

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-456-465

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПАНЕЛИ С УЧЕТОМ ГИДРОТЕРМОУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ*

© 2018 г.

Баничук Н.В.^{1,2}, Иванова С.Ю.¹

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Российская Федерация*

²*Московский физико-технический институт,
Москва, Российская Федерация*

banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 20.08.2018

Рассматривается прямолинейное движение полотна, находящегося под воздействием продольного натяжения и моделируемого термоупругой неразрезной панелью (балкой), поддерживаемой системой закрепленных шарнирных опор, реализующих условия простого опирания в конечных точках пролетов панели. В процессе прямолинейного движения панель совершает термоупругие поперечные колебания. Поперечные перемещения определяют локальные, кориолисовы и центробежные ускорения. Предполагается, что тепловое воздействие на панель приводит к стационарному температурному распределению по толщине панели и к соответствующим температурным усилиям и деформациям. Считается, что продольное движение и возникающие поперечные колебания происходят при взаимодействии панели с внешней средой, моделируемой идеальной жидкостью, движущейся с постоянной скоростью. Применяется точное интегро-дифференциальное выражение для реакции движущейся с фиксированной скоростью жидкости, полученное в рамках теории тонких аэродинамических профилей. Получено приближенное среднее значение, аппроксимирующее реакцию жидкости дифференциальным выражением и сводящее исходное интегро-дифференциальное уравнение динамики панели к упрощенному дифференциальному уравнению. Описываемая модель предполагает малость гидротермоупругих деформаций и соответствует приближению присоединенных масс жидкости при аппроксимации точного выражения для гидротермоупругой реакции. Это приводит к существенным упрощениям развиваемой гидротермоупругой модели и допускает эффективное применение аналитических и полуаналитических подходов для анализа динамики и устойчивости рассматриваемой системы. Численная реализация гидротермоупругой модели, описывающей нестационарное поведение панели, движущейся в потоке идеальной жидкости, основывается на применении полудискретной схемы метода Галеркина. Задача нестационарной динамики, описываемой уравнением в частных производных, сведена к интегрированию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

* Выполнено по теме Госзадания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310380-1) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-00775а).

новых дифференциальных уравнений. Рассмотрена задача статической неустойчивости движущейся панели в потоке идеальной жидкости. Введение вспомогательной переменной позволяет сформулировать краевую задачу на собственные значения, из решения которой в аналитической форме находятся критические значения параметров статической неустойчивости. Эффективность описанной гидротермоупругой модели иллюстрируется на примерах полудискретного анализа нестационарных колебаний и аналитического решения задачи потери устойчивости при критических температурах и скоростях движения системы.

Ключевые слова: продольное движение материала, гидротермоупругость, поперечные колебания, присоединенные массы, потеря устойчивости.

Введение

Проблемы, возникающие в процессе математического моделирования движущихся в потоке жидкости деформируемых термоупругих элементов конструкций (струн, полотен, балок, панелей, неразрезных пластин, дисков и др.), представляют определенный теоретический и прикладной интерес. Такие задачи рассматривались в ряде публикаций (см., например, статьи [1–5] и монографии [6, 7], в которых содержится широкий обзор научной литературы по указанной проблематике). При этом исследовались как процессы неустановившихся колебаний, так и задачи упругой неустойчивости в статической и динамической постановках, то есть задачи о дивергенции и флаттере. Исследование бифуркации движущегося в продольном направлении и совершающего поперечные статические и динамические отклонения (колебания) упругого полотна с учетом воздействия на полотно центробежных и кориолисовых сил, а также локальных нестационарных воздействий и действующих в плоскости полотна стационарных натяжений представлено в статьях [8–10]. Учету влияния вязкоупругих свойств полотна на динамические характеристики продольно движущихся панелей посвящены публикации [11–13]. Изучение вопросов устойчивости ускоренно движущихся вязкоупругих балок и пластин с учетом переменности сил натяжения отражено в [14, 15]. Взаимодействие движущегося материала и окружающей среды оказывает значительное влияние на динамическое поведение системы. Отметим исследования колебаний полотна в воздухе [16] и проведенный статический и динамический анализ взаимодействия продольно движущейся пластины с потоком движущейся аксиально идеальной жидкости [17]. Вопросы анализа и оптимизации, связанные с возможным разрушением и потерей стабильности движущегося полотна, рассматривались в [18]. Настоящая статья посвящена изучению продольного движения термоупругой неразрезной панели, совершающей малые поперечные колебания в потоке идеальной жидкости.

