

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-427-437

О КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ОКРУЖНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ*

© 2018 г.

Ватульян А.О., Кондратьев В.С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

vatulyan@math.rsu.ru, kondratev.vs@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.06.2018

Рассмотрена задача о радиальных колебаниях пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией с учетом реологии, причем пьезоэлектрические характеристики цилиндра являются функциями радиальной координаты. Цилиндр рассматривается как кусочно-однородное электроупругое тело, составленное из отдельных призм. В предположении, что секционированный цилиндр является бесконечно длинным и в нем отсутствуют осевые деформации, построены краевые задачи о плоской деформации бесконечно длинных призм. В частном случае, когда все призмы секционированного цилиндра находятся в идентичных условиях электрического нагружения, а внешние механические нагрузки отсутствуют, граничная задача для цилиндра сводится к граничной задаче для отдельной призмы. Реологические свойства моделировались в рамках принципа соответствия путем замены характеристик материала комплексными модулями-функциями частоты колебаний. Выполнено сравнение концепции комплексных модулей с широко распространенной линейной частотной аппроксимацией соответствующих функций. Решение задачи находилось численно на основе метода пристрелки. Представлены результаты вычислительных экспериментов по определению амплитудно-частотных характеристик для некоторых законов неоднородности материала. Выполнена серия вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности и для различного набора исходных данных, позволившая проанализировать зависимость резонансных частот от законов изменения физических характеристик и реологии. Реализована схема реконструкции законов неоднородности по информации о значениях безразмерных функций – радиального смещения и радиального напряжения в некотором наборе точек внутри области с использованием сплайн-аппроксимаций. Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность предлагаемой схемы.

Ключевые слова: неоднородный цилиндр, электроупругость, комплексный модуль, амплитудно-частотные характеристики, идентификация.

Введение

В настоящее время создаются пьезоэлементы различной формы и со сложным электродным покрытием. Большое количество разнообразных элементов из пьезо-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №16-01-00354).

керамики используется в разных областях техники, на их основе разрабатываются эффективные устройства и датчики различного назначения [1]. Пьезоэлектрические элементы цилиндрической формы являются одним из наиболее распространенных типов пьезоэлементов и широко используются в структурах мониторинга.

В последние годы на практике активно применяются пьезоэлементы с неоднородной поляризацией, которые изготовлены из композиционных материалов, сочетающих пьезокерамику, металл и полимер. Подобные конструктивные элементы обладают выраженным затуханием. Исследование колебаний однородных пьезоэлектрических керамических цилиндров представлено достаточно широко в литературе; развиты способы определения постоянных характеристик. Отметим некоторые из работ, посвященных исследуемой проблеме для цилиндрических структур. В монографии [2] отражены общие вопросы колебаний цилиндрических структур из пьезокерамики с постоянными характеристиками, представлено большое количество постановок задачи и их решений с помощью цилиндрических функций. В статьях [3, 4] авторами рассмотрены колебания радиально-поляризованных пьезоэлектрических керамических цилиндров и системы пьезоэлектрических и металлических цилиндров и дисков. Полученные результаты обеспечивают эффективную конструкцию пьезокерамических устройств. В статьях [5–7] представлены исследования колебаний пьезоэлектрических преобразователей цилиндрической формы. В публикации [8] рассмотрены осесимметричные колебания радиально-поляризованного цилиндрического пьезоэлектрического привода, установленного на металлическом валу, решение построено с помощью гипергеометрических функций. В [9] выполнен анализ установившихся колебаний однородного полого пьезокерамического цилиндра с радиальным и окружным типами поляризации, решение задач получено аналитически с помощью специальных функций Бесселя и Ломмеля. В статье [10] изучены свободные колебания полых цилиндров с осевой поляризацией. В [11] выполнено сравнение электромеханических свойств цилиндрических пьезокерамических преобразователей, при построении которых использовались пьезоэлементы с окружной и радиальной поляризациями. Установлены закономерности изменения электрических характеристик в зависимости от вида поляризации.

