

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-521-532

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОНИКАНИЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ В ГРУНТ ПО ИНЕРЦИИ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ*

© 2018 г. **Линник Е.Ю.¹, Котов В.Л.¹, Саяпин С.В.²,
Алхеддо М.², Константинов А.Ю.^{1,3}**

¹*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

³*Государственный научно-исследовательский институт машиностроения
им. В.В. Бахирева, Нижегородская обл., Дзержинск, Российская Федерация*

ElenkaLinnik@gmail.com

Поступила в редакцию 27.07.2018

Рассматривается задача о нормальном ударе и проникании жестких пространственных тел конечной массы в полупространство, занимаемое упруго-пластической грунтовой средой. Для среды проникания принимается модель линейно сжимаемой упругопластической среды Григоряна при линейной зависимости предела текучести от давления. Решение задачи осуществляется численно в трехмерной постановке с применением пакета программ LS-DYNA. Упругопластическая среда проникания рассматривается на неподвижной эйлеровой сетке с выделением пустых ячеек, в которые материал перетекает в процессе деформирования. Пространственные ударники моделируются жестким недеформируемым телом в лагранжевой системе координат.

Проводится исследование влияния поверхностного трения при проникании в упругопластическую грунтовую среду Григоряна ударников различной формы: круговой конус, четырехлучевая звезда и пирамидальное тело. Поперечное сечение звездообразного тела образовано двумя ромбами с отношением диагоналей 1:2, в основании пирамиды находится ромб с отношением диагоналей 1:3. Исследуемые тела имеют равные площади оснований и одинаковый наклон боковой поверхности (угол отсчитывается между направлением вектора скорости движения тела и нормалью к боковой поверхности). Для сравнения рассматривается также круговой конус основанием той же площади.

Движение ударников рассматривалось с постоянными скоростями и по инерции в диапазоне скоростей от 150 до 600 м/с, что соответствует дозвуковым и сверхзвуковым скоростям. Значение коэффициента поверхностного трения задавалось близким к значению коэффициента трения в сухом песчаном грунте естественного состава. Проведено сравнение с полученными ранее результатами расчетов при нулевом коэффициенте трения. Установлено, что

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-08-60035-мол-а-дк).

сила сопротивления внедрению и глубина проникания может быть описана с применением двучленного квадратичного по скорости закона проникания Резаля. Отличия сил сопротивления внедрению пирамидального, конического и звездообразного тел одинаковой высоты находятся в пределах 10–20%.

Ключевые слова: проникание, поверхностное трение, упругопластическая среда, конический ударник, пирамидальные тела, модель локального взаимодействия, трехмерное моделирование.

Введение

Изучение процесса проникания твердых тел в грунтовые среды является сложной задачей, для эффективного решения которой в настоящее время применяются совместно экспериментальные, теоретические и численные методы. В зависимости от цели исследования были реализованы различные постановки эксперимента. Изучались процессы образования каверны при проникании сферических и цилиндрических ударников в песок [1]. Регистрировались напряжения, возникающие в песчаной мишени при ударе и проникании стального цилиндра с полусферическим оголовком [2]. Осуществлялась рентгеновская съемка перемещений частиц песка при ударе [3]. Экспериментально исследовалось влияние пластической деформации ударника на конечные глубины внедрения сферы, цилиндра и оживала в сухой песок [4]. Однако существенно большее количество работ посвящено анализу глубины проникания ударников. Определены параметры уравнения движения цилиндрических ударников с коническими оголовками в сухом песке [5, 6] и глинистом грунте (пластилине) [7]. На основе данных прямых и обращенных экспериментов получен коэффициент сопротивления внедрению сферы в сухой песок в зависимости от скорости удара [8]. Установлены зависимости конечных глубин проникания сферических ударников в песок от скорости соударения [9]. Обобщением результатов экспериментов являются инженерные модели проникания [10–14], которые находят широкое применение как при анализе движения тел в грунтовых средах [15, 16], так и при решении задач оптимизации [17–20]. Верификация подобных моделей может быть получена в численных расчетах динамического деформирования грунтовых сред при ударе и проникании в осесимметричной и/или трехмерной постановках. Работы последних лет свидетельствуют об интенсивном применении наряду с конечно-элементными методами на основе уравнений механики континуума [21–26] методов дискретных частиц в двумерной осесимметричной [1, 27, 28] и трехмерной постановках [29–32]. Подобный подход позволяет получить параметры движения ударников при учете нелинейных эффектов динамического деформирования грунта, а также поверхностного трения и эффектов обтекания.

