

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-513-520

## УПРОЩЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ПОКРЫТИЕМ\*

© 2018 г.

Садырин Е.В.<sup>1,2</sup>, Игумнов Л.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Научно-исследовательский институт механики*

*Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

rainesquall@icloud.com

*Поступила в редакцию 05.07.2018*

Рассматривается контактная задача о вдавливании жесткого сферического штампа в линейно-упругое изотропное полупространство с функционально-градиентным или однородным покрытием. Задача сведена к решению парного интегрального уравнения. Используя однопараметрическую аппроксимацию трансформанты ядра интегрального уравнения в виде отношения двух квадратичных функций, содержащего всего один параметр, получено приближенное асимптотически точное решение задачи в упрощенном аналитическом виде. Решение позволяет учесть как упругие свойства покрытия, так и вклад подложки. В этом случае схема построения приближенного аналитического решения существенно упрощается по сравнению с общим случаем. Получены упрощенные аналитические выражения, описывающие контактные давления, силу, глубину и жесткость индентирования. Исследована точность полученного решения в зависимости от отношения модулей упругости покрытия и подложки, характера изменения модуля упругости, значения относительной толщины покрытия. Показано, что предложенные формулы позволяют с достаточно высокой точностью описать решение задачи для тонких и толстых покрытий, а также для покрытий произвольной толщины в случае относительно небольшого отличия модулей упругости покрытия и подложки. Использование простой однопараметрической аппроксимации дает возможность получить решение задачи в явном аналитическом виде, удобном на практике для инженерных расчетов.

*Ключевые слова:* контакт, внедрение, сферический индентор, упрощенное аналитическое решение, покрытие, функционально-градиентные материалы.

### Введение

Одним из способов повышения надежности и увеличения сроков эксплуатации деталей машин, элементов строительных конструкций, компонентов микро- и

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-38-50175 мол\_нр).

наноэлектроники, а также других изделий современной промышленности является модификация исходной поверхности изделий путем нанесения защитных покрытий. Подобные покрытия могут обладать многослойной или функционально-градиентной структурой. На практике для определения механических характеристик покрытий используется наноиндентирование.

Для интерпретации результатов, полученных с помощью наноиндентирования, широко распространены методы, в основе которых лежат математические модели, использующие решения классических контактных задач для изотропных однородных материалов. Оливер и Фарр предложили [1], а затем модернизировали [2] метод для определения твердости и модуля Юнга однородных изотропных материалов, в основе которого лежит решение Снеддона для осесимметричного индентора [3]. Для интерпретации результатов индентирования сферическим индентором Филд и Свэйл [4] предложили метод, который использует решение Герца задачи о внедрении сферического индентора в однородное полупространство. Несмотря на то, что указанные методы не учитывают влияние подложки на результаты эксперимента, при определенных условиях проведения эксперимента (внедрение индентора на глубину, не превышающую 10% толщины покрытия [5]) и определенных соотношениях механических свойств покрытия и подложки [6–8] они позволяют восстанавливать свойства однородных покрытий. Однако при таком подходе в случае значительного различия модулей Юнга покрытия и подложки восстановленное значение модуля Юнга покрытия может быть сильно занижено или завышено. Кроме того, эти подходы не могут быть применены для определения модуля Юнга тонких покрытий, так как требуемая глубина внедрения становится сравнимой с высотой шероховатости поверхности.

Для исследования свойств неоднородных и тонких покрытий, а также однородных покрытий при наличии существенного различия свойств покрытия и подложки необходимо прибегать к методам, в основе которых лежат математические модели, использующие решения контактных задач для тел с покрытиями. Например, в работах Ке и Ванга [9], Лиу с соавторами [10], Гулера и Эрдогана [11] построены решения плоской и осесимметричной контактных задач для упругих материалов с покрытием. Сингулярное интегральное уравнение задачи решалось методом коллокации. Аргатов с соавторами [12–14] разработали математические модели для наноиндентирования образцов с однослойным однородным толстым покрытием с использованием инденторов различной формы. В работах Айзиковича, Васильева, Волкова с соавторами [15–17] решения осесимметричных и плоских контактных задач для упругих тел с функционально-градиентным покрытием построены с использованием двухстороннего асимптотического метода [18]. Преимущества этого подхода состоят в том, что он эффективен для всего диапазона значений относительной толщины покрытия и позволяет моделировать произвольное изменение упругих свойств по глубине покрытия. Однако разработанные модели являются многопараметрическими, их достаточно трудно использовать на практике.

