

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-477-493

**О СПОСОБНОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО
СООТНОШЕНИЯ РАБОТНОВА ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ
МАТЕРИАЛОВ МОДЕЛИРОВАТЬ ДИАГРАММЫ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ С ПАДАЮЩИМ УЧАСТКОМ***

© 2018 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 11.09.2018

Исследуется физически нелинейное определяющее соотношение Ю.Н. Работнова с двумя произвольными материальными функциями для изотропных реономных материалов с целью определения комплекса моделируемых реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости. Выведено уравнение семейства диаграмм деформирования с постоянными скоростями, порождаемых этим соотношением в условиях одноосного квазистатического нагружения, аналитически изучены их общие качественные свойства, зависимости от скорости деформирования и характеристик материальных функций. Обнаруженные свойства сопоставлены с типичными свойствами диаграмм испытаний вязкоупругопластичных материалов и с общими свойствами диаграмм деформирования, порождаемых линейным интегральным соотношением вязкоупругости Больцмана – Вольтерры с произвольной функцией ползучести, которое соотношение Работнова обобщает в одноосном случае; указаны унаследованные свойства и свойства, приобретенные вследствие введения второй материальной функции. В частности, доказано, что соотношение Работнова моделирует только положительную скоростную чувствительность, а при стремлении скорости нагружения к нулю или бесконечности семейство диаграмм деформирования соотношения Работнова сходится к предельным кривым (мгновенного или равновесного деформирования). Получены достаточные условия монотонного возрастания диаграмм деформирования и наличия у них максимума. Показано, что определяющее соотношение Работнова может качественно описывать разупрочнение материала, то есть диаграммы деформирования с точкой максимума и ниспадающей ветвью, наблюдаемые в квазистатических испытаниях многих материалов. Способностью описывать деформационное разупрочнение соотношение Работнова кардинально отличается от линейного определяющего соотношения вязкоупругости Больцмана – Вольтерры, которое порождает только возрастающие и выпуклые вверх диаграммы деформирования.

Ключевые слова: вязкоупругость, физическая нелинейность, диаграммы деформирования, положительная скоростная чувствительность, равновесная диаграмма деформирования, деформационное разупрочнение.

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_a).

Введение

Свойства диаграмм деформирования σ – ε , построенных по одноосным квазистатическим испытаниям материала при постоянных скоростях нагружения или деформации, – важнейшие характеристики механического поведения вязкоупругопластичных материалов, служащие экспериментальной основой для их классификаций, постановок краевых задач по определению полей напряжений и перемещений в деформируемых телах и расчетов на прочность элементов конструкций. Общие свойства семейств теоретических диаграмм деформирования (ДД) при постоянных скоростях нагружения или деформации, порождаемых любой моделью (определяющим соотношением, связывающим историю изменения напряжения, деформации и температуры в точке тела или ее окрестности), которые могут быть обнаружены в результате аналитического изучения общего уравнения диаграмм при произвольных материальных функциях (МФ) и параметрах, – ценные паспортные данные (наряду со свойствами кривых ползучести, релаксации, циклических нагружений и др.), позволяющие выявить арсенал ее возможностей по описанию различных реологических эффектов, очертить область применимости и разработать эффективные методики ее идентификации и настройки.

Настоящая статья продолжает цикл работ [1–10] по качественному анализу физически нелинейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости Ю.Н. Работнова

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

и сопоставлению его арсенала возможностей и области применимости с возможностями линейного ОС вязкоупругости Больцмана – Вольтерры

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

которое оно обобщает посредством введения второй МФ $\varphi(u)$ [11]. ОС (1) и (2) описывают изотермические процессы деформирования нестареющих реономных материалов с памятью (здесь рассматриваются одноосные варианты ОС); $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация; $\Pi(t)$, $R(t)$ – функции ползучести и релаксации. Входные процессы $\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими.

Если $R(0+) < \infty$ (модель регулярна), то $\Pi(0+) \neq 0$ и на пространстве непрерывных кусочно-гладких функций операторы (1) представимы в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon(t)) &= \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \\ \sigma(t) &= R(0)\varphi(\varepsilon(t)) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varphi(\varepsilon(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $y(0) = y(0+)$ – обозначение предела справа функции $y(t)$ в точке $t = 0$.

ОС (3), обобщающее линейное ОС (2) с регулярной функцией ползучести путем введения МФ φ , было предложено Работновым в 1948 году [11]. В [12] оно называлось «соотношением наследственной теории пластичности» и «ползучести», в [13, с. 209] – «наследственной теорией ползучести», в [14] было дано название

«нелинейная теория наследственности». В [11–26] ОС (1) прилагалось к описанию поведения стеклопластиков, графита, металлов, сплавов и композитов при разных режимах деформирования, а в [27–41] – к описанию поведения связок, сухожилий и др. биологических тканей (см. более подробный обзор в [7, 8]). В англоязычных работах ОС (1) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV) [27–41], а его автором считается Y.C. Fung со ссылкой на его работы 1970–90-х годов [27, 31]. Аналитического изучения общих свойств основных теоретических квазистатических кривых (кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях нагружения, при циклическом нагружении и др.), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ Π и φ , систематического исследования комплекса моделируемых (и немоделируемых) эффектов в зависимости от характеристик МФ и необходимых феноменологических ограничений на МФ φ (и следствий из них) не проводилось в [11–41]; границ области применимости ОС (1) и их маркеров (за исключением подобия изохронных кривых ползучести в [11–20] и подобия кривых релаксации в [37–39]) выявлено не было. В частности, вопросы о зависимости качественных свойств ДД ОС (1) от МФ, об интервалах монотонности и выпуклости ДД и о способности ОС (1) описывать течение при постоянном напряжении и убывающие участки ДД не затрагивались в литературе, хотя разупрочнение наблюдается в квазистатических испытаниях многих упруговязкопластичных материалов (сталей, титановых, алюминиевых и магниевых сплавов, полимеров, твердых топлив, асфальтобетонов и др.) в определенных температурно-скоростных режимах и структурных состояниях [42–53] и представляет большой интерес для оптимизации технологий штамповки.

