

УДК 539.3

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛОГИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

© 2018 г.

**Сергеев О.А.¹, Киселев В.Г.¹,
Сергеева С.А.², Новиков В.В.¹**

¹*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Нижегородский государственный технический университет им. П.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kiselev@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 27.02.2018

Исследуется проблема чувствительности и оптимизации пологих стержневых конструкций при одновременном варьировании координат узлов, размеров, площадей поперечных сечений с ограничениями на критическую нагрузку общей потери устойчивости с учетом геометрической нелинейности, ограничений по прочности. Материал конструкций, у которых возникают большие перемещения, принимается линейно упругим. Внешние нагрузки считаются консервативными. Под общей потерей устойчивости конструкции понимается вырожденность ее касательной матрицы жесткости в критических точках. Сформулированы критерии классификации трех типов критических точек – симметричная и асимметричная точки бифуркации, предельная точка. Особое внимание уделяется общей потере устойчивости в предельных точках, характерных для низких или пологих стержневых конструкций типа ферм, арок, куполов и т.д. Для отслеживания фундаментальной кривой равновесных состояний с предельными точками используется метод последовательных приращений перемещений. Аналитически исследована чувствительность критической нагрузки, соответствующей предельной точке, и осуществлен анализ чувствительности перемещений геометрически нелинейных конструкций. Для анализа чувствительности применяется прямой метод. Предложен метод оптимизации для гибких пологих стержневых конструкций с учетом геометрической нелинейности и ограничений на устойчивость. Дополнительным условием в рассматриваемой задаче оптимизации является условие возникновения предельных точек раньше точек бифуркации. Методика апробирована на эталонной конструкции. Полученные в среде ANSYS результаты с учетом линейного и нелинейного анализов устойчивости хорошо согласуются с численными результатами, представленными зарубежными исследователями для эталонной конструкции.

Ключевые слова: стержневые конструкции, геометрическая нелинейность, предельные точки, точки бифуркации, критическая сила, потеря устойчивости, аналитическое исследование, анализ чувствительности, оптимизация.

Введение

Поведение гибких пологих легких стержневых конструкций, у которых возникают большие перемещения без развития больших деформаций и напряжений, не растущих выше предела упругости материала, не может быть описано адекватно с помощью линейного анализа устойчивости [1–5]. Перемещения и критическая нагрузка общей потери устойчивости должны определяться с учетом геометрической нелинейности. Исследование устойчивости и закритического поведения конструкции с учетом геометрической нелинейности является более сложным по сравнению с определением критической нагрузки путем линейного анализа устойчивости [6–11]. Например, принцип суперпозиции при действии нескольких вариантов нагружения конструкции с учетом геометрической нелинейности не выполняется.

До сих пор значительная часть исследований фокусируется на оптимизации размеров поперечных сечений ферм, рам с ограничениями на критическую нагрузку общей потери устойчивости с использованием линейного анализа устойчивости [12–16].

Существует небольшое количество публикаций по оптимальному проектированию стержневых конструкций с варьированием координат узлов, размеров, площадей поперечных сечений при ограничениях на критическую нагрузку с учетом геометрической нелинейности [9, 17].

Настоящая статья посвящена разработке эффективного метода анализа чувствительности и оптимизации пологих стержневых конструкций при одновременном варьировании координат узлов, размеров, площадей поперечных сечений с ограничениями на критическую нагрузку общей потери устойчивости с учетом геометрической нелинейности, ограничений по прочности, ограничений на варьируемые параметры конструкции. На эталонной стержневой конструкции демонстрируются достоверность, пригодность, надежность предложенной методики оптимального проектирования и тестируются возможности программного комплекса ANSYS [18].

1. Постановка задачи оптимизации

Задача оптимального проектирования по весу стержневой конструкции может быть сформулирована как задача нелинейного условного программирования [12, 19–21]: требуется найти такие значения управляемых параметров \mathbf{X}^* (координаты узлов, площади, размеры поперечных сечений) из области допустимых значений F , для которых вес конструкции будет минимальным:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} \sum_{e=1}^k \rho_e A_e(\mathbf{X}) L_e(\mathbf{X}), \quad (1)$$

где ρ_e – плотность материала элемента, A_e – площадь поперечного сечения элемента, L_e – длина элемента, k – число элементов.