Настоящая статья посвящена построению максимально простой математической модели индентирования сферического штампа, позволяющей учесть как упругие свойства покрытия, так и вклад подложки. В основе модели лежит решение осесимметричной контактной задачи о внедрении недеформируемого индентора в упругое полупространство с неоднородным по глубине покрытием, построенное с использованием двухстороннего асимптотического метода [18]. Аппроксимация

трансформанты ядра интегрального уравнения найдена в виде отношения двух квадратичных функций и содержит всего один параметр. В этом случае схема построения приближенного аналитического решения существенно упрощается по сравнению с общим случаем [15–17]. Использование простой однопараметрической аппроксимации дает возможность получить решение задачи в явном аналитическом виде, удобном на практике для инженерных расчетов.

## 1. Постановка задачи

Математическая модель внедрения сферического индентора в образец с покрытием строится на основе контактной задачи линейной теории упругости. Индентор моделируется недеформируемым сферическим штампом радиусом  $R$  (результаты могут быть без труда обобщены на случай деформируемого упругого индентора [19]). Образец моделируется упругим полупространством, состоящим из неоднородного по глубине упругого слоя (покрытия) толщиной  $H$  и однородного полупространства (подложки).

Рассмотрим цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  направлена по нормали к поверхности полупространства и проходит через центр штампа. Под действием центрально приложенной силы  $P$  центр штампа сместится на величину  $\delta$ . Считаем силы трения между основанием штампа и упругим слоем пренебрежимо малыми. Модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  полупространства изменяются с глубиной по следующим законам:

$$\{E, \nu\} = \begin{cases} \{E_c(z), \nu_c(z)\}, & -H \leq z \leq 0; \\ \{E_s, \nu_s = \text{const}\}, & -\infty < z < -H. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее индекс  $c$  соответствует покрытию, индекс  $s$  – подложке.

Пусть координата  $r$  отнесена к радиусу зоны контакта  $a$ . Тогда граничные условия на поверхности полупространства ( $z = 0$ ) имеют вид:

$$\tau_{zr} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > 1, \\ w = -\delta + a^2 r^2 / 2R, & r \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Считаем, что на границе между покрытием и подложкой ( $z = -H$ ) выполнены условия полного сцепления:

$$\tau_{zr}^{(c)} = \tau_{zr}^{(s)}, \quad \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, \quad w^{(c)} = w^{(s)}, \quad u^{(c)} = u^{(s)}. \quad (3)$$

Здесь  $u, w$  – смещения вдоль осей  $r$  и  $z$  соответственно;  $\sigma_z, \sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{zr}$  – компоненты тензора напряжений. Требуется найти распределение контактных давлений под штампом:

$$\sigma_z|_{z=0} = -p(r), \quad r \leq 1. \quad (4)$$

## 2. Решение задачи

Используя технику интегральных преобразований Ханкеля, из (2) можно получить интегральное уравнение [16, 17]:

$$\int_0^1 p(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \lambda \Theta (\delta - a^2 r^2 / 2R) a^{-1}, \quad r \leq 1. \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения:  $\lambda = H/a$  – относительная толщина покрытия;  $L(u)$  – трансформанта ядра интегрального уравнения, которая определяется численно из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [15];  $J_0$  – функция Бесселя;  $\Theta$  и  $\Theta_s$  – константы, характеризующие эффективные упругие свойства поверхности покрытия и подложки:

$$\Theta = \frac{E_c(0)}{2(1 - \nu_c^2(0))}, \quad \Theta_s = \frac{E_s}{2(1 - \nu_s^2)}. \quad (6)$$

Для решения уравнения (5) аппроксимируем функцию  $L(u)$  выражением:

$$L(u) \approx L_N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad A_i, B_i \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Тогда решение задачи имеет вид [17]:

$$p(r) = \frac{4a\Theta_s}{\pi R} \left[ \sqrt{1 - r^2} + \sum_{i=1}^N C_i \frac{A_i}{\lambda} \int_r^1 \frac{\sinh(A_i \lambda^{-1} t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right], \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (8)$$