Цель настоящей статьи, как и публикаций [6–10, 54], – восполнить эти пробелы, выявить возможности ОС (1) (в частности по сравнению с линейным ОС (2)) и содействовать уточнению и расширению сферы его обоснованного применения в моделировании поведения реономных материалов с выраженной нелинейной наследственностью и скоростной чувствительностью (полимеров, пен, композитов, геотканей, асфальтобетонов, твердых топлив, алюминиевых и титановых сплавов, нержавеющей стали, керамики, сухожилий, связок, стенок сосудов и других биологических тканей). Как показал анализ [1–10], ОС Работнова наследует многие свойства линейного ОС (2) с произвольными функциями релаксации и ползучести, в частности, порождаемые им ДД сохраняют ряд свойств, присущих ДД ОС (2). Но наличие второй МФ φ в ОС (1) и управление ее свойствами обеспечивает дополнительные возможности. Например, линейное ОС (2) с убывающей функцией релаксации порождает только возрастающие и выпуклые вверх диаграммы деформирования с постоянной скоростью [1, 2] и не может описывать разупрочнение материала. В настоящей статье доказывается, что нелинейное ОС (1) способно моделировать ДД с участками выпуклости вниз и убывания.

1. Ограничения на материальные функции соотношения (1)

Линейное ОС вязкоупругости (2) получается из (1) при $\varphi(u) = u$ и содержит лишь одну независимую МФ, так как функции ползучести и релаксации связаны условием взаимной обратности операторов (2):

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau)d\tau = t. \quad (4)$$

Поэтому из трех МФ φ , Π , R ОС (1) лишь две независимы, а соотношение (4) – условие взаимной обратности операторов (1), отображающих друг в друга функции $\sigma(t)$ и $e(t) = \varphi(\varepsilon(t))$. На функции ползучести и релаксации в ОС (1) налагаем те же минимальные ограничения, что и в линейной теории: $\Pi(t)$ и $R(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ – возрастающей и выпуклой вверх [2], а $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз на $(0; \infty)$; $R(t)$ может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует существование пределов $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$, $R(0) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если $R(t)$ не ограничена сверху) и $R(+\infty) \geq 0$ [2].

На МФ $\varphi(u)$ в ОС (1) налагаем следующие первичные требования [6–9]: $\varphi(u)$, $u \in (\omega_-, \omega_+)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-, 0) \cup (0, \omega_+)$, причем $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t) = 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Формально возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$ и $\varphi'(0) = +\infty$. Из возрастания φ следует существование обратной функции $\Phi = \varphi^{-1}$ на промежутке $D_\varphi = (\underline{x}, \bar{x})$, где $\bar{x} = \sup \varphi(u) = \varphi(\omega_+ - 0)$, $\underline{x} = \inf \varphi(u) = \varphi(\omega_- + 0)$, и обратимость ОС (1). Величины \bar{x} и \underline{x} (и их конечность или бесконечность) – важные характеристики МФ φ , существенно влияющие на поведение теоретических кривых ОС (1) [6–9]. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии МФ φ нечетна и $\omega_- = -\omega_+$.

Для задания МФ φ удобным является, например, семейство функций

$$y(x) = A[\vartheta(x/C)^n + (1-\vartheta)(x/C)^m], \quad (5)$$

$x \geq 0$, $n > 1$, $m < 1$, $\vartheta \in [0; 1]$, $A, C > 0$. При любых значениях пяти параметров (кроме $\vartheta = 0$; 1) $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$, $y(C) = A$, функция (5) возрастает и имеет точку перегиба

$$\tilde{x} = C[q(n, m, \vartheta)]^{1/(n-m)}, \quad q = m(1-m)(1-\vartheta)[n(n-1)\vartheta]^{-1}. \quad (6)$$

За счет выбора ϑ можно совместить точку перегиба с любой точкой $x > 0$. МФ семейства (5) позволяют моделировать кривые ползучести со всеми тремя стадиями (включая стадию разупрочнения) [6, 7] и диаграммы деформирования с выпуклым вниз начальным участком и точкой перегиба (что невозможно при использовании линейного ОС (2) [1, 2]).

В статье [6] показано, что МФ φ можно найти по известной зависимости скорости ползучести материала от напряжения: если $\dot{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})$, то обратная функция $\Phi = \varphi^{-1}$ находится из задачи Коши $x\Phi' = r(x)$, $\Phi(0) = 0$. Например, для дробно-линейного закона $r(\sigma) = A\sigma(\sigma_* - \sigma)^{-1}$, $\sigma \in [0, \sigma_*]$ (σ_* – предел прочности) [55], получаем $\Phi' = A(\sigma_* - x)^{-1}$ и

$$\Phi(x) = A \ln [\sigma_*/(\sigma_* - x)], \quad x \in [0, \sigma_*], \quad \varphi(u) = \sigma_*(1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0. \quad (7)$$

Отметим, что φ совпадает с функцией ползучести модели Фойгта и $\bar{x} = \sigma_* < \infty$.

2. Свойства диаграмм деформирования линейного ОС (2)

Процессу деформирования $\varepsilon = at$, $t > 0$, с постоянной скоростью $a > 0$ линейное ОС (2) ставит в соответствие напряжение

$$\sigma(t) = P(t)\varepsilon,$$

где

$$P(t) = t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau.$$

Исключив параметр $t = \varepsilon/a$, получим ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = \varepsilon P(\varepsilon/a). \quad (8)$$

Из ограничений, налагаемых на $R(t)$ в п. 1, следует [1, 2], что $P(0+) = R(0+)$, $P(+\infty) = R(+\infty)$, $\dot{P}(0) = \dot{R}(0)/2$, $P(t)$ – убывающая гладкая функция при $t > 0$, причем $P(t) > R(t)$ и даже $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$ при $t > 0$ [1, 2]; $P(t) = R(t)$ лишь в случае $R(t) = \text{const}$ на $[0, t]$, когда ОС (2) вырождается в закон Гука.

Секущий и касательный модули ДД (8): $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon/a) = R(\varepsilon/a)$. Так как $\sigma'_\varepsilon > 0$, любая ДД (8) возрастает по ε . Из убывания $R(t)$ следует, что σ'_ε убывает по ε , то есть любая ДД с $a > 0$ выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$. ДД (8) зависит от скорости a , но мгновенный модуль $E = \sigma'_\varepsilon(0, a) = R(0)$ (считаем, что $R(0) < \infty$) не зависит от a .