Ранее проводилось сравнение сил сопротивления внедрению осесимметричных конических и неосесимметричных пространственных тел в сжимаемую упругопластическую среду, моделирующую мягкий грунт [15, 33], без учета трения. Продемонстрировано увеличение сопротивления внедрению и уменьшение глубины проникания, пропорциональное уменьшению высоты тела. В настоящей статье анализируется возможность проводить расчет движения пространственных тел конечной массы на основе двучленной квадратичной зависимости силы сопротивления внедрению от скорости удара (закон проникания Резаля), полученной в расчетах квазистационарной стадии проникания с постоянными скоростями при учете поверхностного трения скольжения.

1. Постановка задачи

Математическая модель динамики грунтовой среды Григоряна записывается в прямоугольной декартовой системе координат в виде системы дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы и импульса, и уравнений теории пластического течения с условием пластичности Мизеса – Шлейхера. Замыкается система дифференциальных уравнений кусочно-линейной зависимостью давления p от объемной деформации e в упругопластической среде:

$$p = KeH(e), \quad (1)$$

где K – модуль объемного сжатия, H – функция Хевисайда. Зависимость предела текучести σ_T от давления принимается линейной:

$$\sigma_T = Y + kp, \quad (2)$$

где параметры Y и k определяют сцепление и внутреннее трение упругопластической среды.

В начальный момент времени скорости частиц ударника равны начальной скорости удара V_0 , напряжения и скорость частиц грунта равны нулю. На контактной границе выполняется условие равенства нормальных компонент векторов скоростей частиц по обе стороны контактной поверхности, нормальные и касательные напряжения принимаются пропорциональными в соответствии с законом трения Кулона с постоянным коэффициентом поверхностного трения k_f . Рассматривается движение тел по нормали к поверхности, на плоскости симметрии задаются равными нулю нормальные компоненты вектора скорости и тангенциальные компоненты тензора напряжений. На внешних границах области выполняются условия равенства нулю нормальной и тангенциальной компонент тензора напряжений. Численное решение трехмерной задачи проникания осуществляется с применением пакета программ LS-DYNA (ProductID 76456-OEM-0011903-01828) в постановке, аналогичной постановкам задач из [16, 33].

Рассматривалось проникание в упругопластическую грунтовую среду ударников различных форм (рис. 1): круговой конус высотой 1,73 см (тело 1), круговой конус с высотой 1,19 см (тело 2), четырехлучевая звезда (тело 3) и пирамидальное тело, в основании которого ромб с отношением диагоналей 1:3 (тело 4). Площади оснований всех ударников равны, при этом тела 1, 3, 4 имеют одинаковый наклон боковой поверхности ($\varphi = \pi/6$), высоты тел 2–4 равны 1,19 см.

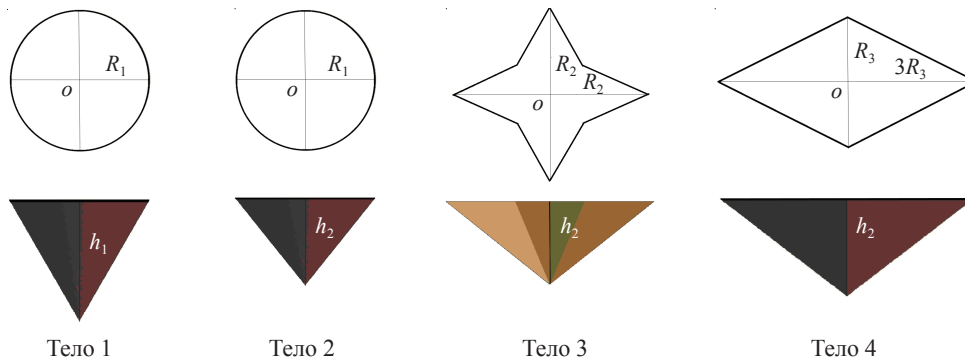


Рис. 1

В таблице 1 приведены параметры тел проникания.

Таблица 1

№ тела	R_r , см	Высота тела, см	Площадь основания, см ²	Площадь боковой поверхности, см ²
1	1	1,73	3,14	6,28
2	1	1,19	3,14	4,88
3	1,53	1,19	3,14	6,33
4	0,72	1,19	3,14	6,29

Расчеты проводились при следующих значениях параметров модельной среды: начальная плотность среды $\rho_0 = 2000$ кг/м³, $Y = 0,5$ МПа, $k = 1$, $K = 320$ МПа, модуль сдвига $G = 160$ МПа [33]. Диапазон начальных скоростей удара V_0 составлял от 150 до 600 м/с, что соответствует как дозвуковым, так и сверхзвуковым скоростям внедрения. Ранее проводились расчеты [19, 24, 26] нестационарных процессов взаимодействия жестких тел с песчаным грунтом, при этом коэффициент трения принимал значения из диапазона 0,3–0,45. Для иллюстрации влияния поверхностного трения по сравнению с расчетами при нулевом коэффициенте трения [33] в настоящей статье принималось наибольшее значение коэффициента $k_f = 0,45$.