Константы  $C_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i A_i \left[ \frac{B_k \sinh(A_i \lambda^{-1}) + A_i \cosh(A_i \lambda^{-1})}{B_k^2 - A_i^2} \right] = -\frac{\lambda(B_k + \lambda)}{B_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Выражения для осадки штампа и силы вдавливания имеют вид [16]:

$$\delta = \frac{a^2}{R} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^N C_i \cosh\left(\frac{A_i}{\lambda}\right) + 2\lambda^2 \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{A_i^2} - \frac{1}{B_i^2} \right) \right], \quad (10)$$

$$P = \frac{8a^3\Theta_s}{3R} \left[ 1 + 3 \sum_{i=1}^N C_i \left( \cosh\left(\frac{A_i}{\lambda}\right) - \frac{\lambda}{A_i} \sinh\left(\frac{A_i}{\lambda}\right) \right) \right]. \quad (11)$$

При анализе экспериментов по наноиндентированию на практике используется функция жесткости индентирования  $S = dP/d\delta$  [1]. Ее значение может быть определено экспериментально, как угол наклона касательной к кривой разгрузки (график зависимости «прикладываемая сила – осадка индентора») в верхней точке этой кривой (при максимальной глубине внедрения индентора). Функция имеет вид:

$$S = 4a\Theta_s \frac{1 + 3 \sum_{i=1}^N C_i (\cosh(A_i \lambda^{-1}) - A_i^{-1} \lambda \sinh(A_i \lambda^{-1}))}{1 + 2 \sum_{i=1}^N C_i \cosh(A_i \lambda^{-1}) + 2\lambda^2 \sum_{i=1}^N (A_i^{-2} - B_i^{-2})}. \quad (12)$$

Доказано [18], что полученное решение (8)–(12) является асимптотически точным для больших и малых значений геометрического параметра задачи  $\lambda$ , при этом погрешность решения для средних значений параметра  $\lambda$  связана с точностью аппроксимации функции податливости. На примере задачи о кручении показано, что эти погрешности являются величинами одного порядка малости [20].

Для того чтобы максимально упростить решение, положим в (7)  $N = 1$ . Важно отметить, что аппроксимация трансформанты ядра строится таким образом, чтобы выполнялось условие  $L_N(0) = L(0)$ . Введем параметр  $\beta = \Theta_s/\Theta$ , характеризующий «мягкость» покрытия. Учтем также, что  $L(0) = \beta^{-1}$ , откуда  $B = \sqrt{\beta}A$ . Таким образом, из (8)–(12) получим упрощенное решение:

$$p(r) = \frac{4a\Theta_s}{\pi R} \left[ \sqrt{1-r^2} + \frac{(\sqrt{\beta} + \lambda A^{-1})(\beta^{-1} - 1)}{\sqrt{\beta} \sinh(A\lambda^{-1}) + \cosh(A\lambda^{-1})} \int_r^1 \frac{\sinh(A\lambda^{-1}t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right], \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (13)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} (1 + 2\sqrt{\beta}\Delta_0), \quad P = \frac{8a^3\Theta_s}{3R} (1 + 3(\sqrt{\beta} + \lambda A^{-1})\Delta_0), \quad (14)$$

$$S = 4a\Theta_s \left( 1 + \frac{\sqrt{\beta} + 3\lambda A^{-1}}{1 + 2\sqrt{\beta}\Delta_0} \Delta_0 \right), \quad \Delta_0 = \frac{\lambda}{A^2} (\beta^{-1} - 1) \frac{A - \lambda \tanh(A\lambda^{-1})}{1 + \sqrt{\beta} \tanh(A\lambda^{-1})}. \quad (15)$$

### 3. Численные результаты

Для иллюстрации полученных упрощенных решений рассмотрен набор однородных и функционально-градиентных покрытий. Пусть модуль Юнга подложки равен некоторому значению  $E_0$ , а коэффициент Пуассона покрытия и подложки равен 0,33. Рассмотрим ряд однородных покрытий, для которых  $\beta = 0,1; 0,2; 0,5; 2; 5; 10$  (будем называть их покрытиями 1–6 соответственно), и четыре функционально-градиентных покрытия:

– покрытия 7 и 8

$$E_c^{\text{lin}} = E_0 \left( \beta - (1 - \beta) \frac{z}{H} \right), \quad \beta = 0,5; 2;$$

– покрытия 9 и 10

$$E_c^{\text{exp}} = E_0 \left( \frac{\beta e^k - 1}{e^k - 1} - \frac{\beta - 1}{e^k - 1} e^{-kz/H} \right), \quad k = -3; \beta = 0,5; 2.$$

Для однородных покрытий 1–6 построены однопараметрические аппроксимации ( $N = 1$ ) с погрешностями 18,4; 11,8; 3,8; 4,3; 12,6 и 2,7% соответственно. Для функционально-градиентных покрытий 7–10 погрешности составляют 3,8; 6,8; 6,8 и 9,3%. Видно, что чем больше значение  $\beta$  отличается от единицы, тем выше погрешность однопараметрической аппроксимации. Однако для многих рассмотренных примеров даже однопараметрическая аппроксимация позволяет получить достаточно высокую точность решения задачи. Погрешность многопараметрической аппроксимации ( $N \gg 1$ ) для всех рассмотренных покрытий ниже 0,3%, что позволяет говорить о высокой точности результатов, полученных с использованием многопараметрической аппроксимации, и использовать их при оценке точности результатов при однопараметрической аппроксимации.

Для анализа решения задачи введем безразмерные величины:

$$\delta_0 = \frac{\delta}{\delta_{\text{hom}}} = \frac{\delta R}{a^2}, \quad P_0 = \frac{P}{P_{\text{hom}}} = \frac{3RP}{8a^3\Theta_s}, \quad S_0 = \frac{S}{S_{\text{hom}}} = \frac{S}{4a\Theta_s}, \quad (16)$$

где  $P_{\text{hom}}$ ,  $\delta_{\text{hom}}$ ,  $S_{\text{hom}}$  – вдавливающая сила, смещение штампа и жесткость индентирования в задаче Герца для однородного полупространства с упругими свойствами, совпадающими с подложкой.

На рис. 1–3 изображены графики безразмерной силы, глубины и жесткости индентирования для однородных покрытий 1–6 (рис. 1а, 2а, 3а) и функционально-градиентных покрытий 7–10 (рис. 1б, 2б, 3б) при  $N = 1$  (сплошные линии) и  $N \gg 1$  (пунктирные линии). На графиках использована логарифмическая шкала.

