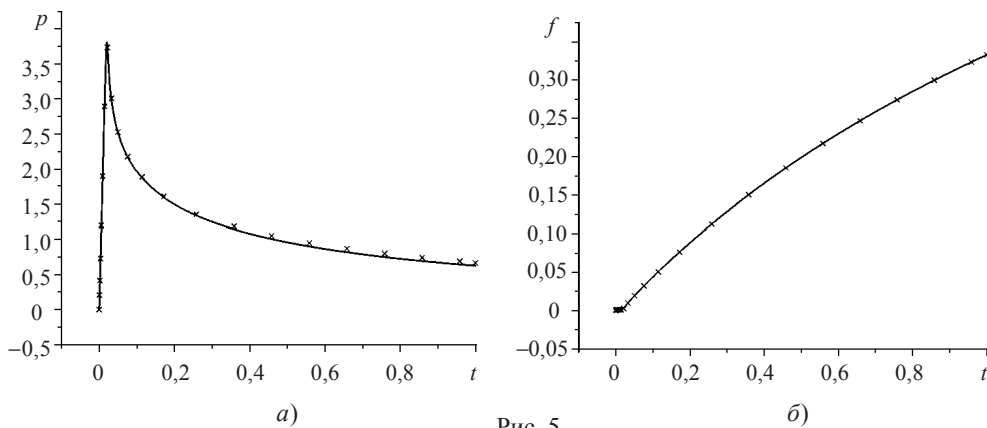


Рис. 5

Как видно из графиков, совпадение результатов довольно хорошее. Максимальная относительная погрешность в определении давления не превышает 5%. Остальные величины найдены с большей точностью.

Хотя материал матрицы пластически несжимаем, за счет изменения пористости имеет место пластическая сжимаемость эффективного материала, тело увеличивает

объем в 1,5 раза, упругая деформация при этом составляет всего $\epsilon^{el} = 0,002$.

4.2. Краевая задача. Рассмотрим задачу о сдвиге бруска в трехмерном случае (см. рис. 2). Выше эта задача была решена для упругопластического материала при условии пластичности Мизеса.

Как показали расчеты при фиксированном шаге, для решения задачи методом расщепления (MP) требуется выполнить в 2,4 раза больше итераций, чем при решении этой же задачи методом [4], тогда как время расчета примерно одинаковое: по MP – 1 час 31 мин, по ABAQUS – 1 час 27 мин. Таким образом, предложенный метод интегрирования определяющих соотношений оказался 2,5 раза быстрее, чем стандартный.

Следует напомнить, что в приведенном варианте расчета методом расщепления была проведена линеаризация уравнений, чтобы получить аналитическое решение. В тестовом примере, несмотря на линеаризацию уравнений, результат, полученный методом расщепления, хорошо совпадает с точным решением. В задаче о сдвиге бруска совпадение результатов хуже, но с уменьшением шага точность расчета возрастает, что в очередной раз говорит о том, что линеаризация уравнений загроубляет решение при недостаточно мелком шаге. Для повышения точности метода на этапе корректора, связанном с решением уравнения (3.20), нужно применять численное интегрирование по неявной схеме второго порядка точности. Несмотря на некоторое расхождение результатов (ошибка $\epsilon \sim 1\%$) при недостаточно мелком шаге, обусловливаемое линеаризацией уравнений (3.20), следует отметить преимущество рассматриваемого метода, которое заключается в скорости интегрирования определяющих соотношений.

Сравнение результатов, полученных в рассмотренных примерах для условий пластичности Мизеса и Гарсона, свидетельствует о существенном влиянии пористости на напряженно-деформированное состояние, которое нельзя не учитывать.