2. Результаты расчетов

Численные расчеты проникания пространственных тел проводились при постоянных скоростях внедрения и по инерции. На рис. 2 представлены зависимости силы сопротивления внедрению тела 3 (звездообразное поперечное сечение) от безразмерного времени (время отнесено к величине $t^* = h/V_0$) с учетом трения (рис. 2а) и при отсутствии трения (рис. 2б) при постоянных скоростях проникания, равных начальным скоростям удара: $V_0 = 150, 300, 450$ и 600 м/с. Наблюдается качественное подобие результатов численных расчетов – незначительное отличие максимума силы сопротивления от его значения на квазистационарной стадии.

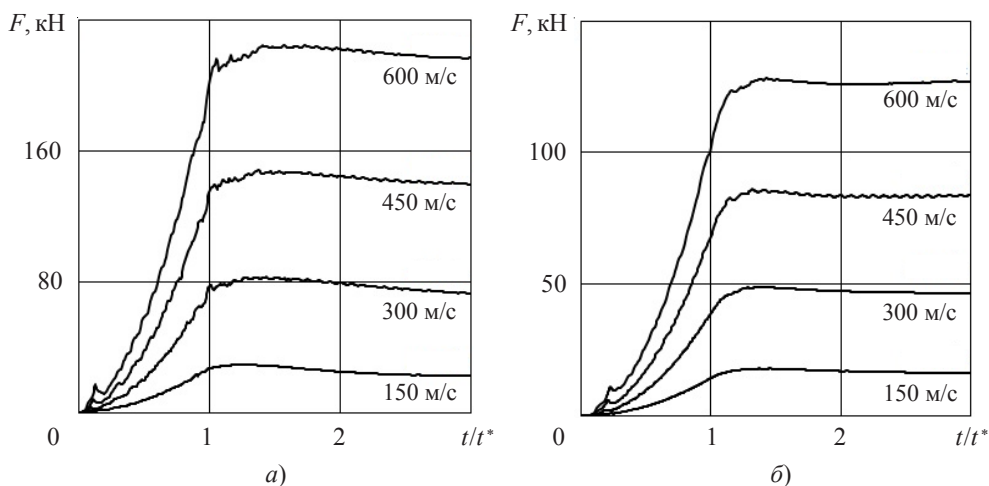


Рис. 2

Влияние трения на значения силы сопротивления внедрению острого конического ударника удовлетворительно описывается выражением

$$F_k = (1 + k_f \operatorname{ctg} \varphi) F_0, \quad (3)$$

где F_0 – сила сопротивления внедрению, полученная в результате численных расчетов без учета поверхностного трения ($k_f = 0$).

На рис. 3 маркерами отмечены зависимости силы сопротивления внедрению тела со звездообразным поперечным сечением на квазистационарной стадии (при $t/t^* = 3$) от скорости проникания: маркеры треугольник, точка и квадрат соответствуют значениям силы сопротивления внедрению F_k , полученным по формуле (3), а также значениям сил сопротивления F и F_0 , полученным в расчетах при учете трения ($k_f = 0,45$) и без его учета ($k_f = 0$). Можно отметить, что формула (3), полученная для конических острых ударников, оказывается удовлетворительной и для пространственного ударника со звездообразным поперечным сечением.

Для ответа на вопрос о применимости формулы (3) и для других рассматриваемых тел были получены относительные ошибки $D = (F_k - F)/F$, где F_k – сила, полученная по формуле (3), F – сила, полученная в результате численных расчетов при учете трения ($k_f = 0,45$).

На рис. 4 представлены относительные ошибки D формулы (3) в диапазоне скоростей удара 150–600 м/с для рассматриваемых пространственных тел. На рисунке маркеры соответствуют: темный кружок – конусу с высотой 1,19 см (тело 2), треугольник – пирамиде (тело 4), ромб – звездообразному телу (тело 3), светлый кружок – конусу с высотой 1,73 см (тело 1), интервалы соответствуют 10%-ной ошибке численных расчетов [33]. Для всех тел наблюдается пропорциональное уменьшение ошибки с ростом скорости движения. С уменьшением высоты конуса при сохранении площади основания формула (3) становится неприменимой из-за большой ошибки.