Область допустимых значений F определяется ограничениями на критическую нагрузку общей потери устойчивости, эквивалентные напряжения в объемах элементов и ограничениями на варьируемые параметры конструкции:

$$F = \{ \mathbf{X} : \Lambda^C(\mathbf{X}) \mathbf{P}_0 \geq \Lambda^D \mathbf{P}_0 \Rightarrow \Lambda^C(\mathbf{X}) \geq \Lambda^D, \\ \sigma_{\text{эkv}}^e(\mathbf{X}) \leq [\sigma], \quad e = \overline{1, k}, \quad (2)$$

$$X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}, \quad i = \overline{1, m},$$

где Λ^C – некратный множитель внешней консервативной нагрузки \mathbf{P}_0 , при котором появляется предельная точка; Λ^D – заданный рабочий множитель нагрузки или нижняя граница критического множителя; $\sigma_{\text{экв}}^e$ – эквивалентные напряжения в объемах элементов; $[\sigma]$ – допустимое напряжение; X_i^{\min}, X_i^{\max} – нижний и верхний пределы варьируемого параметра X_i ; m – число варьируемых параметров.

2. Основные уравнения

Рассмотрим пологую гибкую упругую конструкцию, у которой возникают большие перемещения и повороты без развития больших деформаций и напряжений. Материал конструкции удовлетворяет линейному закону Гука. Отклик конструкции является нелинейным и является результатом конечных (больших) поворотов и перемещений. Полная потенциальная энергия конструкции $\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \mathbf{X})$ зависит от вектора перемещений \mathbf{u} , пропорционального множителя нагрузки Λ , варьируемых параметров \mathbf{X} . Считаем, что все компоненты внешней консервативной нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру Λ . Тогда можно записать

$$\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{X}) - \Lambda \mathbf{u}^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}), \quad (3)$$

где $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ – энергия деформации, $\mathbf{P}_0(\mathbf{X})$ – вектор внешних консервативных нагрузок.

Уравнения равновесия для такой конструкции имеют вид:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, \mathbf{X}) = \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \right\} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, \mathbf{X})$ – вектор невязки или вектор неуравновешенных сил, если вектор перемещений \mathbf{u} не является истинным; n – число степеней свободы конструкции.

Параметрические уравнения равновесной кривой I (рис. 1) в $(n+1)$ -размерном пространстве «перемещения – множитель нагрузки» (\mathbf{u}, Λ) имеют вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \Lambda = \Lambda(t), \quad (5)$$

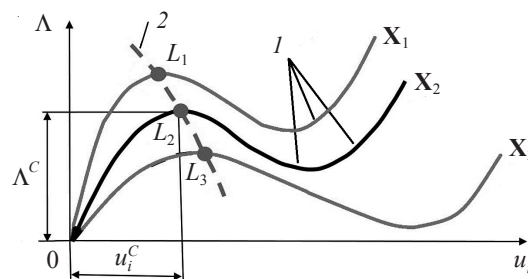


Рис. 1. Равновесные кривые для геометрически нелинейной модели

где t – параметр продвижения вдоль равновесной кривой.

Рассматриваются три альтернативы для выбора параметра t :

1) параметр продвижения равен множителю нагрузки $t = \Lambda$,

2) параметр продвижения равен выделенной компоненте вектора перемещений $t = u_i$,

3) параметр продвижения равен длине дуги равновесной кривой $t = s$.

Заметим, что параметрическая форма (5) не работает в критических точках, где пересекаются две или более равновесных кривых.

На рис. 1 показаны равновесные кривые геометрически нелинейной пологой конструкции на плоскости (u_i, Λ) и предельные точки для различных наборов управляемых параметров $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$, где обозначено: 1 – равновесная кривая, 2 – кривая критических состояний. Точки L_1, L_2, L_3 – критические точки на равновесных кривых, соответствующих наборам значений $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ управляемых параметров.