В настоящее время методики изготовления пьезоэлементов позволяют получить координатно-зависимое распределение свойств материала и широкий диапазон изменения пьезоэлектрических свойств [12], что характерно для функционально-градиентных материалов. Неоднородность физических свойств пьезоматериалов возникает как на стадии изготовления, так и на стадии эксплуатации устройств, в частности, в случае частичной располяризации. Большое значение приобретает создание новых методик идентификации механических и пьезоэлектрических свойств с целью сравнения характеристик изготовленных материалов с расчетными характеристиками. Исследование колебаний таких элементов осложнено тем, что законы изменения свойств зависят от координат.

В статье [13] описано деформирование полого функционально-градиентного пьезоэлектрического цилиндра, в котором свойства материала зависят от радиальной координаты и изменяются по степенному закону. Представлен аналитический подход и этапы сведения задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получено уравнение для определения отклика электроупругого поля. В статье [14] рассмотрена задача о колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальной

поляризацией при наличии затухания, исследована зависимость резонансных частот от законов изменения физических характеристик и реологии. Аналогично постановке, приведенной в [14], в статье [15] представлено решение обратной задачи по определению пьезоэлектрических характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра на основе данных акустического анализа, для определения функций предложен специальный подход на основе проекционных схем и метода алгебраизации. Публикации [16, 17] посвящены реконструкции механических и электрических характеристик неоднородных стержней на основе акустического анализа.

В настоящей статье рассмотрена задача о колебаниях пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией с учетом затухания. Все физические характеристики цилиндра могут быть функциями радиальной координаты, наиболее важный для приложений случай, когда только пьезомодули являются функциями радиальной координаты, остальные характеристики постоянны. Реологические свойства учитываются в рамках принципа соответствия для стационарных гармонических колебаний. Решение задачи получается из решения соответствующей электроупругой задачи заменой характеристик материала комплексными модулями-функциями частоты колебаний. Проведен сравнительный анализ амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) двух моделей для учета затухания. Представлено решение обратной задачи по восстановлению некоторых функций, которые характеризуют законы изменения пьезоэлектрических модулей.

1. Постановка задачи о колебаниях пьезокерамического цилиндра

В задаче о колебаниях цилиндра с окружной поляризацией цилиндр рассматривается как кусочно-однородное электроупругое тело, составленное из отдельных призм [8]. Считая, что секционированный цилиндр (рис. 1) является бесконечно длинным и в нем отсутствуют осевые деформации ($\epsilon_z = 0$), приходим к краевым задачам о плоской деформации бесконечно длинных призм. В частном случае, когда все призмы секционированного цилиндра находятся в идентичных условиях электрического нагружения (возбуждение колебаний осуществляется с помощью генератора электрических напряжений и подводимая ко всем призмам разность электрических потенциалов $\pm V_0 e^{i\omega t}$ одна и та же), а внешние механические нагрузки отсутствуют, граничная задача для цилиндра сводится к граничной задаче для отдельной призмы. Сечение призмы изображено на рис. 2.

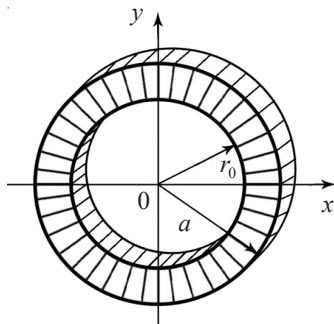


Рис. 1

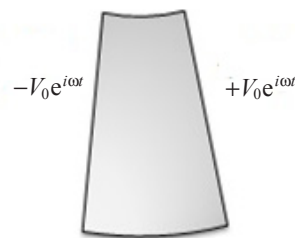


Рис. 2

В рамках этой модели рассмотрим задачу о колебаниях бесконечного неоднородного пьезокерамического цилиндра с радиусом a с окружной поляризацией (в направлении θ). Базовые уравнения движения в осесимметричном случае имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho\omega^2 u_r &= 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Граничные условия представимы в форме:

$$\sigma_{rr}(a) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_0) = 0, \quad D_r(a) = 0, \quad D_r(r_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\frac{du_r}{dr} + c_{13}\frac{u_r}{r} + \frac{e_{31}}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\frac{du_r}{dr} + c_{33}\frac{u_r}{r} + \frac{e_{31}}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}, \\ D_r &= -\varepsilon_{11}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{e_{15}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \\ D_\theta &= \frac{\varepsilon_{33}}{r}\frac{d\varphi}{d\theta} + e_{31}\frac{du_r}{dr} + e_{33}\frac{u_r}{r}.\end{aligned}\quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3) приняты обозначения: ω – циклическая частота колебаний; u_r – радиальная составляющая вектора смещения; D_r, D_θ – составляющие вектора электрической индукции; φ – потенциал электрического поля; $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ – компоненты тензора напряжений; c_{13}, c_{11}, c_{33} – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле; e_{15}, e_{31}, e_{33} – пьезоэлектрические характеристики; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ – диэлектрические проницаемости. Будем считать, что модули упругости постоянны, а пьезоэлектрические характеристики могут быть функциями радиальной координаты, что достаточно адекватно моделирует возможную располяризацию пьезоэлемента.

Из уравнения электростатики (1) получим: $\varphi = C_1\theta + C_2$, где $C_1 = V_0/\alpha$, $C_2 = 0$, угол $\alpha = \pi/N$ определяется количеством призм N , из которых составлен цилиндр [3].

Введем следующие безразмерные характеристики:

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{a}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 a^2}{c_{11}}, \quad B_1 = \frac{c_{13}}{c_{11}}, \quad B_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, \quad \varphi_0 = \frac{V_0}{\alpha}$$

и безразмерные функции:

$$B_3(\xi) = \frac{e_{33}(\xi)}{c_{11}}\varphi_0, \quad B_4(\xi) = \frac{e_{31}(\xi)}{c_{11}}\varphi_0, \quad T = \frac{\sigma_{rr}}{c_{11}}, \quad U = \frac{u_r}{a}.$$

Тогда, исходя из соотношений (1), (3), получим каноническую систему уравнений относительно безразмерных функций напряжения и смещения:

$$\begin{aligned}\frac{dU(\xi)}{d\xi} &= T(\xi) - \frac{B_1}{\xi}U(\xi) - \frac{B_4}{\xi}, \\ \frac{dT(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{\xi}(B_1 - 1)T(\xi) + \frac{1}{\xi^2}(B_2 - B_1B_2 - \kappa^2\xi^2)U(\xi) + \frac{1}{\xi}(B_3 - B_4B_1),\end{aligned}\quad (4)$$

а граничные условия представим в форме:

$$T(\xi_0) = 0, \quad T(1) = 0. \quad (5)$$

2. Моделирование затухания

Для учета затухания в исследуемой задаче аналогично модели, использованной в [14], принимается концепция комплексных модулей [18], согласно которой необходимо заменить $e_{kj}^*(\xi) \rightarrow e_{kj}^*(\xi, i\kappa)$, что приводит к функциям от параметра дробно-рациональной структуры (модель 1):

$$e_{kj}^*(\xi, i\kappa) = \frac{H_{kj}(\xi) + inE_{kj}(\xi)a_1\kappa}{1 + ina_1\kappa}, \quad (6)$$

которые аналогичны функциям для модели стандартного вязкоупругого тела с неоднородными свойствами, причем $H_{kj}(\xi)$ – аналог длительного пьезомодуля, $E_{kj}(\xi)$ – аналог мгновенного пьезомодуля, n – время релаксации и параметр $a_1 = \sqrt{c_{11}/\rho} \cdot (1/a)$.