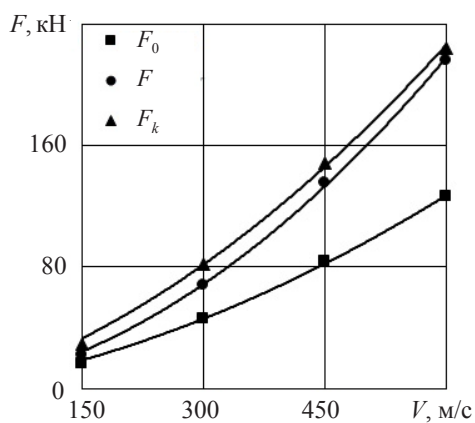


Рис. 3

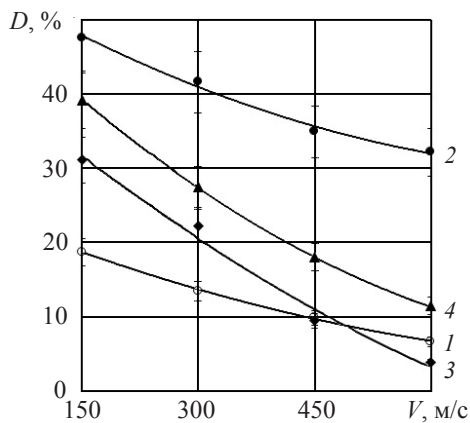


Рис. 4

На рис. 5 представлены зависимости от скорости значений силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения (при $t/t^* = 3$) для рассматриваемых тел при учете трения ($k_f = 0,45$): маркеры ромб, точка, квадрат, треугольник соответствуют результатам трехмерных расчетов проникания тел 1–4, штриховыми линиями показаны квадратичные аппроксимации результатов численных расчетов вида $F(V) = AV^2 + BV$, где A и B – константы.

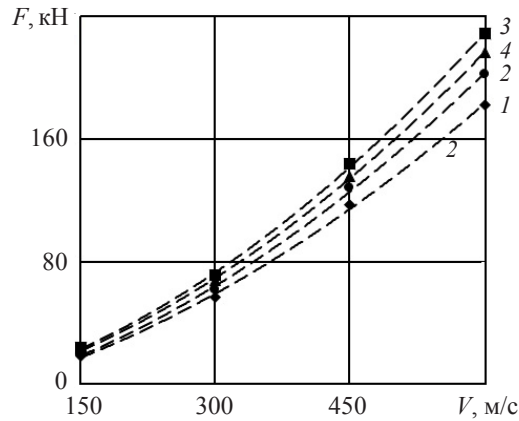


Рис. 5

На основе известной квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости движения можно получить зависимость глубины проникания ударника конечной массы $z(V)$ от скорости внедрения. Для конического ударника, имеющего высоту h , площадь основания S_0 и массу m , проникающего с начальной скоростью V_0 , при справедливости закона проникания в форме Резаля $F(V) = AV^2 + BV$ будем иметь

$$z^3(V) = \frac{3mh^2}{A} \ln\left(\frac{AV_0 + B}{AV + B}\right), \quad z < h, \quad (4)$$

$$z(V) = \frac{m}{A} \ln\left(\frac{AV_H + B}{AV + B}\right) + h = \frac{m}{A} \ln\left(\frac{AV_0 + B}{AV + B}\right) + \frac{2h}{3}, \quad z \geq h.$$

Проведено исследование применимости формулы (4) для определения глубины внедрения пространственного тела по инерции при известной двучленной зависимости силы сопротивления внедрению от скорости удара, полученной в расчетах проникания тел с постоянной скоростью. Рассматриваются два варианта определения коэффициентов A и B двучленного закона проникания:

1) на основе значений силы сопротивления внедрению на квазистационарной стадии внедрения при учете трения (приведены на рис. 5);

2) на основе расчетных значений силы сопротивления без учета трения и последующей корректировки по формуле (3).

Текущие глубины проникания, соответствующие вариантам определения силы сопротивления 1 и 2, обозначим z и z_k . Сравнение результатов осуществляется с данными трехмерных расчетов проникания тел массы $m = 40$ г по инерции при начальной скорости 600 м/с.

На рис. 6а–6г соответственно представлены текущие глубины проникания тел 1–4 в зависимости от текущей скорости внедрения V при начальной скорости удара $V_0 = 600$ м/с, полученные в расчетах и по формуле (4): штриховая линия с ромбом, сплошная линия с квадратом и светлые кружочки соответствуют величинам z_k , z и Z (z и z_k обозначают текущие глубины проникания, полученные по формуле (4), Z соответствует данным трехмерных расчетов), интервалы соответствуют ошибке $\pm 10\%$.