Дифференцируя уравнения равновесия (4) по параметру продвижения t вдоль равновесной кривой, можно записать

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_\Lambda \dot{\Lambda} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) \dot{\Lambda} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где точка сверху и нижний индекс обозначают дифференцирование по t и частную производную по Λ ; $\mathbf{K} = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u}$ – касательная матрица жесткости, которая является симметричной.

Уравнение (6) представим в виде

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) \Delta \Lambda = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Касательная жесткость определяется как отношение приращения силы к приращению перемещения. Знак касательной жесткости связывается с устойчивостью положения равновесия. Отрицательная касательная жесткость ассоциируется с неустойчивым положением равновесия, а положительная касательная жесткость – с устойчивым положением равновесия.

Система уравнений (7) имеет n уравнений с $(n + 1)$ неизвестными. Если задано приращение перемещения Δu_i , то можно отыскать оставшиеся $(n - 1)$ приращений перемещений $\Delta \mathbf{u}$ и приращение множителя нагрузки $\Delta \Lambda$ при условии, что определитель касательной матрицы жесткости конструкции не равен нулю

$$\det \mathbf{K} \neq 0. \quad (8)$$

Таким образом, отслеживаем кривую равновесных состояний I в $(n + 1)$ -размерном пространстве (\mathbf{u}, Λ) по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{s+1} &= \mathbf{u}_s + \Delta \mathbf{u}_s, \\ \Lambda_{s+1} &= \Lambda_s + \Delta \Lambda_s, \end{aligned} \quad (9)$$

где s – номер шага.

3. Условие потери устойчивости конструкции

Вырожденность касательной матрицы жесткости \mathbf{K} трактуется как общая потеря устойчивости конструкции. Соответствующие точки $(\mathbf{u}^C, \Lambda^C)$ равновесной кривой называются критическими точками, а значение множителя нагрузки $\Lambda^C(\mathbf{X})$, при котором касательная матрица жесткости теряет положительную определенность, называется критическим. Следовательно, критическая точка определяется с использованием условия:

$$\det \mathbf{K}(\mathbf{u}^C, \mathbf{X}) = 0. \quad (10)$$

Равновесное состояние конструкции перестает быть однозначным: либо происходит разветвление форм равновесия, либо возникают предельные точки на рав-

новесных кривых.

Альтернативным подходом для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости, которое является решением проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}^C(\mathbf{u}^C, \mathbf{X})\Phi_j = \lambda_j \mathbf{I}\Phi_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

где Φ_1 – первая форма потери устойчивости конструкции, \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{K}^C(\mathbf{u}^C, \mathbf{X})$ – симметричная касательная матрица жесткости в критической точке.

Собственные значения λ_j являются действительными и упорядочиваются по величине

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (12)$$

Собственные векторы определяются с точностью до множителя и поэтому нормируются, то есть выполняется условие

$$\Phi_i^T \Phi_j^T = \delta_{ij}, \quad (13)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

4. Классификация некратных критических точек

Для классификации некратных критических точек умножим слева уравнение (6) на Φ_1^T . Тогда:

$$\Phi_1^T (\mathbf{K}^C \dot{\mathbf{u}}^C + \mathbf{r}_\Lambda^C \dot{\Lambda}^C) = \Phi_1^T (\mathbf{K}^C \dot{\mathbf{u}}^C - \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) \dot{\Lambda}^C) = 0. \quad (14)$$

Из (14) приходим к условию потери устойчивости конструкции:

$$\dot{\Lambda}^C \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\Lambda}^C \Phi_1^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) = 0, \quad (15)$$

которое будем использовать для классификации некратных критических точек.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C = 0, \quad \dot{\Lambda}^C = 0 \quad \text{или} \quad \Phi_1^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) = 0, \quad \dot{\Lambda}^C = 0, \quad (16)$$

называется симметричной точкой бифуркации, где происходит разветвление равновесных кривых.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C = 0, \quad \dot{\Lambda}^C \neq 0 \quad \text{или} \quad \Phi_1^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) = 0, \quad \dot{\Lambda}^C \neq 0, \quad (17)$$

называется асимметричной точкой бифуркации.