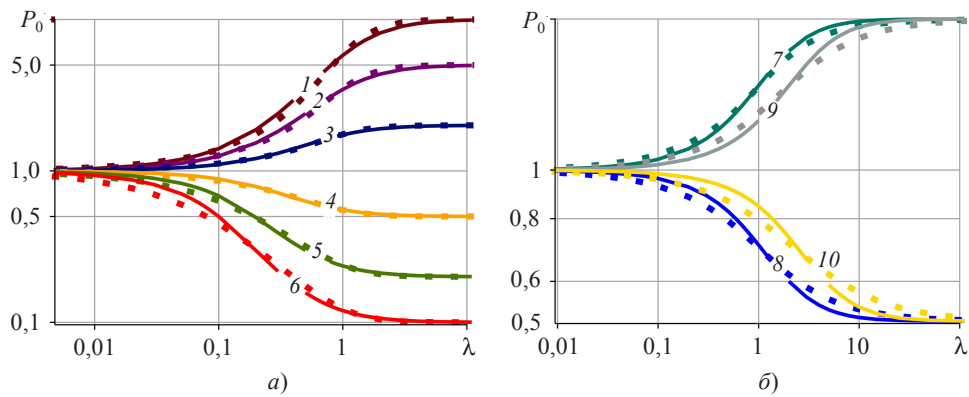


Рис. 1. Вдавливающая сила

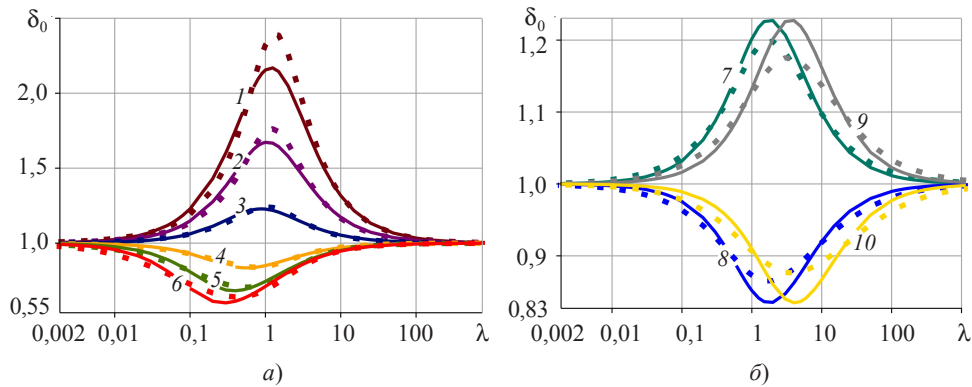


Рис. 2. Глубина индентирования

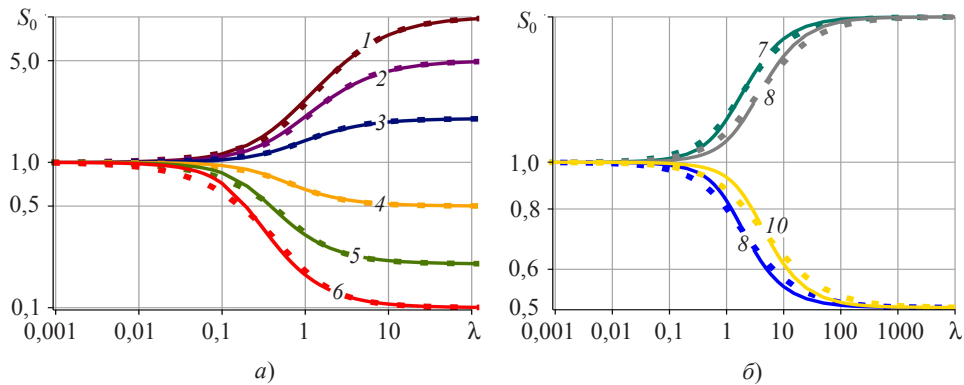


Рис. 3. Жесткость индентирования

При  $\lambda \rightarrow 0$  значения  $P_0$ ,  $\delta_0$ ,  $S_0$  стремятся к единице, это означает, что сила, глубина и жесткость индентирования практически совпадают со значениями задачи Герца, соответствующими подложке. Для  $\lambda \rightarrow \infty$  значения  $P_0$  и  $S_0$  стремятся к  $\beta^{-1}$ , а  $\delta_0$  стремится к 1. Это означает, что эти величины совпадают со значениями задачи Герца при модулях упругости поверхности покрытия  $E_c(0)$ ,  $\nu_c(0)$ . Следует помнить, что сравнение происходит при одинаковых значениях параметра  $\lambda$ , то есть равной области контакта. Наблюдается хорошее совпадение результатов при малых и боль-

ших значениях  $\lambda$  для всех рассмотренных примеров. Для средних значений  $\lambda$  наблюдается хорошее совпадение результатов в случае небольшого отличия модулей упругости покрытия и подложки.

### Заключение

Получены упрощенные аналитические выражения, описывающие контактные давления, силу, глубину и жесткость индентирования при внедрении сферического индентора в полупространство с однородным или функционально-градиентным покрытием. Исследование точности этих формул показало, что упрощенные формулы позволяют с достаточно высокой точностью описать решение задачи для тонких и толстых покрытий, а также для покрытий произвольной толщины в случае относительно небольшого отличия модулей упругости покрытия и подложки.