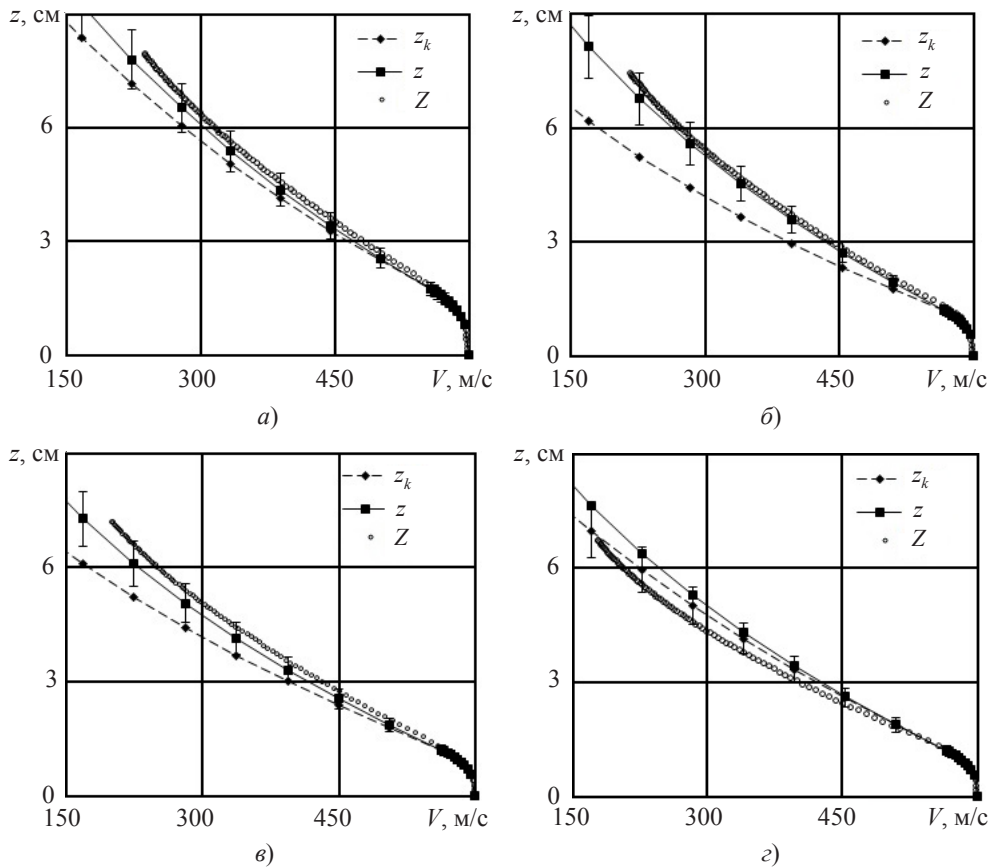


Рис. 6

Наблюдается удовлетворительное соответствие результатов численных расчетов проникания пространственных тел по инерции при учете трения и полученных по формуле (4), что отмечалось ранее для осесимметричных тел [23]. Ошибка в оценке силы сопротивления движению при учете трения по формуле (3) для конического тела 2 проявляется и при расчете текущей глубины проникания. С уменьшением скорости ошибка определения глубины проникания с применением формул (3), (4) будет расти для всех рассматриваемых тел. Однако формула может применяться для оценки глубины проникания ударников в случае падения скорости от начального значения не более чем в 3–4 раза или для расчета замедления ударника при прохождении слоя грунта.

Заключение

Получены зависимости силы сопротивления внедрению от скорости и глубины проникания пространственных ударников при их движении в грунте с постоянной скоростью и по инерции при учете поверхностного трения. Отличия сил сопротивления внедрению пирамидального, конического и звездообразного тел при одинаковой высоте находятся в пределах 10–20%. Установлено, что сила сопротивления внедрению пространственных тел при учете трения может быть описана квадратичной зависимостью от скорости проникания в рамках двучленного закона проникания Резаля.