Семейство ДД (8) возрастает по a (чем больше скорость, тем выше лежит ДД), так как $\dot{P}(t) < 0$. Поскольку $R(\infty) = P(\infty) < P(t) < P(0) = R(0)$ при $t > 0$, то в случае $R(0) < \infty$ для всех ДД с $a > 0$ справедлива оценка $R(\infty)\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < R(0)\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

При $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (8) любой регулярной модели сходится к функции $\sigma = E\varepsilon$ равномерно на любом отрезке оси ε : в силу убывания $P(x)$

$$\sup_{[0, \omega]} |\sigma - E\varepsilon| = \sup_{[0, \omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - E| = \omega |P(\omega/a) - E| \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow \infty,$$

так как $P(0+) = R(0+)$. Поэтому прямая $\sigma = E\varepsilon$ – мгновенная ДД. Если модель не регулярна, то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\varepsilon(\sigma, a)$ равномерно сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ касательный и секущий модули стремятся к $r = R(+\infty) \geq 0$. Длительный модуль r тоже не зависит от скорости. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД (8) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$. Это верно и в случае неограниченных или сингулярных функций релаксации (ФР).

Поскольку $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon \rightarrow r$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$, ДД обладает асимптотой только тогда, когда интеграл $I = \int_0^{+\infty} (R(\tau) - r) d\tau$ сходится [1]. Тогда любая ДД (8) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I > 0$, и ее угловой коэффициент не зависит от a . Так как $R(t)$ убывает, то всегда $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$, то есть $\sigma(\varepsilon, a)$ стремится к асимптоте снизу. Например, для модели Кельвина (из двух пружин и демпфера) функция релаксации и ДД (8) имеют вид $R(t) = Ee^{-\mu t} + r$ и

$$\sigma(\varepsilon, a) = E\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (9)$$

При любом a ДД (9) обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I = E\mu^{-1}$.

3. Диаграммы деформирования, порождаемые нелинейным ОС (1)

Программе деформирования $\varepsilon(t) = at$ с постоянной скоростью $a > 0$ ОС (1) ставит в соответствие напряжение

$$\sigma(t, a) = a \int_0^t R(t - \tau) \varphi'(a\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) задает семейство диаграмм деформирования ОС (1) при постоянных скоростях деформации в параметрической форме. Исключая параметр $t = \varepsilon/a$ из (10), получим ДД в привычной форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$:

$$\sigma(\varepsilon, a) = a \int_0^{\varepsilon/a} R(\varepsilon a^{-1} - \tau) \varphi'(a\tau) d\tau \quad \text{или} \quad \sigma(\varepsilon, a) = \int_0^{\varepsilon} R((\varepsilon - x)a^{-1}) \varphi'(x) dx, \quad \varepsilon > 0. \quad (11)$$

Исследуем свойства ДД (11) моделей с регулярными ФР (с $R(0+) < \infty$). Поскольку $\varphi'(x) > 0$ и $\dot{R}(t) > 0$, семейство ДД (11) возрастает по a :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a} = -a^{-2} \int_0^{\varepsilon} \dot{R}((\varepsilon - x)a^{-1}) (\varepsilon - x) \varphi'(x) dx > 0.$$

Таким образом, ОС (1) моделирует положительную скоростную чувствительность, свойственную большинству стабильных материалов, и не может описывать отрицательную скоростную чувствительность (как и линейное ОС (2)).

Так как $R(\infty) < R(t) < R(0)$ для $t > 0$ и $\varphi'(x) > 0$, то в интеграле (11) $R(\infty)\varphi'(x) < R((\varepsilon - x)a^{-1})\varphi'(x) < R(0)\varphi'(x)$, и для всех ДД с $a > 0$ справедлива двусторонняя оценка $R(\infty)\varphi(\varepsilon) < \sigma(\varepsilon, a) < R(0)\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\sigma(0+, a) = 0$ для несингулярных ФР и $\sigma(0, a) = a\eta\varphi'(0)$ для сингулярных.

Если $R(0) < \infty$, то при $a \rightarrow \infty$ $R((\varepsilon - x)a^{-1})\varphi'(x) \rightarrow R(0)\varphi'(x)$, $x \in [0, \varepsilon]$, и потому при любом ε семейство ДД (11) сходится к кривой $\sigma = R(0)\varphi(\varepsilon)$. При $a \rightarrow 0$ $R((\varepsilon - x)a^{-1})\varphi'(x) \rightarrow R(\infty)\varphi'(x)$, и потому семейство ДД (11) сходится к кривой $\sigma = R(\infty)\varphi(\varepsilon)$ (равновесной ДД) при всех ε . Сходимость при $a \rightarrow 0$ имеет место и в случае неограниченных ФР, и в случае сингулярных ФР.

Продифференцируем (11) по ε , чтобы найти интервалы монотонности:

$$\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(0)\varphi'(\varepsilon) + a^{-1} \int_0^{\varepsilon} \dot{R}((\varepsilon - x)a^{-1}) \varphi'(x) dx, \quad \varepsilon > 0, a > 0. \quad (12)$$

При $t \rightarrow 0$ $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a)$ имеет предел $\sigma'_\varepsilon(0+, a) = R(0+)\varphi(0+) > 0$, но при $t > 0$ второе слагаемое в (12) отрицательно (поскольку $\varphi' > 0$, а $\dot{R} < 0$), а первое положительно, и потому ДД не обязаны возрастать по ε (напомним, что ДД линейного ОС (2) с любой ФР возрастают по ε и a). Если же $\varphi'(u)$ нестрого возрастает на $[0, \bar{\varepsilon}]$ (то есть φ нестрого выпукла вниз), то $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) > 0$ и любая ДД (11) возрастает по ε при $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, а функция (10) возрастает по t при $t \in [0, \bar{\varepsilon}/a]$. Действительно, по теореме о среднем для интеграла (12) (в нем функция $\varphi'(x)$ непрерывна при $x \in [0, \varepsilon]$, а $\dot{R}((\varepsilon - x)/a)$ не меняет знак в силу убывания ФР) существует точка $\xi \in (0, \varepsilon)$ (ξ зависит от ε , a и функций R и φ) такая, что

$$\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(0)\varphi'(\varepsilon) + a^{-1}\varphi'(\xi) \int_0^{\varepsilon} \dot{R}((\varepsilon - x)a^{-1}) dx,$$

то есть $\sigma'_\varepsilon = R(0)[\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(\xi)] + \varphi'(\xi)R(\varepsilon/a) > 0$, так как $\varphi'(\varepsilon) > \varphi'(\xi)$ в силу возрастания φ' .

