

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-446-455

**ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ НАНОРАЗМЕРНЫХ ПОЛОГИХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК***

© 2018 г. **Крысько-мл. В.А.¹, Кириченко А.В.¹,
Папкина И.В.^{1,2}, Кутепов И.Е.¹**

¹*Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.,
Саратов, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томск, Российская Федерация*

vadimakrysko@gmail.com

Поступила в редакцию 21.09.2018

С применением принципа Гамильтона – Остроградского построена математическая модель колебаний геометрически нелинейных наноразмерных пологих осесимметричных сферических оболочек. В основу модели положены следующие соотношения и допущения: тело оболочки упругое, однородное и изотропное, применима гипотеза Кирхгофа – Лява, используется модифицированная моментная теория упругости для объяснения зависимости упругого поведения оболочки от размерного (зависимого) параметра; пологость оболочки определяется на основе гипотез В.З. Власова, геометрическая нелинейность – по Т. Карману. Предложен подход для определения «истинного» решения. Уравнение в частных производных сводится к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точности, которая решается несколькими методами типа Рунге – Кутты: метод Рунге – Кутты 4-го и 2-го порядков, метод Рунге – Кутты – Фелберга 4-го порядка, метод Кеш – Карпа 4-го порядка, Рунге – Кутты – Принса – Дорманда 8-го порядка, неявный метод Рунге – Кутты 2-го и 4-го порядков. Создан алгоритм и комплекс программ для получения численных результатов. Исследуется сходимость этих методов по пространственной и временной координате. В основу исследования положена качественная теория нелинейной динамики: анализируются сигналы, фазовые портреты 2D и 3D, спектры мощности Фурье, вейвлеты Морле, эпюры прогибов, сечения Пуанкаре и автокорреляционные функции, исследование знака ляпуновского показателя проводится с помощью методов Вольфа, Канца, Розенштейна. Приводится пример расчета для пластинок и пологих оболочек. Анализ полученных результатов показал, что с увеличением размерно-зависимого параметра характер колебаний переходит из хаотического в гармонический и величина динамической критической нагрузки увеличивается.

Ключевые слова: динамическая устойчивость оболочек, наноразмерные осесимметричные пологие оболочки, хаотическая динамика, метод конечных разностей, методы типа Рунге – Кутты, ляпуновские показатели.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-79-10097).

Введение

Зависимость упругого поведения механических структур от размеров тела в микронном масштабе экспериментально наблюдалась в металлах [1, 2] и полимерах [3]. Кроме того, эксперименты подтверждают значительное влияние нелинейности на поведение микро- и наномеханических резонаторов [4]. Классическая механика континуума не в состоянии интерпретировать и предсказывать такое размерно-зависимое поведение, происходящее в структурах масштаба микронов и суб-микроннов, из-за отсутствия материального параметра, учитывающего масштабные эффекты. В последнее время было предпринято много попыток для разработки различных теорий, позволяющих моделировать масштабные эффекты в континууме, таких как моментная теория упругости [5, 6], нелокальная теория упругости [7], градиентная теория упругости [8], теории сред с сохраняющимися дислокациями [9] и поверхностная упругость [10]. Моментная теория содержит две дополнительные материальные константы для изотропных упругих материалов, связанные с лежащей в основе микроструктурой материала, которые трудно определить. В [11] предложена модифицированная моментная теория только с одним дополнительным параметром. В последние годы эта теория была применена многими исследователями для интерпретации размерно-зависимого поведения движения микроструктур [12–17].

1. Теория гибких пологих осесимметричных нанооболочек с учетом моментных напряжений

В классической теории упругости работа деформации и энергия деформации зависят от тензора напряжений и не зависят от вектора вращения вследствие материальной независимости. Однако градиент вектора вращения может представлять собой существенный фактор в уравнениях состояния. В соответствии с модифицированной теорией моментных напряжений, представленной Янгом и др. [18], плотность энергии деформации является функцией как тензора напряжений (сопряженного с тензором деформации), так и тензора кривизны (сопряженного с тензором моментных напряжений). На базе указанных гипотез и теорий в статье [19] были получены уравнения движения осесимметричных пологих наноупругих оболочек, где введен на базе модифицированной моментной теории коэффициент $\gamma_l = l^2/h^2$, который ответственен за размеры наноструктуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = & - \left(1 + \frac{\gamma_l \eta}{2(1+\nu)} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\Phi}{r} \left(1 + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + 4q, \quad (1) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\Phi}{r^2} = & - \frac{\partial w}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Здесь h – толщина оболочки; l – параметр шкалы длины материала, понимаемый как свойство материала, характеризующее эффект моментного напряжения; $\Phi = \partial F / \partial r$ и введены безразмерные величины:

$$\bar{t} = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}}, \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \frac{R^2}{h} \varepsilon, \quad \bar{F} = \eta \frac{F}{Eh^3}, \quad \bar{w} = \sqrt{\eta} \frac{w}{h},$$

$$\bar{r} = b \frac{r}{c}, \quad \bar{q} = \frac{\sqrt{\eta}}{4} \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2, \quad \eta = \frac{1-\nu}{12(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = \sqrt{\eta} \frac{c^2}{Rh},$$

где t – время; ε – коэффициент сопротивления среды, в которой происходит движение оболочки; F – функция усилий; w – функция прогиба; R – главный радиус кривизны оболочки, c – радиус опорного контура; b – параметр пологости; ν – коэффициент Пуассона; r – расстояние от оси вращения до точки на срединной поверхности; q – параметр внешней нагрузки; ω_0 – частота собственных малых колебаний, E – модуль упругости, g – ускорение свободного падения, γ – удельный вес материала. Для краткости черта над безразмерными величинами в (1) опущена. К уравнениям (1) следует присоединить граничные и начальные условия. Приведем граничные условия, для которых получены численные расчеты, – шарнирно-неподвижный контур:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nu \frac{\Phi}{b} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = \bar{r}. \quad (2)$$

Начальные условия:

$$w = f_1(r, 0) = 0, \quad w' = f_2(r, 0) = 0. \quad (3)$$

Кроме того, в малой окрестности вершины осесимметричной сферической оболочки справедливы следующие соотношения: $\Phi \approx Ar$, $\Phi' \approx A$, $w \approx B + Cr^2$, $w' \approx 2Cr$, $w'' \approx 2C$; $w''' \approx 0$ [20].

2. Алгоритм расчета

Для сведения распределенной системы (1)–(3) к системе с сосредоточенными параметрами воспользуемся методом конечных разностей второго порядка точности. Граничные, начальные условия и условия в вершине также следует представить в конечных разностях. Нагрузка может изменяться по любому закону, но в настоящей статье для граничных условий (2) исследуются задачи, в которых поперечная нагрузка равномерно распределенная знакопеременная $q = q_0 \sin \omega_p t$, где q_0 – амплитуда вынужденной нагрузки, $\omega_p = 2\pi/T$, T – период собственных колебаний оболочки.

После сведения задачи (1)–(3) к нормальному виду задача Коши будет решаться несколькими методами типа метода Рунге – Кутты [21–24]. Шаг по времени выбирается из условия устойчивости решения ($\Delta t = 2,441 \cdot 10^{-4}$).

В силу сложности уравнений (1)–(3), описывающих нелинейную динамику гибких пологих нанооболочек, найти аналитическое точное решение задач не представляется возможным. Единственным выходом является решение таких задач численными методами. Но тогда встает вопрос о достоверности получаемых решений. Следовательно, чрезвычайно важным является вопрос о выявлении «истинности» хаотических колебаний, так как очень часто принимают за хаотические колебания ошибки, которые накапливаются при решении задач численными методами [25]. «Истинность» хаоса («истинность» решений) для задач нелинейной динамики определяем с помощью нескольких альтернативных решений, полученных описанными выше численными методами.

Известно, что основополагающей чертой хаоса является существенная зависимость от начальных условий. Определение хаоса, которое было первоначально сформулировано в 1989 году Девани [26], имеет три составные части. В дополнение к условию существования зависимости от начальных условий в него входят условие перемешивания, именуемое транзитивностью, и условие регулярности, именуемое плотностью периодических точек или периодичностью. Дж. Бэнкс с соавторами [27] в 1992 году доказали, что условие существования зависимости от начальных условий является избыточным и следует из условий транзитивности и периодичности.

Существует определение хаоса, данное Кнудсенем [28], согласно которому функция, заданная на ограниченном метрическом пространстве, может быть определена как хаотическая, если она имеет плотную орбиту и обладает существенной зависимостью от начальных условий [29].