Список литературы

1. Borg J.P., Morrissey M.P., Perich C.A., Vogler T.J., Chhabildas L.C. In situ velocity and stress characterization of a projectile penetrating a sand target: Experimental measurements and continuum simulations. *International Journal of Impact Engineering*. 2013. Vol. 51. P. 23–35. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2012.07.009>.
2. Park H., Chen W. Stress variations and particle movements during penetration into granular materials. T. Proulx (ed.). *Dynamic Behavior of Materials, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series 99*. 2011. Vol. 1. P. 85–92. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0216-9_11.
3. Collins A.L., Addiss J.W., Walley S.M., Promratana K., Bobaru F., Proud W.G., Williamson D.M. The effect of rod nose shape on the internal flow fields during the ballistic penetration of sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2011. Vol. 38. Iss. 12. P. 951–963. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2011.08.002>.
4. Savvateev A.F., Budin A.V., Kolikov V.A., Rutberg P.G. High-speed penetration into sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2001. Vol. 26. Iss. 1-10. P. 675–681. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(01\)00132-4](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(01)00132-4).
5. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. *Journal of Applied Physics*. 1957. Vol. 28. No 3. P. 370–376.
6. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. Part II. *Journal of Applied Physics*. 1957. Vol. 28. Iss. 3. P. 1331–1335. <https://doi.org/10.1063/1.1722750>.
7. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии. *ЖТФ*. 2011. Т. 81. №7. С. 94–104. <https://doi.org/10.1134/S1063784211070231>.
8. Баландин Вл.В., Баландин Вл.В., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментальное изучение динамики проникания твердого тела в грунтовую среду. *ЖТФ*. 2016. Т. 86. №6. С. 62–70.
9. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду. *Изв. РАН. МТТ*. 2010. №6. С. 157–191. DOI: 10.3103/S0025654410060130.
10. Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength. *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17. Iss. 9. P. 915–924. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90106-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90106-2).
11. Omidvar M., Malioche J.D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 85. P. 146–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002>.
12. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*. 2014. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–19. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0135-4>.
13. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. №4. С. 114–125. DOI: 10.1134/S0021894413040123.
14. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 73. P. 112–122. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010>.
15. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Константинов А.Ю. Моделирование процессов динамического внедрения пространственных тел в сжимаемую упругопластическую среду. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2017. №4. С. 92–108.
16. Баженов В.Г., Котов В.Л. Численно-аналитический метод исследования устойчивости движения тел вращения в мягких грунтовых средах. *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 688–698.
17. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2014. №2. С. 48–75. DOI: 10.15593/pern.mech/2014.2.03.

18. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Central European Journal Engineering*. 2012. Vol. 2. No 4. P. 473–482. DOI: 10.2478/s13531-012-0022-4.
19. Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах. *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 98–115. doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.05.008.
20. Kotov V.L., Linnik E.Yu. Study of motion of optimal bodies in the soil of grid method. *11th International Conference on Mesh Methods for Boundary-value Problems and Applications*. 20–25 Oct. 2016. Kazan, 2016. P. 012058. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012058.
21. Баженов В.Г., Котов В.Л., Крылов С.В., Баландин В.В., Брагов А.М., Цветкова Е.В. Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой. *Изв. СО РАН. ПМТФ*. 2001. Т. 42. № 6. С. 190–198. <https://doi.org/10.1023/A:1012590517033>.
22. Баландин В.В., Брагов А.М., Игумнов Л.А., Константинов А.Ю., Котов В.Л., Ломунов А.К. Динамическое деформирование мягких грунтовых сред: экспериментальные исследования и математическое моделирование. *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 3. С. 69–77.
23. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред. *ПМТФ*. 2009. Т. 50. № 6. С. 115–125.
24. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.М. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт. *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 686–697.
25. Grujicica M., Pandurangan B., Qiao R., Cheeseman B.A., Roy W.N., Skaggs R.R., Gupta R. Parameterization of the porous-material model for sand with different levels of water saturation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2008. Vol. 28. P. 20–35. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2007.05.001>.
26. Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. Численное моделирование нагружения песчаного грунта взрывом накладного заряда. *Изв. РАН. МТТ*. 2001. №2. С. 70–77.
27. Borg J.P., Vogler T.J. Mesoscale simulations of a dart penetrating sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2008. Vol. 35. Iss. 12. P. 1435–1440. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2008.07.064>.
28. Tran Q.A., Chevalier B., Breul P. Discrete modeling of penetration tests in constant velocity and impact conditions. *Computers and Geotechnics*. 2016. Vol. 71. P. 12–18. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.08.010>.
29. Borvik T., Dey S., Olovsson L. Penetration of granular materials by small-arms bullets. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 75. P. 123–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.07.016>.
30. Qin Fang, Jinhua Zhang, Yadong Zhang, Jinchun Liu. Mesoscopic investigation of the sand particulate system subjected to intense dynamic loadings. *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 89. P. 62–71. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.11.009>.
31. Zhang L., Lambert S., Nicot F. Discrete dynamic modelling of the mechanical behaviour of a granular soil. *International Journal of Impact Engineering*. 2017. Vol. 103. P. 76–89. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.01.009>.
32. Wadi H. Imseeh, Khalid A. Alshibli. 3D finite element modelling of force transmission and particle fracture of sand. *Computers and Geotechnics*. 2018. Vol. 94. P. 184–195. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2017.09.008>.
33. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Константинов А.Ю. Сравнительный анализ сил сопротивления внедрению конических и пирамидальных тел в упругопластическую среду. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №3. С. 338–347.