Основные соотношения

Рассматривается прямолинейное движение полотна, находящегося под воздействием продольного натяжения и моделируемого термоупругой неразрезной панелью (балкой), поддерживаемой системой закрепленных шарнирных опор, реализующих условия простого опирания в конечных точках пролетов панели. В процессе прямолинейного движения панель совершает термоупругие поперечные колебания. Предполагается, что тепловое воздействие на панель приводит к стационарному температурному распределению по толщине панели и соответствующим температурным

усилиям и деформациям. Считается, что продольное движение и возникающие поперечные колебания происходят при взаимодействии панели с внешней средой, моделируемой идеальной жидкостью, которая движется с постоянной скоростью.

Уравнение поперечных колебаний движущейся в потоке идеальной жидкости и находящейся под воздействием продольного натяжения упругой неразрезной панели для одного пролета (предполагается шарнирное опирание в точках $x = \pm l$) записывается в эйлеровых координатах в виде [7]:

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (T_0 - T_\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q_f + g, \quad (1)$$

где m – масса на единицу площади панели, V_0 – скорость панели в продольном направлении, w – перемещения в поперечном направлении, $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ – изгибная жесткость, h – толщина панели, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, T_0 и T_θ – растягивающее усилие в плоскости панели и усилие температурного (теплового) сжатия. Выражение в круглых скобках в первом члене левой части уравнения (1) представляет собой полное ускорение панели, включающее в себя локальное, кориолисово и центробежное ускорения. Правая часть уравнения (1) – сумма реакции жидкости $q_f = q_f(w)$, зависящей от упругих перемещений, и внешних воздействий $g = g(x, t)$, прикладываемых к панели в поперечном направлении. Температурные усилия T_θ и деформации ε_θ определяются выражениями [19]:

$$T_\theta = \frac{Eh}{1 - \nu} \varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{h} \alpha_\theta \int_{-h/2}^{h/2} (\theta_{\text{abs}}(z) - \theta_0) dz. \quad (2)$$

Здесь предполагается, что коэффициент линейного теплового расширения $\alpha_\theta = \text{const}$, а температурная функция имеет вид $\theta = \theta(z) = \theta_{\text{abs}}(z) - \theta_0$, где θ_{abs} и отсчетная температура θ_0 задаются в кельвинах.

Дальнейшие исследования проводятся в области Ω в безразмерных переменных $x' = x/l$, $t' = t/\tau$ (штрихи у безразмерных величин далее опускаются), где

$$\tau = \frac{l}{C}, \quad C = \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}, \quad T = T_0 - T_\theta.$$

$$(x, t) \in \Omega, \quad \Omega = \{(x, t): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\},$$

$2l$ – величина пролета.

Точное выражение для реакции движущейся со скоростью v_∞ в продольном направлении вдоль оси x идеальной жидкости, полученное в рамках теории тонких аэродинамических профилей [1, 7, 20–22], записывается в виде:

$$q_f = -\frac{\rho_f}{l} \left(\frac{l}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + v_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-1}^1 N(\xi, x) \left(\frac{l}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} + v_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \right) w(\xi, t) d\xi, \quad (3)$$

$$N(\xi, x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 + \Lambda}{1 - \Lambda} \right|, \quad \Lambda = \left[\frac{(1-x)(1+\xi)}{(1-\xi)(1+x)} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где ρ_f – плотность жидкости.

Учитывая дельтаобразное поведение функции $N(\xi, x)$ при $\xi \rightarrow x$ и ее приближенное среднее значение

$$\text{mean}_{x \in (-1,1)} \int_{-1}^1 N(\xi, x) d\xi \approx \frac{\pi}{4}, \quad (5)$$

аппроксимируем реакцию жидкости дифференциальным выражением:

$$q_f = -m_a \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2v_\infty}{l\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{v_\infty^2}{l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad m_a = \frac{\pi l}{4} \rho_f, \quad (6)$$

где m_a – присоединенная масса жидкости.