4.3. Изгиб пластины. Рассмотрим пример, показывающий существенное различие в характере разрушения конструкции при учете и без учета повреждаемости. Решается задача изгиба пластины из повреждающегося материала, свободно опертой на концах и нагруженной посередине жестким цилиндрическим штампом (плоская деформация). В силу симметрии задачи будем рассматривать только правую часть пластины. На рис. 6,а приведена геометрия задачи, $h = 0,25$ мм. Константы материала: $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $\sigma_Y = 400$ МПа; $q_1 = 1,5$; $q_2 = 1,0$; $f_0 = 0,05$; $f_N = 0,04$; $\epsilon_N = 0,3$; $s_N = 0,1$.

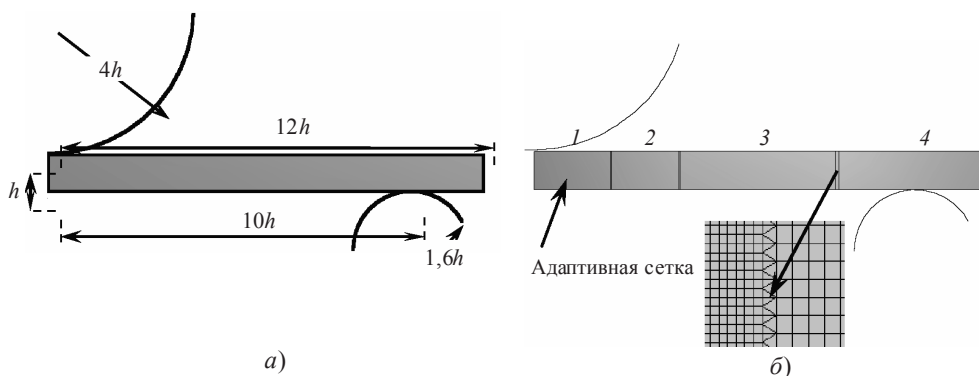


Рис. 6

Между балкой и штампом, а также между балкой и опорами отсутствует трение. Так как наибольшие деформации балки возникают в области под штампом, то целесообразно ввести в этой области мелкую сетку. При больших деформациях элементы лагранжевой сетки сильно искажаются, при этом точность расчета падает. Поэтому балка разделена на 4 области (рис. 6,б). Переход в другую область осуществляется через треугольные элементы (при этом шаг разбиения изменяется в два раза). В области 1 используется адаптивная сетка, которая перестраивается на каждом временном шаге (время здесь фигурирует как параметр нагружения). В областях 2–4 используется обычная лагранжева сетка. Разбиение расчетной области показано на рис. 6,б; количество элементов 28977, количество узлов 29380.

На рис. 7 приведена сила реакции на штамп со стороны балки. Из графика видно, что для пористого материала потеря устойчивости балки или образование пластического шарнира (горизонтальный участок кривой) происходит раньше, чем в случае идеальнопластического материала. Это обусловлено тем, что предел текучести σ_{y0} для материала с поврежденностью ниже, чем для материала матрицы σ_{y0} . Подобное снижение предела текучести связано с начальной пористостью материала: $f_0 = 5\%$. Такое значение f_0 выбрано с целью проследить процесс образования полос скольжения более детально. В случае, когда $f_0 = 0$, то есть начальной пористости нет, а есть только зарождение пор, также наблюдается образование полос сдвига, но этот процесс начинается позднее.

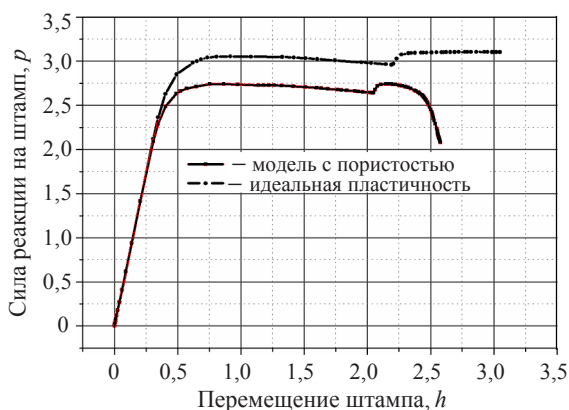


Рис. 7

Скачок контактной силы (см. рис. 7) обусловлен появлением зазора между штампом и балкой при образовании пластического шарнира.