4. Пример модели, порождающей диаграммы деформирования с точкой максимума

Рассмотрим модель с ФР модели Кельвина и МФ $\varphi(u)$ вида (7), дающей дробно-линейную зависимость скорости ползучести от напряжения [55]:

$$\varphi(u) = 1 - e^{-\lambda u}, \quad \lambda > 0, \quad R(t) = E(e^{-\mu t} + r), \quad E, \mu > 0, \quad r \in [0, 1) \quad (13)$$

(она содержит четыре параметра; в частности $1/\mu$ – время релаксации, а r задает отношение $R(\infty) = Er$ к $R(0) = E(1+r)$). ДД (10) этой модели имеют вид:

$$\sigma(t, a) = Ea\lambda(\mu - a\lambda)^{-1}(e^{-a\lambda t} - e^{-\mu t}) - Er(e^{-a\lambda t} - 1), \quad t > 0, \quad a \neq \mu/\lambda. \quad (14)$$

При $a = a_{cr} = \mu/\lambda$ вычисление интеграла (10) дает $\sigma(t, a_{cr}) = E\mu t e^{-\mu t} - Er(e^{-\mu t} - 1)$. При $t \rightarrow \infty$ все ДД (14) имеют общую горизонтальную асимптоту $\sigma = Er$.

Поскольку $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = \dot{\sigma}/\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/a$, знаки σ'_ε и $\dot{\sigma}(t)$ совпадают и достаточно выяснить возможность смены знака $\dot{\sigma}$:

$$\dot{\sigma} = Ea\lambda(\mu - a\lambda)^{-1}[\mu e^{-\mu t} - a\lambda e^{-a\lambda t}] + Era\lambda e^{-a\lambda t}$$

или

$$\dot{\sigma}(t) = Ea\lambda(\mu - a\lambda)^{-1}e^{-\mu t}[\mu - (a\lambda + a\lambda r - \mu r)e^{(\mu - a\lambda)t}] \quad (15)$$

при $a > 0, a \neq \mu/\lambda$. При малых t и ε любая ДД (14) возрастает, так как $\dot{\sigma}(0) = E(1+r) \times a\lambda > 0$ (мгновенный модуль $\sigma'_\varepsilon(0) = E(1+r)\lambda$). Условие экстремума $\dot{\sigma}(t) = 0$ дает

$$e^{(\mu - a\lambda)t} = C, \quad C = \mu/(a\lambda + a\lambda r - \mu r). \quad (16)$$

Если $C < 0$, то есть $a\lambda(1+r) < \mu r$, уравнение (16) не имеет решения, и поэтому при $a < \bar{a} = \mu\lambda^{-1}r/(1+r)$ ДД возрастают на всем луче $t \geq 0$ (или $\varepsilon \geq 0$). Если $C > 0$, то уравнение (16) имеет единственное решение на вещественной оси

$$t_m = (\mu - a\lambda)^{-1} \ln C = -\mu^{-1}(1 - a\lambda\mu^{-1})^{-1} \ln [a\lambda\mu^{-1}(1+r) - r]. \quad (17)$$

Нас интересуют только решения, лежащие в интервале $t > 0$, и следует выяснить, при каких ограничениях на параметры $t_m > 0$. Если $a < \mu/\lambda$ (но $a > \bar{a}$), то $0 < a\lambda + a\lambda r - \mu r < a\lambda < \mu$, $C > 1$, $\ln C > 0$, и по (17) $t_m > 0$. Если же $a > \mu/\lambda$, то $a\lambda + (a\lambda - \mu)r > a\lambda > \mu$, $C < 1$, $\ln C < 0$, и опять по (17) $t_m > 0$. Таким образом, ДД (14) имеет точку максимума $t_m(a) > 0$ при любой скорости

$$a > \bar{a} = \mu\lambda^{-1}r(1+r)^{-1} \quad (18)$$

в случае $C > 0$. Соответствующая деформация:

$$\varepsilon_m = at_m = \lambda^{-1}x(x-1)^{-1} \ln [(1+r)x - r], \quad x = a\lambda\mu^{-1} > r/(1+r). \quad (19)$$

При $a \rightarrow \bar{a} + 0$ $t_m \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_m = at_m \rightarrow +\infty$, то есть точка максимума ДД зарождается на бесконечности. При $a \rightarrow \mu/\lambda$ ($x \rightarrow 1$) имеем $t_m \rightarrow (1+r)/\mu$ и $\varepsilon_m \rightarrow (1+r)/\lambda$ (по правилу Лопиталю), то есть $x = 1$ – точка устранимого разрыва.

Очевидно, что абсцисса точки максимума ДД t_m (и $\varepsilon_m = at_m$) возрастает по r в случае $a\lambda > \mu$ (то есть $a\lambda\mu^{-1} > 1$) и убывает по r в случае $a\lambda < \mu$. Кроме того, t_m убывает по аргументу $a\lambda$ при фиксированном μ при $a\lambda > \mu$, так как $t_m = -\mu^{-1}(1-x)^{-1} \times \ln [(1+r)x - r]$, $x = a\lambda\mu^{-1}$, а множители $(1-x)^{-1}$ и $\ln [(1+r)x - r]$ возрастают при $x > 1$. В частности, t_m убывает по λ и убывает с ростом скорости a (при фиксированных μ, λ, r) на интервале $a > \mu/\lambda$. Вместе с тем зависимость $\varepsilon_m(a) = at_m(a)$ немонотонна.

тонна (имеет точку минимума), если $r > 0$. В самом деле, в силу (19) при $x \rightarrow r/(1+r)$ $\epsilon_m(x) \rightarrow +\infty$, следовательно, в правой окрестности точки $x = r/(1+r)$ $\epsilon_m(x)$ убывает. Можно доказать, что $\epsilon'_m(x) > 0$ при $x > 1$ (и даже при $x > 2r/(1+r)$), то есть $\epsilon_m(x)$ возрастает; следовательно, $\epsilon_m(x)$ имеет в интервале $x \in (r/(1+r), 1)$ хотя бы одну точку минимума.