Введем выражение $g'(x', t') = g(lx', \tau t')l/T$ для безразмерной внешней нагрузки и безразмерных поперечных деформаций $w' = w/l$ (штрихи далее опускаем) и используем следующие безразмерные коэффициенты:

$$\alpha = \frac{l}{\tau C}, \quad \beta = \frac{D}{l^2 T}, \quad c = \frac{V_0}{C},$$

$$\kappa = \frac{v_\infty}{C}, \quad r_m = \frac{m_a}{m}, \quad r_v = \frac{v_\infty}{V_0}$$

для удобного безразмерного представления развиваемой гидротермоупругой модели. С учетом приведенных соотношений и введенных коэффициентов уравнение (1) и соответствующие безразмерные граничные и начальные условия записываются в виде:

$$\alpha^2 (1 + r_m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha c (1 + r_v r_m) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} +$$

$$+ [c^2 (1 + r_v^2 r_m) - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (7)$$

$$(w)_{x=\pm 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm 1} = 0, \quad (w)_{t=0} = g_1(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = g_2(x).$$

Здесь g_1 и g_2 – безразмерные функции, заданные при $-1 \leq x \leq 1$.

Применение метода Галеркина для анализа динамики системы

Для численной реализации гидротермоупругой модели, описывающей нестационарное поведение панели, движущейся в потоке идеальной жидкости, применим метод Галеркина. Перемещение w представим в виде ряда Галеркина

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \Psi_n(x), \quad (8)$$

где через $\Psi_n(x)$ обозначены функции формы

$$\Psi_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{2} (x+1) \right), \quad x \in [-1, 1],$$

удовлетворяющие граничным условиям рассматриваемой модели. Далее согласно методу Галеркина с помощью умножения уравнения (7) на функции формы $\Psi_j(x)$ и последующего интегрирования по области $\{x \in (-1, 1)\}$ выводится слабая форма уравнения (7). Подстановка в получающееся уравнение ряда Галеркина (8) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha^2 (1+r_m) A_{jn} \frac{d^2 f_n}{dt^2} + 2\alpha c (1+r_v r_m) B_{jn} \frac{df_n}{dt} + [(c^2(1+r_v^2 r_m) - 1) C_{jn} + \beta D_{jn}] f_n \right\} - G_j(t) = 0, \quad j, n = 1, 2, 3, \dots,$$

коэффициенты которой вычисляются с использованием заданных функций формы:

$$A_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_n \Psi_j dx = \delta_{jn},$$

$$B_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j \frac{d\Psi_n}{dx} dx = \begin{cases} 0, & j = n, \\ \frac{nj}{n^2 - j^2} ((-1)^{j+1} - 1), & j \neq n, \end{cases}$$

$$C_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} dx = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \delta_{jn},$$

$$D_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j \frac{d^4 \Psi_n}{dx^4} dx = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^4 \delta_{jn}.$$

В этих формулах δ_{jn} – дельта Кронекера. Задание функций $g(x, t)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, входящих в рассматриваемую гидротермоупругую модель, и функций формы $\Psi_n(x)$ непосредственно приводит к определению функций и начальных параметров, фигурирующих в полудискретной схеме метода Галеркина:

$$G_j(t) = \int_{-1}^1 g(x, t) \Psi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(f_j)_{t=0} = \int_{-1}^1 \Psi_j g_1 dx, \quad \left(\frac{df_j}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^1 \Psi_j g_2 dx.$$

Полагая $g_1(x) = g_2(x) = 0$ ($-1 \leq x \leq 1$) и $g(x, t) = 1$ ($(x, t) \in \Omega$) и применяя метод Галеркина с двумя функциями формы, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + K_{11} f_1 - K_{12} - K_0 \frac{df_2}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} + K_{21} f_2 - K_{22} + K_0 \frac{df_1}{dt} = 0$$

с соответствующими нулевыми начальными условиями и силовыми факторами $G_1(t) = 4/\pi$, $G_2(t) = -2/\pi$. Коэффициенты K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} и K_0 выражаются через основные параметры модели, а функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ находятся с применением численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, например, по методу Рунге – Кутты. При этом колебательный процесс описывается следующим выражением:

$$w = f_1(t) \Psi_1(x) + f_2(t) \Psi_2(x) = f_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) + f_2(t) \sin(\pi(x+1)).$$

Исследование статической неустойчивости панели

В качестве другого применения гидротермоупругой модели рассмотрим задачу статической неустойчивости движущейся панели в потоке идеальной жидкости. При статическом анализе устойчивости в уравнении (7) полагается $\partial^2 w / \partial t^2 = \partial^2 w / \partial x \partial t = 0$ и $g(x, t) = 0$. На основании гидротермоупругой модели в этом случае будем иметь однородное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции прогибов $w = w(x)$:

$$[c^2(1 + r_v^2 r_m) - 1] \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta \frac{d^4 w}{dx^4} = 0.$$