Из рис. 7 видно, что в модели с повреждаемостью (пористостью) наблюдается резкое падение контактной силы, чего нет в случае идеальной пластичности. Это свидетельствует о разупрочнении материала, которому предшествует локализация пластических деформаций, возникновение полос локализации при образовании пластического шарнира и появление зазора между штампом и пластиной.

Рис. 8 иллюстрирует возникновение полос локализации при перемещении штампа $d = 2,2h$, ϵ – логарифмическая деформация, в одномерном случае $\epsilon = \ln(L/l) = \ln(1 + u/l)$, где $u = L - l$. В случае GTN модели (б) наблюдается образование структуры, состоящей из периодических полос локализации деформаций с высокой пористостью, разделенных полосами разгруженного материала, чего нет в случае идеальной пластичности (а).

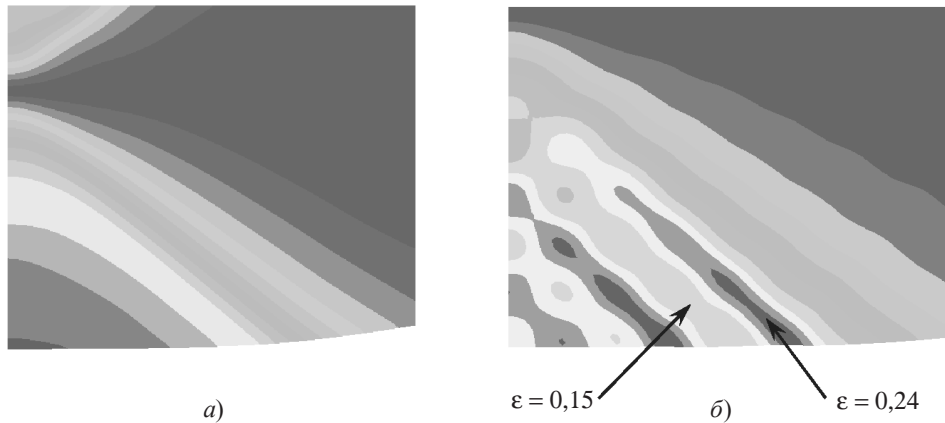


Рис. 8

5. Выводы

1. Главное преимущество предложенного метода расщепления заключается в том, что интегрирование нелинейной системы из n определяющих уравнений ($n = 6 + k$) для шести компонент тензора напряжений и k внутренних переменных для случая связанных моделей пластических сред с поврежденностью сводится к численному решению одного нелинейного уравнения при условии пластичности Мизеса или двум уравнениям при условии пластичности, зависящем от давления. Остальные уравнения интегрируются в аналитическом виде, благодаря чему возрастает скорость решения системы в несколько раз (для GTN-модели более чем в 2 раза). Упрощается вычисление якобиана при решении краевых задач методом МКЭ.

2. Как показывают расчеты, линеаризация неинтегрируемых уравнений несколько снижает точность расчета и требует мелкого шага интегрирования. Поэтому целесообразно эти уравнения интегрировать численно, используя неявные схемы не ниже второго порядка точности.

3. Численно-аналитическое решение системы определяющих уравнений позволяет легко проанализировать разностные схемы расщепления многомасштабных упругопластических задач и гарантирует их устойчивость и асимптотическую сходимость к решению предельного равновесного уравнения при стремлении малых параметров к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00523) и программы ОЭММПУ РАН 14.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем коэффициенты, использованные в тексте работы:

$$C_0^{q,\varepsilon} = 3\bar{G}X^\beta, \quad C_X^{q,\varepsilon} = \bar{q}_0\beta X^{\beta-1},$$