По определению хаоса, данному Гуликом [29], хаос существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической. Будем следовать определению хаоса по Гулику [29].

Численно полученные решения зависят от граничных и начальных условий, количества интервалов разбиения радиуса оболочки в методе конечных разностей, от метода решения задачи Коши методами Рунге – Кутты и шага по времени, от метода определения ляпуновских показателей.

Для выявления «истинности» хаотических колебаний при численном решении задачи о нелинейных колебаниях гибких нанооболочек под действием поперечной знакопеременной нагрузки приводится комплексное исследование.

1. Поскольку уравнения в частных производных сводятся к задаче Коши методом конечных разностей 2-го порядка точности, то решение существенно зависит от количества интервалов разбиения радиуса оболочки и следует найти то количество разбиений, при котором решение при числе разбиений $2n$ совпадает с решением при числе разбиений n . Требуется совпадение функций решения, даже для хаотических колебаний, вплоть до производных четвертого порядка.

2. Задача Коши также решается численными методами, решение существенно зависит от метода и шага решения по времени. Поэтому предлагается решать задачу Коши несколькими методами: методом Рунге – Кутты 4-го (RK4), 2-го (RK2) порядков; методом Рунге – Кутты – Фелберга 4-го порядка (RK45) [21, 22]; методом Кеш – Карпа 4-го порядка (RKCK) [23]; методом Рунге – Кутты – Принса – Дорманда 8-го порядка (RK8PD) [24]; неявными методами Рунге – Кутты 2-го порядка (RK2IMP) и 4-го порядка (RK4IMP). Методы RK45, RKCK, RK8PD предусматривают автоматическое изменение шага, а также возможность контроля погрешности интегрирования. Всеми упомянутыми в п. 2 методами были решены задачи гибких нанооболочек. В результате численного анализа предпочтение было отдано методу Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Этот метод обладает высокой точностью и является экономичным с точки зрения затраты времени при численном решении задачи.

3. Для каждого из разбиений интервала интегрирования и метода решения задачи Коши строятся сигналы, фазовые портреты 2D и 3D, спектры мощности Фурье, вейвлеты Морле, эпюры прогибов, сечения Пункаре и автокорреляционные функции.

4. Следуя определению хаоса Гулика [29], вычисляется и определяется знак старшего показателя Ляпунова. Так как в настоящее время не создан универсальный и надежный метод определения спектра ляпуновских показателей, то этот вопрос решается с помощью применения численных методов Вольфа [30], Канца [31], Розенштейна [32].

3. Численный расчет осесимметричной полой оболочке

Приведем в качестве примера расчет нелинейной динамики шарнирно-неподвижной сферической оболочки (1)–(3) под действием равномерно распределенной нагрузки, изменяющейся по закону $q = q_0 \sin \omega_p t$, при частоте $\omega_p = 1,571$, которая близка к частоте собственных колебаний, параметр пологости $b = 4$. Число разбиений по радиусу составляло $n = 60; 120; 200; 240; 280$. Оптимальным разбиением оказалось $n = 240$, когда совпадают основные функции. Расчеты проводились для $\gamma_l = 0; 0,3; 0,5$. В таблице 1 приведены зависимости для прогибов $w(t)$ в вершине оболочки, фазовые портреты $w(w')$, спектры мощности Фурье $S(\omega)$ и Морле $\omega(t)$ для $\gamma_l = 0$ и $q_0 = 0,48$. При разбиении $n = 60, 120$ для $\gamma_l = 0$ (рис. 1) и для $\gamma_l = 0,1$ (рис. 2) наблюдаются особенности в графике зависимости $w(t)$, когда при нагрузке $q_0 = 0,48$ прогибы растут в сторону кривизны оболочки. Этот факт характеризует численную неустойчивость (недостаточное количество разбиений n).