Типичная функция затухания

$$G(i\kappa) = \frac{H + i\tau\kappa E}{1 + i\tau\kappa} = \text{Re } G(i\kappa) + i \text{Im } G(i\kappa)$$

будет отражать зависимость от частоты пьезоэлектрических характеристик, причем функции

$$G_1(i\kappa) = \text{Re } G(i\kappa) = \frac{H + \tau^2\kappa^2 E}{1 + \tau^2\kappa^2}, \quad G_2(i\kappa) = \text{Im } G(i\kappa) = \tau\kappa \frac{E - H}{1 + \tau^2\kappa^2}$$

имеют следующие свойства:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} G_1 = H, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} G_1 = E, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} G_2 = 0, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} G_2 = 0, \quad E > H.$$

Согласно концепции комплексных модулей, для учета затухания в рассматриваемом неоднородном пьезокерамическом цилиндре заменим: $e_{31}(\xi) \rightarrow e_{31}(\xi, i\kappa)$, $e_{33}(\xi) \rightarrow e_{33}(\xi, i\kappa)$. Обозначим $na_1 = \tau$, τ – безразмерное время релаксации. Тогда:

$$e_{31}(\xi, i\kappa) = \frac{H_{31}(\xi) + E_{31}(\xi)i\tau\kappa}{1 + i\tau\kappa}, \quad e_{33}(\xi, i\kappa) = \frac{H_{33}(\xi) + E_{33}(\xi)i\tau\kappa}{1 + i\tau\kappa}, \quad (7)$$

где принято $E_{31}(\xi) = \beta_1 H_{13}(\xi)$, $E_{33}(\xi) = \beta_2 H_{33}(\xi)$.

Расчеты выполнялись при $\beta_1 = \beta_2 = 1,25$.

3. Метод решения

Каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных переменных решена численно методом пристрелки.

Представим систему (4) в матричном виде: $X' = BX + F$, где введены обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{B_1(\xi)}{\xi} & 1 \\ \frac{1}{\xi^2}(B_2 - B_1 B_2 - \kappa^2 \xi^2) & \frac{1}{\xi}(B_1 - 1) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -\frac{B_4}{\xi} \\ \frac{1}{\xi}(B_3 - B_4 B_1) \end{pmatrix}.$$

Решение основной краевой задачи ищется в виде суммы решений неоднородной и однородной задач Коши при различных начальных условиях.

Задача 1. $X^{(0)} = BX^{(0)} + F$ при начальных условиях:

$$X^{(0)}(\xi_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. $X^{(1)} = BX^{(1)}$ при начальных условиях:

$$X^{(1)}(\xi_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно методу пристрелки, искомое решение может быть представлено в виде: $X = X^{(0)} + C_1 X^{(1)}$, где C_1 – неизвестный параметр, векторы

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} U^{(0)} \\ T^{(0)} \end{pmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ T^{(1)} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Функции $U(\xi)$ и $T(\xi)$ ищем в виде линейных комбинаций:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= U^{(0)}(\xi) + C_1 U^{(1)}(\xi), \\ T(\xi) &= T^{(0)}(\xi) + C_1 T^{(1)}(\xi). \end{aligned} \tag{8}$$

Первое граничное условие из (5) выполнено автоматически. Для удовлетворения второго граничного условия (5) определим C_1 равенством

$$C_1 = -\frac{T^{(0)}(1)}{T^{(1)}(1)}.$$

Тестирование предложенной схемы исследования проведено путем сравнения результатов с однородным случаем, исследованным в [8]. Сравнительный анализ показал достаточную точность и эффективность предложенного подхода.

4. Численные результаты

Были проведены вычислительные эксперименты по определению АЧХ для двух законов неоднородности материала при $\xi_0 = 0,3$ с учетом затухания и без затухания.

Один закон соответствует монотонно убывающим зависимостям, второй – монотонно возрастающим зависимостям:

$$1. H_{31}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2}, \quad H_{33}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{10}. \tag{9}$$

$$2. H_{31}(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{2}, \quad H_{33}(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{10}. \tag{10}$$

На рис. 3 приведены графики АЧХ при наличии затухания (линия с точками, $\tau = 10^{-1}$) и без затухания (сплошная линия) для закона 1. На рис. 4 представлены зависимости АЧХ (закон 2) при различных значениях параметра τ , характеризующего степень затухания.