Точка на равновесной кривой, для которой выполняется условие

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^C = 0 \quad \text{или} \quad \Phi_1^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^C = 0, \quad (18)$$

называется предельной точкой, где касательная к равновесной кривой параллельна горизонтальной оси и одному уровню нагрузки соответствуют различные перемещения.

5. Анализ чувствительности критического множителя нагрузки и перемещений для предельной точки

Рассмотрим задачу определения производных по варьируемому параметру X критического множителя нагрузки $d\Lambda^C/dX$ и перемещений $d\mathbf{u}^C/dX$ для предельной

точки.

Дифференцируя уравнение (4) по X , имеем

$$\mathbf{K}^C \frac{d\mathbf{u}^C}{dX} + \mathbf{r}_\Lambda^C \frac{d\Lambda^C}{dX} + \mathbf{r}_X^C = 0. \quad (19)$$

Умножая (19) слева на Φ_1^T , получим уравнение для определения $d\Lambda^C/dX$:

$$\Phi_1^T \mathbf{K}^C \frac{d\mathbf{u}^C}{dX} + \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C \frac{d\Lambda^C}{dX} + \Phi_1^T \mathbf{r}_X^C = 0, \quad (20)$$

откуда для предельной точки получаем

$$\frac{d\Lambda^C}{dX} = -\frac{\Phi_1^T \mathbf{r}_X^C}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^C}. \quad (21)$$

Из одного уравнения (19) нельзя определить производную $d\mathbf{u}^C/dX$, так как матрица \mathbf{K}^C является особенной. Поэтому необходимо записать еще одно дополнительное уравнение. Дифференцируя уравнение (11) по X вдоль кривой критических состояний 2 (см. рис. 1) и умножая его слева на Φ_1^T , запишем необходимое дополнительное уравнение:

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^C}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \frac{d\mathbf{u}^C}{dX} + \Phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}^C}{\partial \Lambda} \frac{d\Lambda^C}{dX} + \frac{\partial \mathbf{K}^C}{\partial X} \right) \Phi_1 = 0. \quad (22)$$

Теперь имеем уравнения (19) и (22) для определения производной перемещений $d\mathbf{u}^C/dX$.

6. Исследование устойчивости закритического положения равновесия конструкции по приращению полной потенциальной энергии

По приращению полной потенциальной энергии исследуем устойчивость положения равновесия, близкого к предельной точке. Выражение для приращения потенциальной энергии можно представить в виде [22]:

$$\Delta \Pi = \frac{B_1}{6} \Delta \bar{s}^3 + o(\Delta \bar{s}^4), \quad (23)$$

где

$$\Delta \bar{s} = \pm \sqrt{-\frac{B_4}{B_1} \Delta^2 \Lambda^C}, \quad B_1 = \Phi_1^T \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{r}^C}{\partial u_i \partial u_j} \Phi_{1i} \Phi_{1j} \right\}, \quad B_4 = \Phi_1^T \mathbf{P}_0(\mathbf{X}),$$

$\Delta^2 \Lambda^C$ – второй дифференциал критического множителя нагрузки; Φ_{1i} , Φ_{1j} – компоненты первой формы Φ_1 потери устойчивости конструкции.

Если $B_1 > 0$, то приращение полной потенциальной энергии $\Delta \Pi > 0$ для $\Delta \bar{s} > 0$ (закритическое поведение конструкции является устойчивым), $\Delta \Pi < 0$ для $\Delta \bar{s} < 0$, (закритическое поведение конструкции является неустойчивым).

Когда $B_1 < 0$, приращение полной потенциальной энергии $\Delta \Pi > 0$ для $\Delta \bar{s} < 0$ (закритическое поведение конструкции является устойчивым), $\Delta \Pi < 0$ для $\Delta \bar{s} > 0$ (закритическое поведение конструкции является неустойчивым).