Введем новую переменную $\psi(x) = d^2 w / dx^2$ и сформулируем краевую задачу на собственные значения, в которой собственное значение обозначено через λ :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \lambda \psi = 0, \quad \psi(-1) = 0, \quad \psi(1) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\beta} [c^2(1 + r_v^2 r_m) - 1]. \quad (9)$$

Из решения задачи (9)

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{j\pi}{2}(x+1)\right), \quad \lambda = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^2, \quad j = 1, 2, \dots,$$

следует, что минимальное значение λ соответствует $j = 1$ и, значит, $\lambda_{\min} = \pi^2/4$. Таким образом, на основании минимальной величины собственного значения и выражения (9) для λ приходим к основному выражению для критических параметров статической неустойчивости

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{l^2}{D} \left(mV_0^2 + m_a v_\infty^2 - T_0 + \frac{Eh}{1-\nu} \epsilon_\theta \right), \quad (10)$$

представленному с использованием размерных величин. Как следует из (10) и выражений для деформации ϵ_θ и приведенной массы m_a , справедливы формулы для критической скорости дивергенции

$$(V_0^2)_{\text{div}} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\pi^2 D}{4l^2} + T_0 - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_\theta \theta - \frac{\pi l}{4} \rho_f v_\infty^2 \right\}$$

и для критической температуры потери устойчивости

$$\theta_{\text{div}} = \frac{1-\nu}{Eh\alpha_\theta} \left\{ T_0 + \frac{\pi^2 D}{4l^2} - mV_0^2 - \frac{\pi l}{4} \rho_f v_\infty^2 \right\}.$$

Влияние приведенной массы на критическую скорость дивергенции оценивается при помощи соотношений

$$\left(\frac{V_0}{v_\infty} \right)_{\text{div}} = \left(K - \frac{m_a}{m} \right)^{1/2}, \quad K = \frac{1}{v_\infty} \left(\frac{\pi^2 D}{4ml^2} + \frac{T}{m} \right)$$

и показано на рис. 1 в виде семейства сплошных линий, соответствующих значениям $K = \overline{1, 4}$.

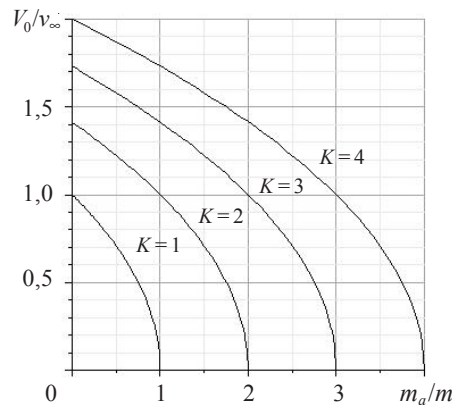


Рис. 1

Некоторые замечания и выводы

В настоящей статье изучение движения термоупругой неразрезной панели в потоке идеальной жидкости ограничивается примером исследования статической неустойчивости (дивергенции), возникающей при критической температуре и скорости движения.

Более общим подходом к исследованию устойчивости линейных систем является бифуркационный подход, включающий в себя, в частности, статический и динамический методы. Так, при исследовании динамической устойчивости в рамках развиваемой модели и сделанных предположений полагается $w(x, t) = \Psi_n(x) \exp \{s_n t\}$, где s_n – характеристические показатели. При этом определяющее нестационарное уравнение сводится к алгебраическому уравнению относительно показателя экспоненты, определяющему критические параметры динамической неустойчивости (флаттера). Наименьшее значение скорости панели, при которой один из показателей s_n переходит на правую полуплоскость, оставаясь при этом комплексным, является критической скоростью флаттера. Аналогично определяется критическая температура флаттера.

В статье предложена новая математическая модель движения упругой панели, взаимодействующей с температурным полем и потоком идеальной жидкости. Модель основана на учете термодформаций в плоскости панели и сведении реакции потока к воздействию на панель присоединенных масс жидкости. Это приводит к значительным упрощениям анализа движения и устойчивости панели. Эффективность описанной гидротермоупругой модели проиллюстрирована на примерах полудискретного анализа нестационарных колебаний и аналитического решения задачи потери устойчивости при критических температурах и скоростях движения панели.