Таблица 1

n	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности	Вейвлет-спектр
	$\gamma_l = 0, q_0 = 0,48$			
60				
240 – 280				

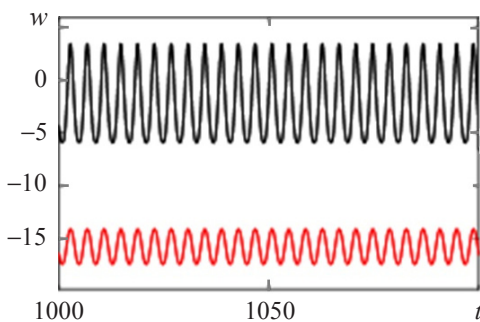


Рис. 1. Зависимость $w(t)$ для $\gamma_l = 0$:
красный цвет – $n = 60, 120$;
черный цвет – $n = 200, 240, 280$

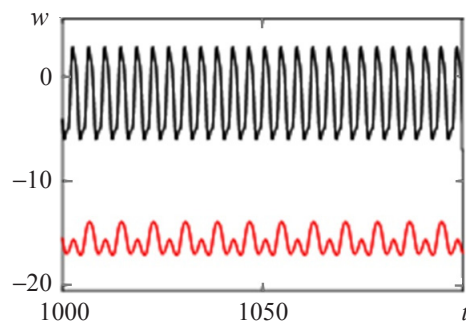
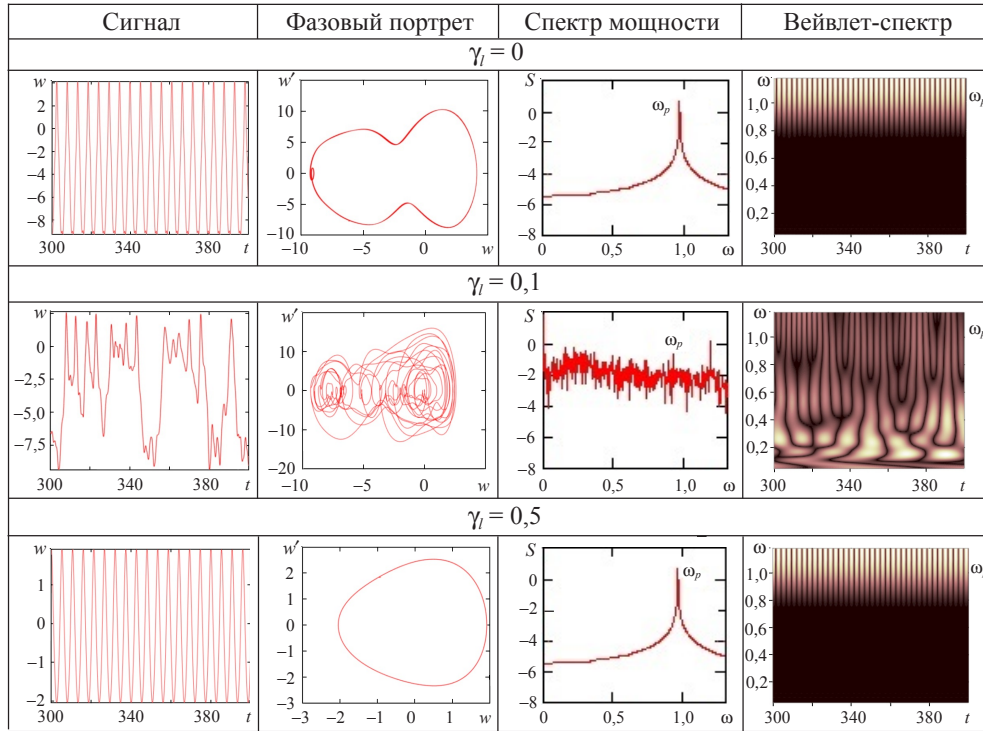


Рис. 2. Зависимость $w(t)$ для $\gamma_l = 0,1$:
красный цвет – $n = 60, 120$;
черный цвет – $n = 200, 240, 280$

В таблице 2 приведены зависимости для прогибов $w(t)$, фазовые портреты $w(w')$, спектры мощности Фурье $S(\omega)$ и Морле $\omega(t)$ для $\gamma_l = 0; 0,1; 0,5$ и $q_0 = 0,34$.

Таблица 2



Анализ таблиц 1 и 2 показал, что увеличение количества точек разбиения радиуса оболочки при решении задачи методом конечных разностей может существенно менять характер колебаний для $\gamma_l = 0, n = 60$, колебания переходят в хаотические из гармонических по сценарию Фейгенбаума, а для $n = 240-280$ – по сценарию Помо – Манневилля. На рис. 3 приведены зависимость максимального прогиба в вершине оболочки от амплитуды нагрузки $w_{\max}(q_0)$ с указанием значения $\gamma_l = 0; 0,1; 0,5$ и цветовая гамма характера колебаний.