7. Аппроксимация задачи оптимизации

Задача оптимизации (1), (2) может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{Minimize}_{\mathbf{X} \in \tilde{F}} \left(\Delta W = \nabla^T W(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{X} \right), \quad (24)$$

где \mathbf{H} – матрица Гессе, образованная вторыми частными производными функции Лагранжа,

$$\nabla^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_m} \right\}.$$

Допустимая область \tilde{F} определяется линейными аппроксимациями активных ограничений

$$\sigma_{\text{экв}}^e(\mathbf{X}) + \nabla^T \sigma_{\text{экв}}^e(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{X} \leq [\sigma], \quad (25)$$

$$\Lambda^C(\mathbf{X}) + \nabla^T \Lambda^C(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{X} \geq \Lambda^D,$$

где компоненты $\Delta \mathbf{X}$ определяются как

$$\Delta X_i^{\min} \leq \Delta X_i \leq \Delta X_i^{\max}, \quad (26)$$

$$\Delta X_i^{\max} = \frac{X_i^{\max} - X_i^{\min}}{10}, \quad \Delta X_i^{\min} = -\Delta X_i^{\max}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Эффективность представленной методики проверена на эталонной конструкции антенны в системе ANSYS.

Пример. Антенна

На рис. 2 показана пространственная симметричная 30-элементная антенна, характерные размеры которой: $a = 9144$ мм, $b = 7918,03$ мм, $c = 551,409$ мм, $d = 1091,01$ мм, $e = 539,75$ мм. Антенна имеет 21 степень свободы: перемещения узлов 1–7 вдоль осей X , Y и Z . Вертикальная консервативная нагрузка \mathbf{P}_0 , приложенная в узле 1, равна 8895,71 Н. Материал конструкции – алюминиевый сплав: модуль упругости $E = 68,94$ ГПа, плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³, допустимое напряжение $[\sigma] = 137,88$ МПа. Параметрами проектирования являются площади

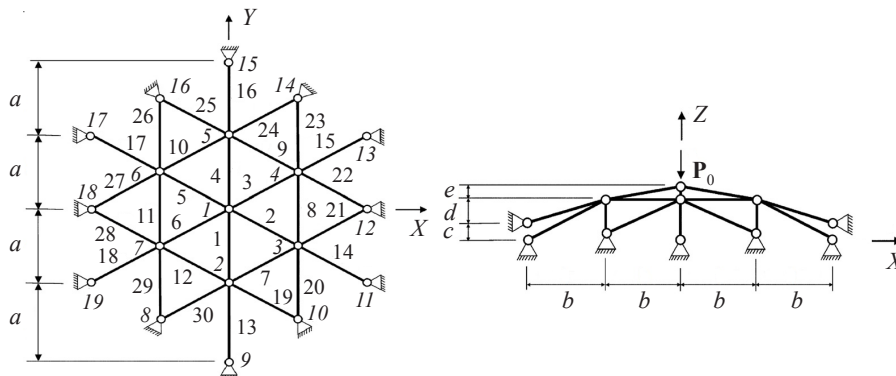


Рис. 2. Начальная конечно-элементная модель антенны

поперечных сечений 30 элементов, которые объединяются в 4 типа $A_i, i = \overline{1, 4}$.

Задача оптимизации сводится к нахождению значений площадей поперечных сечений стержней $A_i, i = \overline{1, 4}$, для которых вес антенны будет минимальным с учетом ограничений на критическую нагрузку потери устойчивости антенны $\Lambda^C(A_1, A_2, A_3, A_4) \geq 1$, ограничений на напряжения в стержнях $\sigma_i \leq 137,88$ МПа, $i = \overline{1, 30}$, и варьируемые площади $64,516 \leq A_i \leq 5000$ мм².