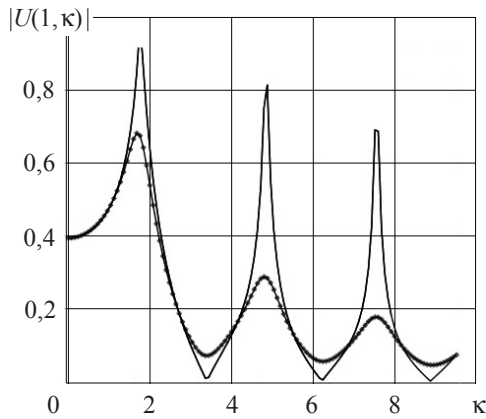


Рис. 3

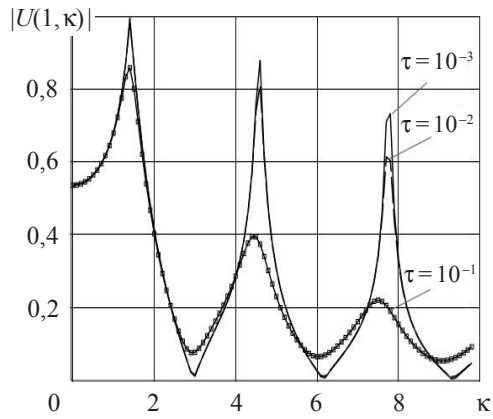


Рис. 4

5. Сравнение моделей учета затухания

Для моделирования затухания могут использоваться другие модели. Например, широко распространенная линейная частотная аппроксимация соответствующих функций (модель 2). В частности, моделирование затухания в среде в рамках этого подхода используется во многих конечно-элементных пакетах [19]:

$$e_{kj}^*(\xi, i\kappa) = H_{kj} + i\tau\kappa(E_{kj} - H_{kj}) + O(\kappa^2). \quad (11)$$

Выполнен анализ типичных функций (6) и (11), и реализована серия расчетов АЧХ при разных значениях параметра τ .

На рис. 5 представлены графики АЧХ, рассчитанные для модели 1 (сплошная линия) и модели 2 (линия с точками). Результаты вычислительных экспериментов показали, что при $\tau = 10^{-1}$ значения АЧХ для модели 2 после первого резонанса дают расхождение с моделью 1, увеличивающееся с ростом κ ; при $\tau = 10^{-2}$ и $\tau = 10^{-3}$ расхождение в АЧХ практически отсутствует в рассматриваемом диапазоне частот.

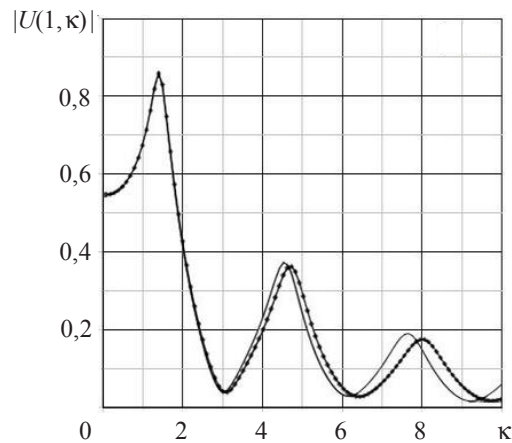


Рис. 5

6. Обратная задача о реконструкции неоднородных законов для задачи 1

Весьма важным для рассматриваемых структур является вопрос об идентификации характеристик, в первую очередь пьезомодулей. В большинстве случаев восстановление неизвестных функций неоднородности производится по информации об АЧХ [20]. Но могут исследоваться и такие модельные постановки задач, в которых известными считаются смещения или напряжения при определенной частоте, измеренные в некоторых точках исследуемого объекта. Будем считать, что значения функций U , T известны в конечном наборе точек $\xi_k, k = \overline{1, M}$, расположенном до первого резонанса при некотором значении $\kappa = \kappa_1$. Сформулируем обратную задачу об определении функций $H_1 = H_{31}$ и $H_2 = H_{33}$, входящих в состав модулей B_3 и B_4 . Заметим, что эти функции могут быть определены на основе (4), если известны не только смещение и напряжение, но и их производные. Для нахождения производных этих функций по заданным их значениям в наборе точек в настоящей статье использована регуляризация на основе сплайн-аппроксимации. Значения функций в точках находятся по формулам:

$$\begin{aligned} B_3 &= \xi \frac{dT(\xi)}{d\xi} - (B_1 - 1)T(\xi) - \frac{1}{\xi}(B_2 - B_1 B_2 - \kappa^2 \xi^2)U(\xi) + B_4 B_1, \\ B_4 &= -\xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} + \xi T(\xi) - B_1 U(\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Предложенный подход решения обратной задачи позволяет восстанавливать две функции, характеризующие пьезоэлектрические свойства материала. Выполнена серия вычислительных экспериментов для описанных выше законов неоднородности и для различного набора точек M исходных данных в обратной задаче.

В качестве примера реконструкции на рис. 6 представлены результаты восстановления убывающей функции $H_{31}(\xi)$ для закона неоднородности (9) (сплошная линия – исходный закон неоднородности, звездочки – реконструкция при $M = 30$, точки – реконструкция при $M = 15$).

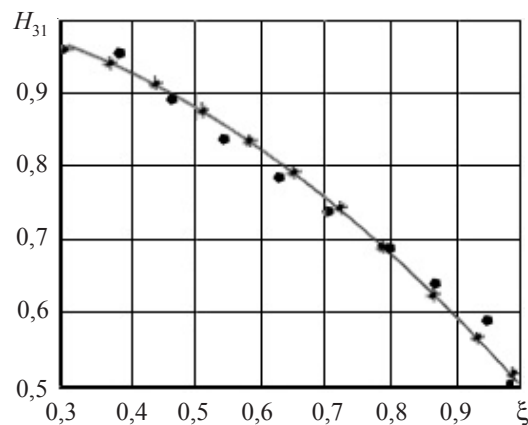


Рис. 6

Заключение

Представлен метод исследования колебаний неоднородного пьезокерамического бесконечного цилиндра с окружной поляризацией при наличии затухания. Проведена серия расчетов, позволившая проанализировать зависимость резонансных частот от законов изменения физических характеристик и реологии. Выполнено сравнение концепции комплексных модулей с широко распространенной линейной частотной аппроксимацией соответствующих характеристик. Реализована реконструкция законов неоднородности по информации о значениях безразмерных функций радиального смещения и радиального напряжения в некотором наборе точек внутри области.

Список литературы

1. Vijaya M.S. *Piezoelectric Materials and Devices: Applications in Engineering and Medical Sciences*. CRC Press, 2012. 186 p.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 472 с.
3. Adelman N., Stavsky Ye., Segal E. Axisymmetric vibrations of radially polarized piezoelectric ceramic cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 1975. Vol. 38. No 2. P. 245–254.
4. Adelman N.T., Stavsky Ye. Vibrations of radially polarized composite piezoceramic cylinders and disks. *Journal of Sound and Vibration*. 1975. Vol. 43. No 1. P. 37–44.
5. Hu J., Lin S., Zhang X., Wang Y. Radially sandwiched composite transducers composed of the radially polarized piezoelectric ceramic circular ring and metal rings. *Acta Acustica United with Acustica*. 2014. Vol. 100. No 3. P. 418–426.
6. Lin S., Fu Z., Zhang X., Wang Y., Hu J. Radially sandwiched cylindrical piezoelectric transducer. *Smart Materials and Structures*. 2013. Vol. 22. No 1. P. 015005.
7. Wang J., Shi Z. Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. Vol. 27. No 4. P. 500–511.
8. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. *Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5 т. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.
9. Grigorenko A.Y., Efimova T.L., Loza I.A. Free vibrations of axially polarized piezoceramic hollow cylinders of finite length. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. Iss. 6. P. 625–633.
10. Li Y.-D., Lee K.Y., Zhang N. A generalized hypergeometric function method for axisymmetric vibration analysis of a piezoelectric actuator. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2012. Vol. 31. No 1. P. 110–116.
11. Лейко А.Г., Гладких Н.Д., Нижник А.И., Старовойт Я.И. Электрические свойства цилиндрических пьезокерамических излучателей силовой и компенсированной конструкции с окружной поляризацией. *Электроника и связь*. 2014. Т. 19. №3(80). С. 62–72.
12. Нагаенко А.В., Мараховский М.А. *Изучение методов исследования пьезокерамических материалов и элементов в процессе их производства*. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2008. 49 с.
13. Li X.-F., Peng X.-L., Lee K.Y. Radially polarized functionally graded piezoelectric hollow cylinders as sensors and actuators. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2010. Vol. 29. No 4. P. 704–713.
14. Ватульян А.О., Кондратьев В.С. Колебания неоднородного пьезокерамического цилиндра при наличии затухания. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №4. С. 406–414.
15. Богачев И.В., Ватульян А.О. Об идентификации характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 53–62.
16. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. Идентификация характеристик функцио-