### References

1. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*. 1992. Vol. 7. Iss. 6. P. 1564–1583.
2. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *Journal of Materials Research*. 2004. Vol. 19. Iss. 1. P. 3–20.
3. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *International Journal of Engineering Science*. 1965. Vol. 3. No 1. P. 47–57.
4. Field J. S., Swain M.V. Determining the mechanical properties of small volumes of material from submicrometer spherical indentations. *Journal of Materials Research*. 1995. Vol. 10. Iss. 1. P. 101–112.
5. Bückle H. The science of hardness testing and its research applications. *American Society for Metals*. Ohio. 1973. P. 453–494.
6. Chen J., Bull S.J. On the factors affecting the critical indenter penetration for measurement of coating hardness. *Vacuum*. 2009. Vol. 83. No 6. P. 911–920.
7. Veprek-Heijman M.G.J., Veprek S. The deformation of the substrate during indentation into superhard coatings: Bückle's rule revised. *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 206–214.
8. Panich N., Sun Y. Effect of penetration depth on indentation response of soft coatings on hard substrates: a finite element analysis. *Surface and Coatings Technology*. 2004. Vol. 182. No 2-3. P. 342–350.
9. Ke L.L., Wang Y.S. Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. No 18-19. P. 5779–5798.
10. Liu T.J., Wang Y.S., Zhang C. Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials. *Archive of Applied Mechanics*. 2008. Vol. 78. No 4. P. 267–282.
11. Guler M.A., Erdogan F. Contact mechanics of graded coatings. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. No 14. P. 3865–3889.
12. Argatov I.I., Sabina F.J. Asymptotic analysis of the substrate effect for an arbitrary indenter. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2013. Vol. 66. No 1. P. 75–95.
13. Argatov I.I., Sabina F.J. Small-scale indentation of an elastic coated half-space: the effect of compliant substrate. *International Journal of Engineering Science*. 2016. Vol. 104. P. 87–96.
14. Argatov I. Frictionless and adhesive nanoindentation: Asymptotic modeling of size effects. *Mechanics of Materials*. 2010. Vol. 42. No 8. P. 807–815.
15. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikov S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 11–15.

16. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Belov A.A., Litvinchuk S.Y., Aizikovich S.M. Indentation of a hard transversely isotropic functionally graded coating by a conical indenter. *International Journal of Engineering Science*. 2017. Vol. 112. P. 63–75.

17. Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. №4. С. 20–34.

Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugogo myagkogo funktsionalno-gradientnogo pokrytiya pri vnedrenii sfericheskogo indentora [Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2016. No 4. P. 20–34 (In Russian).

18. Aizikovich S.M. Asymptotic solutions of contact problems of elasticity theory for media inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46. No 1. P. 116–124.

19. Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M. Lubricated point heavily loaded contacts of functionally graded materials. Part 1. Dry contacts. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. doi: 10.1177/1081286517704689.

20. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem of the torsion of an elastic half-space inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 77. No 1. P. 91–97.

## SIMPLIFIED ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SPHERICAL INDENTOR PENETRATION INTO HALF-SPACE WITH COATING

Sadyrin E.V.<sup>1,2</sup>, Igumnov L.A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Research and Education Center “Materials”, Don State Technical University,  
Rostov-on-Don, Russian Federation*

The contact problem of a rigid spherical punch penetration into a linearly elastic isotropic half-space with a functionally graded or homogeneous coating is considered. The problem is reduced to solving the dual integral equation. Using a one-parameter approximation of the kernel transform of an integral equation in the form of a ratio of two quadratic functions containing only one parameter, an approximate asymptotically exact solution of the problem was obtained in a simplified analytical form. The solution allows one to take into account both the elastic properties of the coating and the contribution of the substrate. In this case, the scheme for constructing an approximate analytical solution is significantly simplified in comparison to the general case. Simplified analytical expressions describing contact pressure, force, depth, and indentation rigidity are obtained. The accuracy of the solution obtained is investigated depending on the ratio of the elastic moduli of the coating and the substrate, the nature of the change in the elastic modulus, and the relative thickness of the coating. It is shown that the proposed formulas allow to achieve a sufficiently high accuracy for describing the solution of the problem for thin and thick coatings, as well as for coatings of arbitrary thickness in the case of a relatively small difference in the elastic moduli of the coating and substrate. Using a simple one-parameter approximation makes it possible to obtain a solution to the problem in an explicit analytical form, convenient in practice for engineering calculations.

*Keywords:* contact, penetration, spherical indenter, simple analytical solution, functionally graded coating.