$$C_0^{q,\varepsilon} = 3q_1q_2\bar{K}\frac{C_{\Delta p}^f}{C_p^p}\left[\bar{K}C_0^{sh} + (\bar{p}_t - a)(C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh}\bar{K})\right](1 + A^\alpha) -$$

$$-\bar{K}X^\alpha - \frac{3\bar{K}bq_1q_2}{1000}(C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh}\bar{K})C_{\Delta p}^fX^\alpha \ln(X),$$

$$C_X^{p,\varepsilon} = \alpha\beta X^{\alpha-1},$$

$$C_n^X = -\frac{2\bar{q}C_0^{q,\varepsilon}}{2\bar{q}C_X^{q,\varepsilon} + \Phi_p^\varepsilon C_X^{p,\varepsilon}}, \quad C_I^X = -\frac{\Phi_0^\varepsilon + \Phi_p^\varepsilon C_0^{p,\varepsilon}}{2\bar{q}C_X^{q,\varepsilon} + \Phi_p^\varepsilon C_X^{p,\varepsilon}},$$

$$C_I = 2G\frac{\bar{q}}{\bar{q}_0}, \quad C_{II} = -C_0^{p,\varepsilon} - C_X^{p,\varepsilon}C_I^X - \frac{1}{3}C_I,$$

$$C_{nn} = C_0^{q,\varepsilon} + C_X^{q,\varepsilon} - \frac{1}{3}C_I, \quad C_{nl} = C_X^{q,\varepsilon}C_I^X, \quad C_{ln} = C_X^{p,\varepsilon}C_n^X.$$

Литература

1. Кукуджанов, В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений / В.Н. Кукуджанов // МТТ. – 2004. – №1. С. 98–107.
2. Кукуджанов, В.Н. Численно-аналитический метод решения упругопластических и упруговязкопластических уравнений со структурными переменными / В.Н. Кукуджанов // Труды Международ. симпози. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 95-летию со дня рожд. А.А. Ильюшина, Москва, 19–20 января 2006 г. – М.: МГУ, 2006.
3. Gurson, A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials / A.L. Gurson // J. of Eng. Materials and Technology. – 1977. – V. 99. – P. 2–15.
4. Aravas, N. On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models / N. Aravas // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1987. – V. 24. – P. 1395–1416.
5. Rice, J.R. Computational fracture mechanics / J.R. Rice, D.M. Tracey. – In: Proc. Symp. Numerical Methods in Structural Mechanics / Ed. S.J. Fenves et al. – Urbana, Illinois, 1971. – New York: Academic Press, 1973.
6. Ortiz, M. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations / M. Ortiz, E.P. Popov // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1985. – V. 21. – P. 1561–1576.
7. Simo, K. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity / K. Simo, R.L. Taylor // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 48. – P. 101–118.
8. Nagtegaal, J.C. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems / J.C. Nagtegaal // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1982. – V. 33. – P. 469–484.
9. Chu, C.C. Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets / C.C. Chu, A. Needleman // J. of Eng. Materials and Technology. – 1980. – V. 102. – P. 249–256.
10. Tvergaard, V. Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Condition / V. Tvergaard // Int. J. of Fracture Mechanics. – 1981. – V. 17. – P. 389–407.

[15.09.2006]

A NUMERICAL ANALYTICAL SPLITTING METHOD FOR MODELLING QUASISTATIC DEFORMATION PROCESSES OF DAMAGING MATERIALS

V.N. Kukudzhanov, A.L. Levitin, V.S. Sinyuk

A numerical analytical splitting method is developed for solving quasistatic problems of deforming fracture, accounting for the damaging properties of the material. The method was introduced by V.N. Kukudzhanov for solving elastoplastic dynamic problems. Later it was extended to a FEM-analysis of quasistatic elastoplastic problems having internal variables with Mises yield condition. The method is applied to modeling the localization and continual fracture processes. The method has computational advantages over the most efficient method currently available.