Рассмотрим модель (13) с $r = 0$ (с ФР модели Максвелла). В этом случае все ДД (14) имеют общую асимптоту $\sigma = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как при малых ϵ любая ДД (14) возрастает, то каждая ДД (с любым $a > 0$) имеет хотя бы одну точку максимума. Она вычисляется по формулам (17), (19):

$$\epsilon_m = \lambda^{-1} x(x-1)^{-1} \ln x, \quad x = a\lambda\mu^{-1} > 0. \quad (20)$$

Пределы при $x \rightarrow 0+0$ и при $x \rightarrow 1\pm 0$: $\epsilon_m(0+) = 0$, $\epsilon_m(1\pm 0) = 1/\lambda$ (то есть $x = 1$ – точка устранимого разрыва). Из (20) следует, что $\epsilon'_m(x) = \lambda^{-1}(x-1)^{-2}[-\ln x + x - 1] > 0$ при $x > 0$, так как $y(x) = -\ln x + x - 1 > 0$ при $x \neq 1$ ($x = 1$ – точка минимума функции $y = -\ln x + x - 1$ и $y(1) = 0$) и $\epsilon'_m(1\pm 0) = 0,5$. Поэтому $\epsilon_m(x)$ возрастает при $x > 0$, а значит, возрастает по a на всем интервале $a > 0$ и возрастает с увеличением времени релаксации $1/\mu$.

На рис. 1 приведены ДД (14) модели (13) с $\lambda = 5$, $\mu = 1$, $E = 10$, $r = 0,2$ для скоростей $a = 0,01i$, $i = \overline{1, 7}$ (сплошные кривые 1–7), и $a = 0,001$ (кривая 0, почти сливающаяся с предельной ДД при $a \rightarrow 0$). Две штрихпунктирные линии – предельные ДД $\sigma = R(0)\varphi(\epsilon)$ и $\sigma = R(\infty)\varphi(\epsilon)$ при $a \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$. Критерий наличия максимума (18) выполняется при $a > \mu\lambda^{-1}r/(1+r) = 1/30$. Общая асимптота всех ДД $\sigma = \varphi(\infty)R(\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид $\sigma = Er$, то есть $\sigma = 2$. Для сравнения штриховыми линиями показаны ДД (9) линейной модели Кельвина с той же ФР (и $\varphi(u) = u$) для $a = 0$, $a = 0,01i$, $i = \overline{1, 5}$, и $a = \infty$ (при $t \rightarrow \infty$ любая из них имеет наклонную асимптоту $\sigma = rE\epsilon + E\mu^{-1}a$, при $a \rightarrow \infty$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = E(r+1)\epsilon$, а при $a \rightarrow 0$ – к прямой $\sigma = rE\epsilon$).

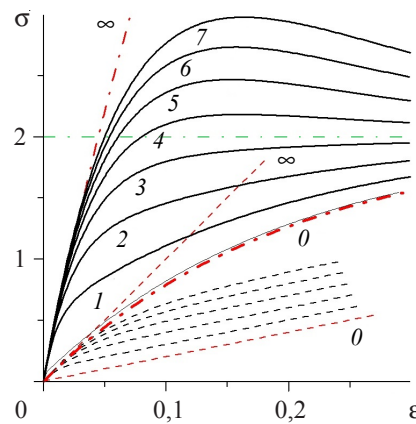


Рис. 1. Диаграммы деформирования (14) модели (13) с $r = 0,2$

На рис. 2 приведены ДД (14) модели (13) с $r = 0$ и такими же остальными параметрами, как на рис. 1, для скоростей $a = 0,01i$, $i = \overline{1, 5}$ (сплошные кривые 1–5), и $a = 0,001$ (кривая 0). Их отличия от ДД с рис. 1:

- 1) асимптота всех ДД при $t \rightarrow \infty$ имеет вид $\sigma = 0$,
- 2) точка максимума есть у ДД при всех $a > 0$,

3) зависимость абсциссы точки максимума (20) от a монотонна (возрастает) на всем интервале $a > 0$,

4) предельная ДД $\sigma = R(\infty)\varphi(\varepsilon)$ при $a \rightarrow 0$ совпадает с прямой $\sigma = 0$.

Штриховыми линиями показаны ДД линейной модели Максвелла с той же ФР (и $\varphi(u) = u$) для $a = 0,01i$, $i = \overline{1, 5}$, и $a = \infty$ (при $t \rightarrow \infty$ ее ДД имеют горизонтальные асимптоты $\sigma = E\mu^{-1}a$, а при $a \rightarrow 0$ их семейство сходится к прямой $\sigma = 0$).

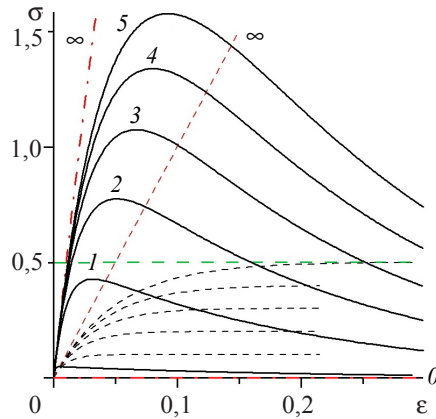


Рис. 2. Диаграммы деформирования (14) модели (13) с $r = 0$

На рис. 3 приведены зависимости от скорости a точки максимума (19) ДД (14) моделей (13) с $r = 0,2$ и $r = 0$ при $\lambda = 5; 10; 20$ ($\mu = 1, E = 10$ – те же, что и на рис. 1 и 2). Кривые 1, 3, 5 (с точками минимума) – для модели с $r = 0,2$, кривые 2, 4, 6 – с $r = 0$ (чем больше λ , тем ниже линия), штриховые прямые – вертикальные асимптоты $\varepsilon_m(a)$ при $r = 0,2$.

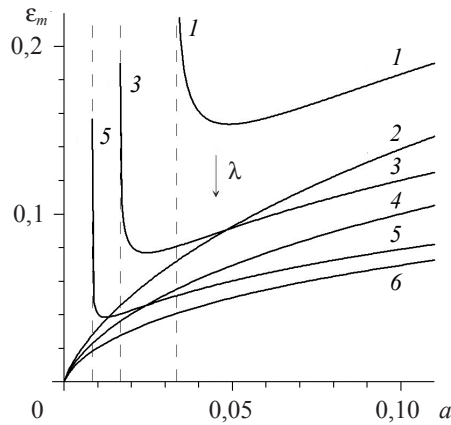


Рис. 3. Зависимости от скорости a точки максимума (19) ДД моделей (13)

ДД (11) ОС (1) могут иметь асимптоту $\sigma = 0$ и точку максимума и в том случае, когда φ не ограничена. Например, ДД модели с $\varphi = \ln(1 + u)$ и $R = t^{-0,5}$.