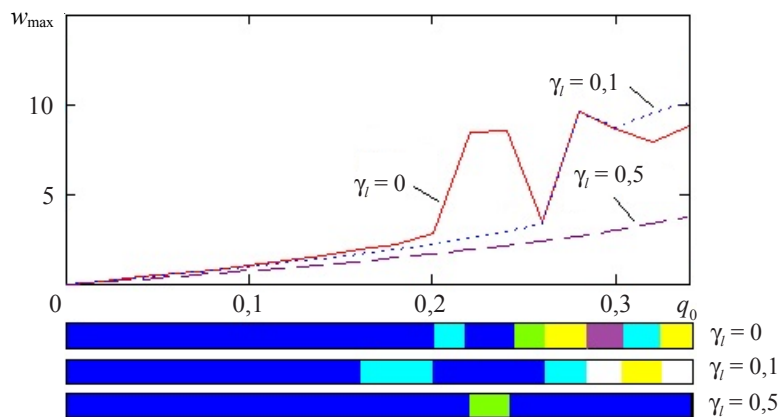


Рис. 3. Зависимость $w_{\max}(q_0)$, $n = 200, 240, 280$

Условные обозначения: ■ – гармонические колебания на частоте ω_p ; ■ – колебания на частотах $\omega_p/2^k$, где $k \in N$; ■ – колебания на частотах ω_p и независимой частоте; ■ – колебания на частотах $\omega_p/3^k$, где $k \in N$; ■ – колебания на частотах $\omega_p/5^k$, где $k \in N$; □ – хаос.

Влияние размерно-зависимого параметра на характер колебаний оболочки неоднозначный: для $\gamma_l = 0$ потеря устойчивости наступает уже при $q_0 = 0,2$; для $\gamma_l = 0,1$ – при $q_0 = 0,26$; для $\gamma_l = 0,5$ потеря устойчивости отсутствует. С увеличением γ_l уменьшаются значения прогибов, однако при $\gamma_l = 0$ хаотические колебания не наблюдаются; при $\gamma_l = 0,1$ происходят хаотические колебания при $0,28 \leq q_0 \leq 0,3$ и $0,32 \leq q_0 \leq 0,34$; при $\gamma_l = 0,5$ на всем интервале наблюдаются регулярные колебания.

Выводы

1. Построена теория размерно-зависимых гибких осесимметричных пологих оболочек.
2. Сформулирована методология получения «истинного» хаоса для сферических гибких осесимметричных нанооболочек.
3. Выявлено, что с увеличением γ_l колебания теряют свою хаотичность и становятся гармоническими. Ляпуновские показатели, определенные методами Канца, Розенштейна, Вольфа, указывают на то, что для гармонических колебаний старший показатель отрицательный, но близок к нулю, а для хаотических колебаний – положительный.
4. Устойчивость решения существенно зависит от параметра γ_l и числа разбиений n .
5. Сценарий перехода колебаний из гармонических в хаотические также существенно зависит от γ_l и n .

Список литературы

1. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity: theory and experiments. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1994. Vol. 42. P. 475–487. DOI: 10.1016/0956-7151(94)90502-9.
2. Nix W.D. Mechanical properties of thin films. *Metallurgical Transactions A*. 1989. Vol. 20. No 11. P. 2217–2245.
3. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Vol. 51. Iss. 8. P. 1477–1508.
4. Scheible D.V., Erbe A., Blick R.H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle–Takens route. *Applied Physics Letters*. 2002. Vol. 81. No 2. P. 1884–1886.
5. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 415–448.
6. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 385–414.
7. Salajeghe S., Khadem S.E., Rasekh M. Nonlinear analysis of thermoelastic damping in axisymmetric vibration of micro circular thinplate resonators. *Applied Mathematical Modelling*. 2012. Vol. 36. No 12. P. 5991–6000.
8. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design*. 2010. Vol. 31. No 5. P. 2324–2329.
9. Nayfeh A.H., Younis M.I. Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. Vol. 14. No 12. P. 1711–1717.