нально-градиентного пьезополимерного стержня. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2016. Т. 22. №2. С. 201–212.

17. Ватульян А.О., Дударев В.В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5. № 4. С. 259–264.

18. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. М.: Мир, 1974. 228 с.

19. Васильченко К.Е., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. К расчету амплитудно-частотных характеристик задач об установившихся колебаниях на основе кластерных технологий в ACELAN. *Вычислительные технологии*. 2005. Т. 10. №1. С. 10–20.

20. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2009. 176 с.

References

1. Vijaya M.S. *Piezoelectric Materials and Devices: Applications in Engineering and Medical Sciences*. CRC Press. 2012. 186 p.

2. Parton V.Z., Kudriavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelastic of Piezoelectric and Electroconductive Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1988. 472 p. (In Russian).

3. Adelman N., Stavsky Ye., Segal E. Axisymmetric vibrations of radially polarized piezoelectric ceramic cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 1975. Vol. 38. No 2. P. 245–254.

4. Adelman N.T., Stavsky Ye. Vibrations of radially polarized composite piezoceramic cylinders and disks. *Journal of Sound and Vibration*. 1975. Vol. 43. No 1. P. 37–44.

5. Hu J., Lin S., Zhang X., Wang Y. Radially sandwiched composite transducers composed of the radially polarized piezoelectric ceramic circular ring and metal rings. *Acta Acustica United with Acustica*. 2014. Vol. 100. No 3. P. 418–426.

6. Lin S., Fu Z., Zhang X., Wang Y., Hu J. Radially sandwiched cylindrical piezoelectric transducer. *Smart Materials and Structures*. 2013. Vol. 22. No 1. P. 015005.

7. Wang J., Shi Z. Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. Vol. 27. No 4. P. 500–511.

8. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. *Mehanika svyazannykh polej v jelementah konstrukcij. V 5 t. T. 5. Jelektroupругost [Mechanics of Coupled Fields in Structural Elements. In 5 Vols. Vol. 5. Electroelasticity]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1989. 279 p. (In Russian).

9. Grigorenko A.Y., Efimova T.L., Loza I.A. Free vibrations of axially polarized piezoceramic hollow cylinders of finite length. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. Iss. 6. P. 625–633.

10. Li Y.-D., Lee K.Y., Zhang N. A generalized hypergeometric function method for axisymmetric vibration analysis of a piezoelectric actuator. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2012. Vol. 31. No 1. P. 110–116.

11. Lejko A.G., Gladkih N.D., Nizhnik A.I., Starovojt Ja.I. Elektricheskie svoystva tsilindricheskikh p'yezokeramicheskikh izluchateley silovoy i kompensirovannoy konstruksii s okruzhnoy polarizatsiey [Electrical properties of cylindrical piezoceramic emitters with power and compensated design with circumferential polarization]. *Elektronika i svyaz [Electronics and Communications]*. 2014. Vol. 19. No 3(80). P. 62–72 (In Russian).

12. Nagaenko A.V., Marahovskij M.A. Izuchenie metodov issledovaniya p'yezokeramicheskikh materialov i elementov v protsesse ikh proizvodstva [Study of Methods of Investigation of Piezoceramic Materials and Elements in the Process of their Production]. Rostov-on-Don. Southern Federal University Publ. 2008. 49 p. (In Russian).