Оптимальные формы антенны с учетом линейного и нелинейного анализов ус-

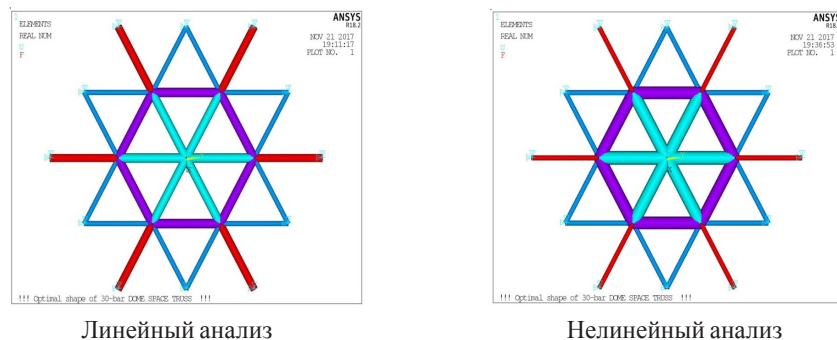


Рис. 3. Оптимальные формы (вид сверху)

тойчивости показаны на рис. 3.

Начальные и оптимальные значения варьируемых параметров и веса антенны показаны в таблице 1.

Таблица 1

Начальный и оптимальный проекты для антенны					
Стержни	Варьируемые параметры	Начальные	Площади поперечных сечений, мм ²		
			Линейный анализ	Оптимальные	
			устойчивости	Нелинейный анализ	Нелинейный анализ
			устойчивости	устойчивости	устойчивости [3]
1–6	A_1	1290,3	215,86	1047,60	1041,93
7–12	A_2	1290,3	217,45	939,31	941,611
13–18	A_3	1290,3	173,13	64,52	64,516
19–30	A_4	1290,3	64,52	64,52	64,516
Вес конструкции, Н		9672,95	1101,76	3254,08	3247,60

Для начальных значений варьируемых параметров критическая нагрузка потери устойчивости антенны с учетом нелинейного анализа в 4,73 раза меньше критической нагрузки с учетом линейного анализа устойчивости. Оптимальный вес пространственной фермы с учетом линейного анализа устойчивости в 2,95 раза меньше оптимального веса, полученного в ANSYS с учетом геометрически нелинейного анализа (см. таблицу 1).

Заключение

Проведена классификация критических точек. Вырожденность касательной матрицы жесткости конструкции в критических точках трактуется как общая поте-

ря устойчивости. Для отслеживания фундаментальной равновесной кривой с предельными точками используется метод последовательного приращения перемещений. Аналитически исследованы чувствительность критической нагрузки общей потери устойчивости и перемещений для предельной точки.

Сформулированы и решены задачи оптимального проектирования пологих стержневых конструкций с использованием нелинейного анализа устойчивости, ограничений на критическую нагрузку общей потери устойчивости, соответствующую предельной точке, ограничений на напряжения при одновременном варьировании координат узлов, размеров, площадей поперечных сечений.

Методика позволяет исследовать устойчивость закритической кривой из предельной точки.

Эффективность представленной методики проверена на эталонной конструкции в системе ANSYS. Установлено, что применение линейного анализа устойчивости завышает критическую нагрузку общей потери устойчивости и занижает оптимальный вес конструкций.

Применение линейного анализа устойчивости может быть оправданным для высоких стержневых конструкций с большим отношением высоты к расстоянию между опорами, когда точка бифуркации появляется первой на фундаментальной равновесной кривой.