10. Ke L.-L., Yang J., Kitipornchai S. Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2013. Vol. 20. No 1. P. 28–37.
11. Lifshitz R., Roukes M.L. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. *Physical Review B*. 2000. Vol. 61. No 8. P. 5600–5609.
12. Reddy J.N. Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. No 11. P. 2382–2399.
13. Ma H., Gao X., Reddy J. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. No 12. P. 3379–3391.
14. Yin L., Qian Q., Wang L., Xia W. Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2010. Vol. 23. No 5. P. 386–393.
15. Lazopoulos K.A. On bending of strain gradient elastic micro-plates. *Mechanics Research Communications*. 2009. Vol. 36. No 7. P. 777–783.
16. Reddy J.N., Kim J. A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. No 3. P. 1128–1143.
17. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин. *Инженерный журнал*. 1964. Т. 4. Вып. 3. С. 34–41.
18. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 30. No 10. P. 2731–2743.
19. Krysko-jr V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Krysko V.A. General theory of geometrically nonlinear size dependent shells taking into account contact interaction. Part 1, 2. Chaotic dynamics of geometrically nonlinear axially symmetric onelayer shells. *Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis: Proceedings of the 14th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications*. Eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. 11–14 Dec. 2017. Łódź. Poland. P. 289–300.
20. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
21. Fehlberg E. Low-order classical Runge – Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. *NASA Technical Report R-315*. 1969.
22. Fehlberg E. Klassische Runge – Kutta – Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing (Arch. Elektron. Rechnen.)* Vol. 6. Iss. 1-2. P. 61–71. DOI: 10.1007/BF02241732.
23. Cash J.R., Karp A.H. A variable order Runge – Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1990. Vol. 16. No 3. P. 201–222. DOI:10.1145/79505.79507.
24. Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge – Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. Vol. 6. No 1. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.
25. Lozi R. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems? *World Scientific Series on Nonlinear Science. Topology and Dynamics of Chaos. In: Celebration of Robert Gilmore's 70th Birthday*. 2013. Vol. 84. P. 63–98.
26. Devaney R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1989. 352 p.
27. Banks B.J., Davis G., Stacey P. On Devaney's Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly*. Vol. 99. No 4. 1992. P. 332–334.
28. Knudsen C. Chaos without Periodicity. *American Mathematical Monthly*. Vol. 101. 1994. P. 563–565.
29. Gulick D. *Encounters with Chaos*. New York: McGraw-Hill, 1992.
30. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*. 1985. Vol. 16. No 3. P. 285–317.
31. Kantz H. A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*. 1994. Vol. 185. No 1. P. 77–87. DOI:10.1016/0375-9601(94)90991-1.
32. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*. Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering. Boston University. 1992.

References

1. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity: theory and experiments. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1994. Vol. 42. P. 475–487. DOI: 10.1016/0956-7151(94)90502-9.
2. Nix W.D. Mechanical properties of thin films. *Metallurgical Transactions A*. 1989. Vol. 20. No 11. P. 2217–2245.
3. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Vol. 51. Iss. 8. P. 1477–1508.
4. Scheible D.V., Erbe A., Blick R.H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle–Takens route. *Applied Physics Letters*. 2002. Vol. 81. No 2. P. 1884–1886.
5. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 415–448.
6. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. P. 385–414.
7. Salajeghe S., Khadem S.E., Rasekh M. Nonlinear analysis of thermoelastic damping in axisymmetric vibration of micro circular thinplate resonators. *Applied Mathematical Modelling*. 2012. Vol. 36. No 12. P. 5991–6000.
8. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design*. 2010. Vol. 31. No 5. P. 2324–2329.
9. Nayfeh A.H., Younis M.I. Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. Vol. 14. No 12. P. 1711–1717.
10. Ke L.-L., Yang J., Kitipornchai S. Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2013. Vol. 20. No 1. P. 28–37.
11. Lifshitz R., Roukes M.L. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. *Physical Review B*. 2000. Vol. 61. No 8. P. 5600–5609.
12. Reddy J.N. Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. No 11. P. 2382–2399.
13. Ma H., Gao X., Reddy J. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008. Vol. 56. No 12. P. 3379–3391.
14. Yin L., Qian Q., Wang L., Xia W. Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2010. Vol. 23. No 5. P. 386–393.
15. Lazopoulos K.A. On bending of strain gradient elastic micro-plates. *Mechanics Research Communications*. 2009. Vol. 36. No 7. P. 777–783.
16. Reddy J.N., Kim J. A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. No 3. P. 1128–1143.
17. Sheremet'yev M.P., Pelekh B.L. K postroeniyu utochnennoy teorii plastin [On the construction of a refined theory of plates]. *Inzhenernyy zhurnal [Engineering Magazine]*. 1964. Vol. 4. Iss. 3. P. 34–41 (In Russian).
18. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. No 10. P. 2731–2743.
19. Krysko-jr V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Krysko V.A. General theory of geometrically nonlinear size dependent shells taking into account contact interaction. Part 1, 2. Chaotic dynamics of geometrically nonlinear axially symmetric onelayer shells. *Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis: Proceedings of the 14th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications*. Eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. 11–14 Dec. 2017. Łódź. Poland. P. 289–300.
20. Volmir A.S. *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek [Nonlinear Dynamic of Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1972. 432 p. (In Russian).
21. Fehlbberg E. Low-order classical Runge – Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. *NASA Technical Report R-315*. 1969.
22. Fehlbberg E. Klassische Runge – Kutta – Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing (Arch.*