References

1. Borg J.P., Morrissey M.P., Perich C.A., Vogler T.J., Chhabildas L.C. In situ velocity and stress characterization of a projectile penetrating a sand target: Experimental measurements and continuum simulations. *Int. J. Impact Eng.* 2013. Vol. 51. P. 23–35. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2012.07.009>.
2. Park H., Chen W. Stress variations and particle movements during penetration into granular materials. T. Proulx (ed.). *Dynamic Behavior of Materials, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series 99*. 2011. Vol. 1. P. 85–92. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0216-9_11.
3. Collins A.L., Addiss J.W., Walley S.M., Promratana K., Bobaru F., Proud W.G., Williamson D.M. The effect of rod nose shape on the internal flow fields during the ballistic penetration of sand. *Int. J. Impact Eng.* 2011. Vol. 38. Iss. 12. P. 951–963. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2011.08.002>.
4. Savvateev A.F., Budin A.V., Kolikov V.A., Rutberg P.G. High-speed penetration into sand. *Int. J. Impact Eng.* 2001. Vol. 26. Iss. 1–10. P. 675–681. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(01\)00132-4](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(01)00132-4).
5. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. *J. Appl. Phys.* 1957. Vol. 28. No 3. P. 370–376.
6. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. Part II. *J. Appl. Phys.* 1957. Vol. 28. Iss. 3. P. 1331–1335. <https://doi.org/10.1063/1.1722750>.
7. Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskii M.Yu., Fedorov S.V. Computation of non-deformable striker penetration into low strength obstacles using piezoelectric accelerometry data. *Technical Physics*. 2011. Vol. 56. No 7. P. 992–1002. <https://doi.org/10.1134/S1063784211070231>.
8. Balandin V.I.V., Balandin V.I.V., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental study of the dynamics of penetration of a solid body into a soil medium. *Technical Physics*. 2016. Vol. 61. No 6. P. 860–868. <https://doi.org/10.1134/S1063784216060037>.
9. Bivin Yu.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into soil medium. *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45. Iss. 6. P. 892–920. <https://doi.org/10.3103/S0025654410060130>.
10. Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B. Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength. *Int. J. Solids Struct.* 1981. Vol. 17. Iss. 9. P. 915–924. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90106-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90106-2).
11. Omidvar M., Malioche J.D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *Int. J. Impact Eng.* 2015. Vol. 85. P. 146–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002>.
12. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Cent. Eur. J. Eng.* 2014. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–19. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0135-4>.
13. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu., Balandin V.V. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. Vol. 54. Iss. 4. P. 612–621. <https://doi.org/10.1134/S0021894413040123>.
14. Cuncheng Shi, Mingyang Wang, Jie Li, Mengshen Li. A model of depth calculation for projectile penetration into dry sand and comparison with experiments. *Int. J. Impact Eng.* 2014. Vol. 73. P. 112–122. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.06.010>.
15. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. Modelirovanie protsessov dinamicheskogo vnedreniya prostranstvennykh tel v szhimaemuyu uprugoplasticheskuyu sredu [Modeling the processes of dynamic penetration of dimensional bodies in a compressible elastoplastic medium]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2017. No 4. P. 92–108. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.07 (In Russian).
16. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya ustoychivosti dvizheniya tel vrashcheniya v myagkikh gruntovykh sredakh [Numerical-analytical method for investigation the stability of motion of bodies of rotation in soft soil media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 2017. Vol. 81. No. 6. P. 688–698 (In Russian).
17. Aptukov V.N., Khasanov A.R. Optimizatsiya parametrov sloistykh plit pri dinamicheskom

pronikaniy zhestkogo indentora s uchetom treniya i oslablyayushchego effekta svobodnykh poverkhnostey [Optimization of parameters of layered plates during dynamic hard indenter penetration with friction and weakening effect of free surfaces]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2014. No 2. P. 48–75. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.2.03 (In Russian).

18. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Cent. Eur. J. Eng.* 2012. Vol. 2. No 4. P. 473–482. DOI: 10.2478/s13531-012-0022-4.

19. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kotov V.L. Analysis of models for calculating the motion of solids of revolution of minimum resistance in soil media. *J. Appl. Math. Mech.* 2014. Vol. 78. Iss. 1. P. 65–76. <https://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.05.008>.

20. Kotov V.L., Linnik E.Yu. Study of motion of optimal bodies in the soil of grid method. *11th International Conference on Mesh Methods for Boundary-value Problems and Applications*. 20–25 Oct. 2016. Kazan. 2016. P. 012058. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012058.

21. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Krylov S.V., Balandin V.V., Bragov A.M., Tsvetkova E.V. Experimental-theoretical analysis of non-stationary interaction of deformable impactors with soil. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2001. Vol. 42. Iss. 6. P. 1083–1089. <https://doi.org/10.1023/A:1012590517033>.

22. Balandin V.V., Bragov A.M., Igumnov L.A., Konstantinov A.Yu., Kotov V.L., Lomunov A.K. Dynamic deformation of soft soil media: Experimental studies and mathematical modeling. *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50. Iss. 3. P. 286–293. <https://doi.org/10.3103/S002565441503005X>.

23. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental-theoretical study of the penetration of rigid projectiles and identification of soil properties. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2009. Vol. 50. Iss. 6. P. 1011–1019. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0135-6>.

24. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L., Kochetkov A.V. An investigation of the impact and penetration of solids of revolution into soft earth. *J. Appl. Math. Mech.* 2003. Vol. 67. Iss. 4. P. 611–620. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90064-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90064-5).

25. Grujicica M., Pandurangan B., Qiao R., Cheeseman B.A., Roy W.N., Skaggs R.R., Gupta R. Parameterization of the porous-material model for sand with different levels of water saturation. *Soil Dynam. Earthquake Eng.* 2008. Vol. 28. P. 20–35. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2007.05.001>.

26. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Feldgun V.R. Chislennoe modelirovanie nagruzheniya peschanogo grunta vzryvom nakladnogo zaryada [On wave processes in soil subjected to a surface charge explosion]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2001. Vol 36. Iss. 2. P. 62–68 (In Russian).

27. Borg J.P., Vogler T.J. Mesoscale simulations of a dart penetrating sand. *Int. J. Impact Eng.* 2008. Vol. 35. Iss. 12. P. 1435–1440. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2008.07.064>.

28. Tran Q.A., Chevalier B., Breul P. Discrete modeling of penetration tests in constant velocity and impact conditions. *Comput. Geotech.* 2016. Vol. 71. P. 12–18. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.08.010>.

29. Borvik T., Dey S., Olovsson L. Penetration of granular materials by small-arms bullets. *Int. J. Impact Eng.* 2015. Vol. 75. P. 123–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.07.016>.

30. Qin Fang, Jinhua Zhang, Yadong Zhang, Jinchun Liu. Mesoscopic investigation of the sand particulate system subjected to intense dynamic loadings. *Int. J. Impact Eng.* 2016. Vol. 89. P. 62–71. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.11.009>.

31. Zhang L., Lambert S., Nicot F. Discrete dynamic modelling of the mechanical behaviour of a granular soil. *Int. J. Impact Eng.* 2017. Vol. 103. P. 76–89. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.01.009>.

32. Wadi H. Imseeh, Khalid A. Alshibli. 3D finite element modelling of force transmission and particle fracture of sand. *Comput. Geotech.* 2018. Vol. 94. P. 184–195. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2017.09.008>.

33. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. Sravnitelnyi analiz sil soprotivleniya vnedreniiu konicheskikh i piramidal'nykh tel v uprugoplasticheskuii sredu [Comparative analysis of resistance to the introduction of conical and pyramidal bodies to the elastic plastic environment]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 3. P. 338–347 (In Russian).

MODELING INERTIAL PENETRATION OF NON-AXISYMMETRIC BODIES INTO SOILS, ACCOUNTING FOR FRICTION

Linnik E.Yu.¹, Kotov V.L.,¹ Sayapin S.V.²,
Alheddo M.², Konstantinov A.Yu.^{1,3}

¹*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

³*Bakhirev State Research Institute of Mechanical Engineering,
Nizhny Novgorod Region, Dzerzhinsk, Russian Federation*

The problem of a normal impact and penetration of rigid spatial bodies of a finite mass into a half-space occupied by an elastoplastic soil medium. The penetrated medium is modeled by linearly compressible elastoplastic Grigoryan medium, with the yield strength linearly depending on pressure. The problem is analyzed in a 3D formulation, using software package LS-DYNA. The elastoplastic penetrated medium is analyzed on a fixed Eulerian grid with empty meshes, where the material flows to in the process of deformation. Spatial strikers are modeled by a rigid non-deformable body in a Lagrangian coordinate system.

The effect of surface friction during the penetration of strikers of various forms (a round cone, a four-ray star and a pyramidal body) into elastoplastic Grigoryan soil medium is studied. The cross-section of the star-shaped body is generated by two rhombs with the ration of diagonals of 1:2; the base of the pyramid is a rhomb with the ratio of diagonals of 1:3. The analyzed bodies have equal areas of the bases and equal inclinations of the side surface (the angle between the direction of the motion velocity vector of the body and a normal to the side surface). A circular cone with the same base area is considered for comparison.

The considered strikers moved with constant velocities and mechanically, in the velocity range of 150 to 600 m/s, corresponding to subsonic and supersonic velocities. The surface friction coefficient is close to the value of the friction coefficient in sandy soils of natural composition. The results are compared with the earlier obtained computational results for a zero friction coefficient. It is found that resistance to penetration and penetration depth can be described using binomial Resale's penetration law with a quadratic velocity. The disagreement between the forces of resistance to penetration of a pyramidal, conical and star-shaped bodies of the same height are within the interval of 10–20%.

Keywords: penetration, surface friction, elastoplastic medium, conical drummer, pyramidal bodies, local interaction model, three-dimensional modeling.