Формулы (17) (или (19)) можно использовать для идентификации модели (13) по двум ДД материала с разными скоростями деформирования $a = a_i$, на которых наблюдаются точки максимума. Приравняв теоретические значения $\varepsilon_m(a)$ и $\sigma_m(a) = \sigma(\varepsilon_m(a), a)$, вычисленные по формулам (19) и (14), экспериментальным величинам $\varepsilon_m(a)$ и $\sigma_m(a)$, получим по два уравнения для параметров λ, μ, E, r для каждой

скорости $a = a_i$. Четыре уравнения для λ , μ , E , r можно, конечно, получить и по одной ДД материала, минимизируя среднеквадратичное отклонение ДД (14) от экспериментальной ДД, или методом коллокации: выбрав четыре значения ε_i (так, что $\varepsilon_3 = \varepsilon_m(a)$, $\varepsilon_4 > \varepsilon_m$) и приравняв измеренные напряжения $\sigma(\varepsilon_i)$ к вычисленным по (14) напряжениям.

Заключение

На основе аналитического исследования диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации, порождаемых физически нелинейным определяющим соотношением Работнова (1) с двумя произвольными материальными функциями, доказано, что оно способно качественно описывать разупрочнение материала, то есть диаграммы деформирования с точкой максимума и падающей ветвью, наблюдаемые в испытаниях многих реономных материалов. Получены достаточные условия монотонного возрастания ДД и условия наличия у них максимума и убывающей ветви. Приведен пример четырехпараметрической модели (13) (с функцией релаксации модели Кельвина), порождающей ДД с убывающим участком, аналитически изучена зависимость положения точки максимума и асимптоты ДД от скорости деформирования и параметров модели.

Диаграммы деформирования нелинейного ОС (1) наследуют многие свойства ДД, порождаемых линейным ОС вязкоупругости (2) с произвольной функцией релаксации, которое ОС (1) обобщает за счет введения второй материальной функции Φ : положительную скоростную чувствительность, сходимость семейства ДД к предельным кривым при стремлении скорости деформации к нулю и к бесконечности и т.п. Анализ позволил обнаружить и важные отличия и дополнительные возможности ОС (1): линейное ОС (2) с убывающей функцией релаксации порождает только возрастающие и выпуклые вверх диаграммы деформирования с постоянной скоростью и не может описывать разупрочнение материала, а ОС (1) способно моделировать диаграммы деформирования с ниспадающей ветвью и участком выпуклости вниз. Это открывает возможность применения ОС (1) (вероятно, в составе более сложных ОС, учитывающих накопление повреждений и эволюцию структуры материала) в моделировании поведения упруговязкопластичных материалов, которым свойственно деформационное разупрочнение: сталей, титановых, алюминиевых и магниевых сплавов, полимеров, композитов и др.

Список литературы

1. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. № 2. С. 139–154.
2. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2016. №5. С. 187–245. <http://technomagelpub.elpub.ru/jour/article/view/869> (дата обращения: 28.03.2018).
3. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагрузениях, порождаемых линейной теорией наследственности. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2017. Т. 21. № 2. С. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533.
4. Хохлов А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гаупр-деформировании и методики ее идентификации. *Известия РАН. МТТ*. 2018. №3. С. 81–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.

5. Хохлов А.В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. №1. С. 65–95. DOI: 10.14498/vsgtu1543.
6. Хохлов А.В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №4. С. 452–466.
7. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки*. 2017. №3. С. 93–123.
8. Хохлов А.В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гаупр-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова. *Механика композитных материалов*. 2018. Т. 54. №4. С. 687–708.
9. Хохлов А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти. *Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика*. 2017. №5. С. 26–31.
10. Хохлов А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова. *Механика композиц. матер. и конструкций*. 2018. Т. 24. №3. С. 407–436.
11. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием. *Прикладная математика и механика*. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 53–62.
12. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О наследственных теориях ползучести. *Прикладная механика и техническая физика*. 1961. Т. 2. №4. С. 148–150.
13. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
14. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С. 74–87.
15. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории. *Прикладная механика и техническая физика*. 1971. №2. С. 76–82.
16. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250. *Механика полимеров*. 1971. №3. С. 391–397.
17. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. О связи характеристик ползучести стеклопластиков с кривой мгновенного деформирования. *Механика полимеров*. 1971. №4. С. 624–628.
18. Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. *Известия АН СССР. МТТ*. 1972. №4. С. 41–54.
19. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии. *Механика полимеров*. 1973. №5. С. 779–785.
20. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
21. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред. *Механика полимеров*. 1977. №6. С. 976–980.
22. Осокин А.Е., Суворова Ю.В. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров. *Прикладная математика и механика*. 1978. Т. 42. №6. С. 1107–1114.
23. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния. *Механика композитных материалов*. 1993. №5. С. 602–607.
24. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2000. Т. 66. №5. С. 47–51.
25. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Известия РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 174–181.
26. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Анализ вязкоупругих свойств поли-

мерных композитов с углеродными наноаполнителями. *Композиты и наноструктуры*. 2011. №2. С. 28–39.

27. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*. Ed. by Fung Y.C. et al. New Jersey: Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.

28. Фанг Я.Ч. Математические модели зависимости напряжение–деформация для живых мягких тканей. *Механика полимеров*. 1975. №5. С. 850–867.

29. Woo S.L.-Y. Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties. *Biorheology*. 1982. Vol. 19. P. 385–396.

30. Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *Journal of Biomechanical Engineering*. 1983. Vol. 105. P. 92–95.

31. Fung Y.C. Biomechanics. *Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 p.

32. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2000. Vol. 122. P. 15–22.

33. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2003. Vol. 125. No 5. P. 754–758.

34. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2004. Vol. 126. P. 92–97.

35. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. No 14. P. 3070–3078.

36. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.

37. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. P. 23–33.

38. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.

39. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling. *Biorheology*. 2010. Vol. 47. Iss. 1. P. 1–14.

40. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society. A*. Vol. 470. P. 1–18. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.

41. Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *Journal of the Royal Society Interface*. 2015. Vol. 12. No 113. P. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.

42. Park S.W., Schapery R.A. A viscoelastic constitutive model for particulate composites with growing damage. *International Journal of Solids and Structures*. 1997. Vol. 34. No 8. P. 931–947.

43. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. М.: Наука, 1998. 288 с.