Elektron. Rechnen.) Vol. 6. Iss. 1-2. P. 61–71. DOI: 10.1007/BF02241732.

23. Cash J.R., Karp A.H. A variable order Runge – Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1990. Vol. 16. No 3. P. 201–222. DOI:10.1145/79505.79507.

24. Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge – Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. Vol. 6. No 1. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.

25. Lozi R. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems? *World Scientific Series on Nonlinear Science. Topology and Dynamics of Chaos. In: Celebration of Robert Gilmore's 70th Birthday*. 2013. Vol. 84. P. 63–98.

26. Devaney R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company. 1989. 352 p.

27. Banks B.J., Davis G., Stacey P. On Devaney's Definition of Chaos. *American Mathematical Monthly*. Vol. 99. No 4. 1992. P. 332–334.

28. Knudsen C. Chaos without Periodicity. *American Mathematical Monthly*. Vol. 101. 1994. P. 563–565.

29. Gulick D. *Encounters with Chaos*. New York. McGraw-Hill. 1992.

30. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*. 1985. Vol. 16. No 3. P. 285–317.

31. Kantz H. A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*. 1994. Vol. 185. No 1. P. 77–87. DOI:10.1016/0375-9601(94)90991-1.

32. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*. Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering. Boston University. 1992.

CHAOTIC VIBRATIONS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR NANO-DIMENSIONAL SHALLOW AXISYMMETRIC SHELLS

Krysko Jr. V.A.¹, Kirichenko A.V.¹, Papkova I.V.^{1,2}, Kutepov I.E.¹

¹*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

²*The National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

The Hamilton – Ostrogradsky principle is used in the paper to construct a mathematical model of vibrations of geometrically nonlinear nano-dimensional shallow axisymmetric spherical shells. The model is based on the following relations and assumptions: the body of the shell is elastic, homogeneous and isotropic, the Kirchhoff – Love hypothesis, a modified momentary theory of elasticity is used to account for the dependence of elastic behavior of the shell on the dimension-dependent parameter; the shallowness of the shell is determined based on the hypotheses of V.Z. Vlasov, the geometrical nonlinearity is determined using T. Karman's hypothesis. An approach for determining the “true” solution is proposed. The partial differential equation is reduced to a Cauchy problem with the help of the second-order accuracy finite difference method, which is solved using several Runge – Kutta-type methods: the 4th- and 2nd-order Runge – Kutta methods, the 4th-order Runge – Kutta – Fehlberg method, the 4th-order Cash – Karp method, the 8th-order Runge – Kutta – Prince – Dormand method, the implicit 2nd- and 4th-order Runge – Kutta method. An algorithm and a software complex for obtaining numerical results are developed. The convergence of the above methods for a space and time coordinate is studied. The study is based on the qualitative theory of nonlinear dynamics: signals, 2D and 3D phase-plane portraits, power spectrums, Morley's wavelets, deflection curves, Poincare sections and autocorrelation functions are analyzed, the sign of Lyapunov's index is analyzed using several methods: Wolf's, Kantz's, Rosenstein's. An example of analyzing plates and shallow shells is given. The analysis of the obtained results shows that with the increase of the dimension-dependent parameter the vibration character changes from chaotic to harmonic, and the value of the dynamic critical load increases.

Keywords: dynamic stability of shells, nano-dimensional axisymmetric shallow shells, chaotic dynamics, finite difference method, Runge – Kutta-type methods, Lyapunov's indicators.