Список литературы

1. Баничук Н.В., Миронов А.А. Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации. *Прикладная математика и механика*. 1976. Т. 40. № 2. С. 520–527.
2. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. О продольном движении панели при механических и температурных воздействиях. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. № 2. С. 123–130.
3. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимальное подавление возмущений движущихся термоупругих панелей. *Доклады РАН*. 2018. Т. 478. № 1. С. 29–33.

4. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Об устойчивости продольного движения ортотропных термоупругих пластин. *Доклады РАН*. 2018. Т. 482. №5 (В печати).
5. Marynowski K., Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 81. P. 26–41.
6. Marynowski K. *Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 140 p.
7. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. Springer International Publishing, Switzerland. 2014. 253 p.
8. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. No 1. P. 91–99.
9. Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. On the limit velocity and buckling phenomena of axially moving orthotropic membranes and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. No 13. P. 2015–2025.
10. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. Theoretical study on travelling web dynamics and instability under non-homogeneous tension. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 66. P. 132–140.
11. Saksa T., Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Tuovinen T. Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels. *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. No 23-24. P. 3355–3366.
12. Seddighi H., Eipakchi H. Natural frequency and critical speed determination of an axially moving viscoelastic beam. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2013. Vol. 17. No 4. P. 529–541.
13. Saksa T., Jeronen J. Dynamic analysis for axially moving viscoelastic Poynting–Thomson beams. *International Conference on Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics (MMOM), Jyväskylä, Finland, Mar. 06-07, 2014. In: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Book Series: Computational Methods in Applied Sciences*. Springer International Publishing, Switzerland. 2016. Vol. 40. P. 259–279.
14. Chen L.-Q., Tang Y.-Q. Parametric stability analysis of axially accelerating moving viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2012. Vol. 134. No 1. 011008 (11 pages).
15. Tang Y.-Q., Chen L.-Q. Stability analysis and numeral confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed. *European Journal of Mechanics – A: Solids*. 2013. Vol. 37. P. 106–121.
16. Chang Y.B., Moretti P.M. Interaction of fluttering webs with surrounding air. *TAPPI Journal* 1991. Vol. 74. No 3. P. 231–236.
17. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. Dynamical behavior of an axially moving plate undergoing small cylindrical deformation submerged in axially flowing ideal fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2011. Vol. 27. No 7. P. 985–1005.
18. Banichuk N., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tirronen M., Tuovinen T. Optimization and analysis of processes with moving materials subjected to fatigue fracture and instability. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2013. Vol. 41. No 2. P. 146–167.
19. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
20. Bisplinghoff R.L., Ashley H. *Principles of Aeroelasticity*. New York: Dover Publications, 1962. 527 p.
21. Ashley H., Landahl M. *Aerodynamics of Wings and Bodies*. New York: Dover, 1965. 304 p.
22. Andersen J.D.Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1985. 760 p.

References

1. Banichuk N.V., Mironov A.A. Skhema struynogo obtekaniya dlya issledovaniya ravnovesnykh form uprugikh plastin v potoke zhidkosti i zadachi optimizatsii [Flow wrap diagram for studying equilibrium forms of elastic plates in a fluid flow and optimization problems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1976. Vol. 40. No 2. P. 520–527 (In Russian).
2. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. O prodolnom dvizhenii paneli pri mekhanicheskikh i temperaturnykh vozdeystviyakh [On axial motion of the panel under mechanical and temperature actions].

Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]. 2016. Vol. 78. No 2. P. 123–130 (In Russian).

3. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimal damping of perturbations of moving thermoelastic panel. *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63. Iss 1. P. 13–17.

4. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. On the stability of the longitudinal motion of orthotropic thermoelastic plates. *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63. Iss. 10 (In printing).

5. Marynowski K., Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 81. P. 26–41.

6. Marynowski K. *Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin. Springer-Verlag. 2008. 140 p.

7. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. Springer International Publishing. Switzerland. 2014. 253 p.

8. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. No 1. P. 91–99.

9. Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. On the limit velocity and buckling phenomena of axially moving orthotropic membranes and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. No 13. P. 2015–2025.

10. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. Theoretical study on travelling web dynamics and instability under non-homogeneous tension. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 66. P. 132–140.

11. Saksa T., Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Tuovinen T. Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels. *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. No 23-24. P. 3355–3366.