44. Jung G.-D., Youn S.-K. A nonlinear viscoelastic constitutive model of solid propellant. *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36. P. 3755–3777.

45. Криштал М.М. Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор). Ч. I. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести. *Физическая мезомеханика*. 2004. Т. 7. №5. С. 5–29.

46. Апетьян В.Э., Быков Д.Л. Анализ немонотонной зависимости напряжений от деформаций в вязкоупругих материалах. *Известия РАН. МТТ*. 2004. №4. С. 106–115.

47. Xu F., Aravas N., Sofronis P. Constitutive modeling of solid propellant materials with evolving microstructural damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. P. 2050–2073.

48. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. 542 p.

49. Lin Y.C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working. *Materials and Design*. 2011. Vol. 32. P. 1733–1759.

50. Liu X., Jonas J.J., Li L.X., Zhu B.W. Flow softening, twinning and dynamic recrystallization in AZ31 magnesium. *Materials Science and Engineering: A*. 2013. Vol. 583. P. 242–253. DOI: 10.1016/j.msea.2013.06.074.

51. Вильдеман В.Э., Ломакин Е.В., Третьяков М.П. Закрытое деформирование сталей при плоском напряженном состоянии. *Известия РАН. МТТ*. 2014. №1. С. 26–36.

52. Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 34. P. 118–127. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028.

53. Xu C., Pan J.P., Nakata T., Qiao X.G., Chi Y.Q., Zheng M.Y., Kamado S. Hot compression deformation behavior of Mg-9Gd-2.9Y-1.9Zn-0.4Zr-0.2Ca (wt%) alloy. *Materials Characterization*. 2017. Vol. 124. No 2. P. 40–49.

54. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Известия РАН. МТТ*. 2018. №6.

55. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния при ползучести. *Известия АН СССР. МТТ*. 1984. №1. С. 86–91.

References

1. Khokhlov A.V. Kharakternye osobennosti semeystv krivyykh deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti [Specific features of stress-strain curves at constant stress rate or strain rate yielding from linear viscoelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 2. P. 139–154 (In Russian).

2. Khokhlov A.V. Kachestvennyy analiz obshchikh svoystv teoreticheskikh krivyykh lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyazkouprugosti [The qualitative analysis of theoretic curves generated by linear viscoelasticity constitutive equation]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MG TU im. N.E. Baumana [Science and Education: Scientific Publication of BMSTU]*. 2016. No 5. P. 187–245. DOI: 10.7463/0516.0840650. URL: <http://technomagelpub.elpub.ru/jour/article/view/869> (In Russian).

3. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivyykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriye nasledstvennosti [Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2017. Vol. 21. No 2. P. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533 (In Russian).

4. Khokhlov A.V. Dvustoronniye otsenki dlya funktsii relaksatsii lineynoy teorii nasledstvennosti cherez krivyye relaksatsii pri ramp-deformirovani i metodiki yeye identifikatsii [Two-sided bounds for relaxation modulus in the linear viscoelasticity via relaxation curves at ramp strain histories and identification techniques]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2018. No 3. P. 81–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108 (In Russian).

5. Khokhlov A.V. Analiz svoystv krivyykh polzuchesti s proizvol'noy nachal'noy stadiyey nagruzheniya, porozhdayemykh lineynoy teoriye nasledstvennosti [Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2018. No 1. P. 65–95. DOI: 10.14498/vsgtu1543. (In Russian).

6. Khokhlov A.V. Krivyye polzuchesti i relaksatsii nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya Yu.N. Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Creep and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear constitutive relation for viscoelastoplastic materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2016. Vol. 78. No 4. P. 452–466 (In Russian).

7. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivyykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhении, porozhdaemykh nelineynym sootnoshением Работнова dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Analysis of general properties of creep curves generated by the Rabotnov nonlinear hereditary

relation under multi-step loadings]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2017. No 3. P. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123 (In Russian).

8. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.

9. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107.

10. Khokhlov A.V. Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koeffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshch'yu nelineynonasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2018. Vol. 24. No 3. P. 407–436 (In Russian).

11. Rabotnov Yu.N. Ravnovesiye uprugoy sredy s posledeystviyem [Equilibrium of elastic medium with heredity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1948. Vol. 12. No 1. P. 53–62 (In Russian).

12. Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. O nasledstvennykh teoriyakh polzuchesti [On the hereditary theories of creep]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 1961. Vol. 2. No 4. P. 148–150 (In Russian).

13. Rabotnov Yu.N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co. 1969. 822 p.

14. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev E.I. Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material. *Polimer Mechanics*. 1971. Vol. 7. No 1. P. 63–73.

15. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1971. Vol. 12. No 2. P. 235–240. DOI: 10.1007/BF00850695.

16. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Nelineynaya polzuchest' stekloplastika TS8/3-250 [Non-linear creep of fibre-glass reinforced plastic TS 8/3-250]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics]. 1971. No 3. P. 391–397 (In Russian).

17. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. O svyazi kharakteristik polzuchesti stekloplastikov s krivoi mgnovennogo deformirovaniya [On connection between fiberglass creep behavior and momentary deforming curve]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics]. 1971. No 4. P. 624–628 (In Russian).

18. Rabotnov Yu.N., Suvorova Yu.V. O zakone deformirovaniya metallov pri odnoosnom nagruzhении [On a law of metals deforming under uni-axial loading]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1972. No 4. P. 41–54 (In Russian).

19. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev E.I. Description of creep of composition materials under tension and compression. *Polymer Mechanics*. 1973. Vol. 9. No 5. P. 690–695. <https://doi.org/10.1007/BF00856259>.

20. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel* [Fundamentals of Hereditary Solid Mechanics]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).

21. Suvorova Yu.V. Nelineynye efekty pri deformirovanii nasledstvennykh sred [Nonlinear effects in case of deformation of hereditary medium]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics]. 1977. No 6. P. 976–980 (In Russian).

22. Osokin A.E., Suvorova Yu.V. Nonlinear governing equation of a hereditary medium and methodology of determining its parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1978. Vol. 42. No 6. P. 1214–1222. DOI: 10.1016/0021-8928(78)90072-2.

23. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nelineynaya model izotropnoy nasledstvennoy sredy dlya sluchaya slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya [Nonlinear model of isotropic hereditary medium under combined stress]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1993. No 5. P. 602–607 (In Russian).

24. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Inzhenernye prilozheniya modeli nasledstvennogo tipa k opisaniiyu povedeniya polimerov i kompozitov s polimernoy matritsey [Engineering application of hereditary model to description of the polymer and polymer matrix composite behavior]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials]*. 2000. Vol. 66. No. 5. P. 47–51 (In Russian).
25. Suvorova Y.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Y.N. Rabotnova i yego prilozheniyakh [Rabotnov's nonlinear hereditary-type equation and its applications]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2004. No 1. P. 174–181 (In Russian).
26. Alekseyeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of the viscoelastic properties of polymer composites with carbon fillers]. *Kompozity i nanostruktury [Composites and Nanostructures]*. 2011. No 2. P. 28–39 (In Russian).
27. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*. Eds. Fung Y.C. et al. New Jersey. Prentice-Hall. 1972. P. 181–208.
28. Fung Y.C. On mathematical models of stress-strain relationship for living soft tissues. *Polymer Mechanics*. 1975. Vol. 11. No 5. P. 726–740. <https://doi.org/10.1007/BF00859649>
29. Woo S. L.-Y. Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties. *Biorheology*. 1982. Vol. 19. P. 385–396.
30. Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *Journal of Biomechanical Engineering*. 1983. Vol. 105. P. 92–95.
31. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New-York. Springer-Verlag. 1993. 568 p.
32. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *Journal of Biomechanics*. 2000. Vol. 122. P. 15–22.
33. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2003. Vol. 125. No 5. P. 754–758.
34. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2004. Vol. 126. P. 92–97.
35. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. No 14. P. 3070–3078.
36. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.
37. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. P. 23–33.
38. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 2009. 461 p.
39. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling. *Biorheology*. 2010. Vol. 47. P. 1–14.
40. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society*. 2014. Vol. 470. P. 1–18. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
41. Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *Journal of the Royal Society Interface*. 2015. Vol. 12. No 113. P. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.
42. Park S.W., Schapery R.A. A viscoelastic constitutive model for particulate composites with growing damage. *International Journal of Solids and Structures*. 1997. Vol. 34. No 8. P. 931–947.
43. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya b razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of Inelastic Deformation and Fracture of Composite Materials]*. Moscow. Nauka Publ. 1998. 288 p. (In Russian).
44. Jung G.-D., Youn S.-K. A nonlinear viscoelastic constitutive model of solid propellant. *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36. P. 3755–3777.
45. Krishtal M.M. Instability and mesoscopic inhomogeneity of plastic deformation (analytical re-

view). Part I. Phenomenology of yield drop and jerky flow. *Physical Mesomechanics*. 2004. Vol. 7. No 5-6. P. 5–26.

46. Apet'yan V.E., Bykov D.L. Analiz nemonotonnoi zavisimosti napryazhenii ot deformatsii v vyazkouprugikh materialakh [Analysis of non-monotonic stress-strain relation in viscoelastic materials]. *Izvestiya RAN. MTT [Mechanics of Solids]*. 2004. No 4. P. 106–115 (In Russian).

47. Xu F., Aravas N., Sofronis P. Constitutive modeling of solid propellant materials with evolving microstructural damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. P. 2050–2073.

48. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York. Nova Science Pub. Inc. 2010. 542 p.

49. Lin Y.C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working. *Materials and Design*. 2011. Vol. 32. P. 1733–1759.

50. Liu X., Jonas J.J., Li L.X., Zhu B.W. Flow softening, twinning and dynamic recrystallization in AZ31 magnesium. *Materials Science and Engineering: A*. 2013. Vol. 583. P. 242–253. DOI: 10.1016/j.msea.2013.06.074.

51. Wildemann V.E., Lomakin E.V., Tretyakov M.P. Postcritical deformation of steels in plane stress state. *Mechanics of Solids*. 2014. No 1. P. 18–26.

52. Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 34. P. 118–127. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028.

53. Xu C., Pan J.P., Nakata T., Qiao X.G., Chi Y.Q., Zheng M.Y., Kamado S. Hot compression deformation behavior of Mg-9Gd-2.9Y-1.9Zn-0.4Zr-0.2Ca (wt%) alloy. *Materials Characterization*. 2017. Vol. 124. No 2. P. 40–49.

54. Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov non-linear relation for viscoelastic materials. *Mechanics of Solids*. 2018. No 6.

55. Shesterikov S.A., Yumasheva M.A. Konkretizatsiya uravneniya sostoyaniya pri polzuchesti [Specification of creep constitutive relation]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1984. No 1. P. 86–91 (In Russian).

ON THE ABILITY OF THE RABOTNOV NON-LINEAR RELATION FOR VISCOELASTIC MATERIALS TO SIMULATE STRESS-STRAIN CURVES WITH A DECREASING SEGMENT

Khokhlov A.V.

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

The Rabotnov physically non-linear constitutive equation with two arbitrary (increasing) material functions for elasto-viscoplastic materials is studied analytically in order to outline the set of basic rheological effects it can simulate, to clarify the material functions governing abilities, to indicate application field of the relation and to develop identification techniques.

Under minimal primary restrictions on two material functions, the general equation of the stress-strain curves family produced by the model at constant strain rates is derived and analyzed in uniaxial case. The main qualitative properties of the stress-strain curves and their dependence on a strain rate and material functions are examined and compared to typical properties of test stress-strain curves of elasto-viscoplastic materials and to the properties of stress-strain curves generated by the Boltzmann – Volterra linear viscoelasticity theory (with arbitrary creep compliance). The last one have been generalized to formulate the Rabotnov relation and so the inherited properties and the new properties acquired due to the introduction of the second material function governing non-linearity are in the focus of attention. In particular, it is proved that the stress-strain curves family increases monotonously as strain rate parameter grow and converges to limit curve (instantaneous or equilibrium) as strain rate tends to zero or infinity. Two-sided bounds for stress-strain curves

and conditions for their monotonicity with respect to strain or for existence of maximum are obtained. It is shown that the Rabotnov constitutive equation is able to simulate (qualitatively) deformation softening of materials, i.e. a non-monotone behavior and existence of a decreasing segment of stress-strain curves in tensile tests under constant strain rate condition. The linear viscoelasticity theory fails to do it as it generates only increasing and convex-up stress-strain curves.

Keywords: viscoelasticity, physical non-linearity, constant strain rate tests, stress-strain curves, positive rate sensitivity, equilibrium stress-strain curve, softening.