13. Li X.-F., Peng X.-L., Lee K.Y. Radially polarized functionally graded piezoelectric hollow cylinders as sensors and actuators. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2010. Vol. 29. No 4. P. 704–713.

14. Vatulyan A.O., Kondratev V.S. Kolebaniya neodnorodnogo p'yezokeramicheskogo tsilindra pri nalichii zatukhaniya [Vibrations of an inhomogeneous piezoceramic cylinder in the presence of damping]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2016. Vol. 78. No 4. P. 406–414 (In Russian).

15. Bogachev I.V., Vatulyan A.O. Ob identifikatsii kharakteristik funktsionalno-gradientnogo p'yezokeramicheskogo tsilindra [Identification of inhomogeneous characteristics of functionally graded piezo-polymeric rod]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2018. Vol. 80. No 1. P. 53–62 (In Russian).
16. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Identifikatsiya kharakteristik funktsionalno-gradientnogo p'yezopolimernogo sterzhnya [Identification of inhomogeneous characteristics of functionally graded piezo-polymeric rod]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktiv* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2016. Vol. 22. No 2. P. 201–212 (In Russian).
17. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. O rekonstruktsii neodnorodnykh svoystv p'yezoelektricheskikh tel [On reconstruction of inhomogeneous properties of piezoelectric solids]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2012. Vol. 5. No 4. P. 259–264 (In Russian).
18. Kristensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York. Academic Press. 1971. 245 p.
19. Vasilchenko K.E., Nasedkin A.V., Solovyev A.N. K raschetu amplitudno-chastotnykh kharakteristik zadach ob ustanovivshisya kolebaniyah na osnove klasternykh tehnologij v ACELAN [A calculation of amplitude vs frequency characteristics for oscillations of permanent form using clusters technology in ACELAN]. *Vychislitel'nye tehnologii* [Computational Technology]. 2004. Vol. 10. No 1. P. 10–20 (In Russian).
20. Vatulyan A.O., Soloviev A.N. *Pryamye i obratnye zadachi dlya odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektrouprugikh tel* [Direct and Inverse Problems for Homogeneous and Inhomogeneous Elastic and Electroelastic Solids]. Rostov-on-Don. Southern Federal University Publ. 2009. 176 p. (In Russian).

ON THE VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC CYLINDER WITH CIRCUMFERENTIAL POLARIZATION

Vatulyan A.O., Kondratev V.S.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The paper deals with of the problem of radial vibrations of a piezoceramic cylinder with circumferential polarization taking into account rheology. The piezoelectric characteristics of the cylinder are functions of the radial coordinate. The cylinder is considered as a piecewise homogeneous electroelastic body consisting of individual prisms. Assuming that the sectioned cylinder is infinitely long and there are no axial deformations in it, boundary value problems on the plane deformation of infinitely long prisms are constructed. In the special case, when all prisms of the sectioned cylinder are in identical conditions of electric loading and external mechanical loads are absent, the boundary problem for the cylinder reduces to the boundary problem for a separate prism. Rheological properties were modeled within the framework of the correspondence principle by replacing the material characteristics with complex moduli-functions of the vibration frequency. A comparison of the concept of complex modules with the widespread linear frequency approximation of the corresponding functions is performed. The solution of the problem was based on the method of shooting. The results of computational experiments on the determination of the amplitude-frequency characteristics for some laws of material inhomogeneity are presented. A series of computational experiments for various inhomogeneity laws and for a different set of initial data is performed, which made it possible to analyze the dependence of the resonant frequencies on the laws of variation of physical characteristics and rheology. A method for reconstructing of the inhomogeneity laws from information on the values of dimensionless functions-radial displacement and radial stress in a certain set of points inside the region using spline approximations is performed. The results of computational experiments have shown sufficient effectiveness of the proposed method.

Keywords: electroelasticity, piezoceramic cylinder, complex module, inverse problem.