12. Seddighi H., Eipakchi H. Natural frequency and critical speed determination of an axially moving viscoelastic beam. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2013. Vol. 17. No 4. P. 529–541.

13. Saksa T., Jeronen J. Dynamic analysis for axially moving viscoelastic Poynting–Thomson beams. *International Conference on Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics (MMOM)*. Jyväskylä, Finland, Mar. 06-07, 2014. In: *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Book Series: Computational Methods in Applied Sciences*. Springer International Publishing. Switzerland. 2016. Vol. 40. P. 259–279.

14. Chen L.-Q., Tang Y.-Q. Parametric stability analysis of axially accelerating moving viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2012. Vol. 134. No 1. 011008 (11 pages).

15. Tang Y.-Q., Chen L.-Q. Stability analysis and numeral confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed. *European Journal of Mechanics – A: Solids*. 2013. Vol. 37. P. 106–121.

16. Chang Y.B., Moretti P.M. Interaction of fluttering webs with surrounding air. *TAPPI Journal* 1991. Vol. 74. No 3. P. 231–236.

17. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. Dynamical behavior of an axially moving plate undergoing small cylindrical deformation submerged in axially flowing ideal fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2011. Vol. 27. No 7. P. 985–1005.

18. Banichuk N., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tirronen M., Tuovinen T. Optimization and analysis of processes with moving materials subjected to fatigue fracture and instability. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2013. Vol. 41. No 2. P. 146–167.

19. Kovalenko A.D. *Termouprugost [Thermoelasticity]*. Kiev. Vysshaya shkola Publ. 1975. 216 p. (In Russian).

20. Bisplinghoff R.L., Ashley H. *Principles of Aeroelasticity*. New York. Dover Publications. 1962. 527 p.

21. Ashley H., Landahl M. *Aerodynamics of Wings and Bodies*. New York. Dover. 1965. 304 p.

22. Andersen J.D.Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. New York. McGraw-Hill. 1985. 760 p.

STABILITY INVESTIGATION OF PANEL AXIAL MOVEMENT TAKING INTO ACCOUNT HYDROTHERMOELASTIC INTERACTION

Banichuk N.V.^{1,2}, Ivanova S.Yu.¹

¹*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

An axial movement of a web under axial tension is considered. The web is modelled by a thermoelastic continuous panel (beam), which is supported by a system of fixed rollers realizing the simply supported conditions at the ends of panel spans. In the process of axial movement the panel provides transverse thermoelastic vibrations, which are described by applications of Eulerian coordinates. Arising transverse vibrations define the local accelerations, the Coriolis accelerations and the centripetal accelerations. It is supposed that the thermal loading on the panel leads to a stationary temperature distribution on the panel thickness and to corresponding temperature stresses and strains. It is treated that the axial movement and arising transverse vibrations are realized with interaction of panel and external medium modelled by an ideal fluid moving with a constant velocity. The exact integrodifferential expression received from the theory of thin aerodynamic profiles is applied for the reaction of a fluid moving with a fixed velocity. The approximate middle value approximating the fluid reaction by a differential expression is defined. It makes possible to reduce the integrodifferential equation of panel dynamics to the simplified differential equation. The described model supposes that the hydrothermoelastic deformations are small and it corresponds to approximation of added mass of fluid used for hydrothermoelastic reaction. This leads to essential simplifications of the developing hydrothermoelastic model and it makes possible the application of analytical and semi-analytical approaches for the analysis of dynamics and stability of the considered system. For convenience the non-dimensional variables and defining parameters are introduced. The numerical realization of the hydrothermoelastic model describing the non-stationary behavior of a panel moving in the ideal fluid flow is based on the application of semi-discrete scheme of Galerkin's method. With the help of two shape functions the problem of non-stationary dynamics describing by the partial differential equation is reduced to integration of the system of two ordinary differential equations. As another application of the hydrothermoelastic model it is considered the problem of static instability of a moving panel in a flow of ideal fluid. The introduction of the auxiliary variable makes possible to formulate the boundary eigenvalue problem and to find the critical values of static instability parameters in the analytic form. Thus, the effectiveness of the described hydrothermoelastic model is illustrated by the examples of semi-discrete analysis of non-stationary vibrations and the analytic solution of the stability loss problem under the critical temperatures and velocities of system movement.

Keywords: axial movement of material, hydrothermoelasticity, transverse vibrations, added masses, loss of stability.