Список литературы

1. Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
2. Алфутов Н.А., Колесников К.С. *Устойчивость движения и равновесия*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 256 с.
3. Suleman A., Sedaghati R. Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures. *Structural Multidisciplinary Optimization*. 2005. Vol. 30. Iss. 4. P. 273–296.
4. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1991. 345 p.
5. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 2. New York: John Wiley & Sons, 1997. 494 p.
6. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K.I. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York: John Wiley & Sons, 2014. 804 p.
7. Thompson J.M.T., Hunt G.W. *A General Theory of Elastic Stability*. New York: John Wiley & Sons, 1973. 322 p.
8. Waszczyszyn Z., Cichon C., Radwanska M. *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Elsevier Science B.V. 1994. 468 p.
9. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы. *Инженерно-строительный журнал*. 2013. №9(44). С. 30–41. DOI: 10.5862/MCE.44.4.
10. Galishnikova G., Dunaiski P., Pahl P.J. *Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames*. Stellenbosch: Sun Press, 2009. 382 p. DOI: 10.18820/9781920109998.
11. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Анализ устойчивости равновесных кривых нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках. *Проблемы прочности и пластичности*. 2006. Вып. 68. С. 126–138.
12. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Анализ чувствительности и оптимизация пространственных рам с учетом общей устойчивости. *Испытания материалов и конструкций: сборник научных трудов*. Н. Новгород: Интелсервис, 2000. Вып. 2. С. 77–95.
13. Киселев В.Г., Сергеев О.А., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование пространственных рам с учетом ограничений по прочности и общей устойчивости. *Проблемы проч-*

ности и пластичности. 2000. Вып. 62. С. 117–128.

14. Ohsaki M. *Optimization of Finite Dimensional Structures*. Boca Raton: CRC Press, 2010. 439 p.

15. Spillers W.R., MacBain K.M. *Structural Optimization*. Springer, 2009. 302 p.

16. Хог Э., Арора Я. *Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции*. М.: Мир, 1983. 479 с.

17. Любимов А.К., Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях по устойчивости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 134–145.

18. *Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство*. Под ред. А.К. Любимова. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. 227 с.

19. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование рам с учетом ограничений по прочности и кратным частотам собственных колебаний. *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 74–81.

20. Sergeyev O., Pedersen P. On design of joint positions for minimum mass 3D frames. *Structural Optimization*. 1996. Vol. 11. Iss. 2. P. 95–101.

21. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Анализ чувствительности в кратных критических точках и оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 59–69.

22. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Анализ закритического поведения геометрически нелинейных упругих пространственных рам. *Вестник ННГУ. Серия Механика*. 2004. Вып. 1(6). С. 177–190.

References

1. Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh sistem [Bases of Calculation on Stability of Elastic Systems]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1991. 336 p. (In Russian).

2. Alfutov N.A., Kolesnikov K.S. *Ustoychivost dvizheniya i ravnovesiya [Stability of Motion and Equilibrium]*. Moscow. Bauman MSTU Publ. 2003. 256 p. (In Russian).

3. Suleman A., Sedaghati R. Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures. *Structural Multidisciplinary Optimization*. 2005. Vol. 30. Iss. 4. P. 273–296.

4. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1. New York. John Wiley & Sons. 1991. 345 p.

5. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 2. New York. John Wiley & Sons. 1997. 494 p.

6. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K.I. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York. John Wiley & Sons. 2014. 804 p.

7. Thompson J.M.T., Hunt G.W. *A General Theory of Elastic Stability*. New York. John Wiley & Sons. 1973. 322 p.

8. Waszczyszyn Z., Cichon C., Radwanska M. *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Elsevier Science B.V. 1994. 468 p.

9. Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Obshchaya poterya ustoychivosti i optimizatsiya stержnevyykh konstruksiy so sluchaynymi nesovershenstvami pri ogranicheniyakh na veroyatnost bezotkaznoy raboty [Overall instability and optimization of bar structures with random defects in case of constraints on faultless operation probability]. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal [Magazine of Civil Engineering]*. 2013. No 9(44). P. 30–41. DOI: 10.5862/MCE.44.4 (In Russian).

10. Galishnikova G., Dunaiski P., Pahl P.J. *Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames*. Stellenbosch. Sun Press. 2009. 382 p. DOI: 10.18820/9781920109998.

11. Sergeyev O.A., Kiselev V.G. Analiz ustoychivosti ravnovesnykh krivyykh nelineynykh konstruksiy i analiz chuvstvitelnosti v kratnykh kriticheskikh tochkakh [Nonlinear analysis of stability of equilibrium paths and sensitivity analysis at multiple critical points]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2006. Iss. 68. P. 126–138 (In Russian).

12. Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Analiz chuvstvitelnosti i optimizatsiya prostranstvennykh ram s uchedom obshchey ustoychivosti [Sensitivity analysis and optimization of spatial frames taking into account overall stability]. *Ispytaniya materialov i konstruksiy. Sbornik nauchnykh trudov [Testing of Materials and Structures. Collection of Scientific Works]*. Nizhni

Novgorod. Intelservis Publ. 2000. Iss. 2. P. 77–95 (In Russian).

13. Kiselev V.G., Sergeyev O.A., Sergeyeva S.A. Optimalnoe proektirovanie prostranstvennykh ram s uchetoм ogranicheniy po prochnosti i obshchey ustoychivosti [Optimal design of three-dimensional frame structures for effective stress and overall stability constraints]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2000. Iss. 62. P. 117–128 (In Russian).

14. Ohsaki M. *Optimization of Finite Dimensional Structures*. Boca Raton. CRC Press. 2010. 439 p.

15. Spillers W.R., MacBain K.M. *Structural Optimization*. Springer. 2009. 302 p.

16. Haug E.J., Arora J.S. *Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems*. New York. Wiley-Interscience. 1979. 506 p.

17. Lyubimov A.K., Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimizatsiya sterzhnevnykh konstruksiy so sluchaynymi nesovershenstvami pri ogranicheniyakh po ustoychivosti [Optimization of bar structures with random imperfections with stability constraints]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2012. Iss. 74. P. 134–145 (In Russian).

18. *Primenenie sistemy ANSYS k resheniyu zadach mekhaniki sploshnoy sredy. Prakticheskoe rukovodstvo. Pod red. A.K. Lyubimova* [Application of the System in ANSYS for Solution of Problems of Continuum Mechanics. Practical Guide. Ed. A.K. Lyubimov]. Nizhny Novgorod. UNN Publ. 2006. 227 p. (In Russian).

19. Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimalnoe proektirovanie ram s uchetoм ogranicheniy po prochnosti i kratnym chastotam sobstvennykh kolebaniy [Optimal design of 3D frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints]. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2016. No 1(61). P. 74–81 (In Russian).

20. Sergeyev O., Pedersen P. On design of joint positions for minimum mass 3D frames. *Structural Optimization*. 1996. Vol. 11. Iss. 2. P. 95–101.

21. Sergeyev O.A., Kiselev V.G. Analiz chuvstvitelnosti v kratnykh kriticheskikh tochkakh i optimalnoe proektirovanie geometricheski nelineynykh konstruksiy [Sensitivity analysis at multiple critical points and optimal design of geometrically nonlinear constructions]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2007. Iss. 69. P. 59–69 (In Russian).

22. Sergeyev O.A., Kiselev V.G. Analiz zakriticheskogo povedeniya geometricheski nelineynykh uprugikh prostranstvennykh ram [Analysis of the supercritical behavior of geometrically nonlinear elastic spatial frames]. *Vestnik NNGU. Seriya Mekhanika* [Vestnik of NNGU. Mechanics Series]. 2004. Iss. 1(6). P. 177–190 (In Russian).

THE SENSITIVITY ANALYSIS AND THE OPTIMIZATION OF SHALLOW ROD STRUCTURES, ACCOUNTING FOR GEOMETRIC NONLINEARITIES AND STABILITY CONSTRAINTS

Sergeyev O.A.¹, Kiselev V.G.¹, Sergeyeva S.A.², Novikov V.V.¹

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

²Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

The paper addresses the issue of sensitivity and the optimization of shallow rod structures with simultaneously varying the node coordinates, dimensions, cross-section areas, and with constraints on the critical total instability load, accounting for geometric nonlinearities, strength constraints. The material of the structures undergoing large displacements is assumed linearly elastic. All the external loads are considered conservative. Total loss of stability of a structure is interpreted as a singularity of its tangential stiffness matrix in critical points. The criteria for classifying the three types of the critical points – symmetric, asymmetric bifurcation points and a limit point – have been formulated. Special attention is paid to total loss of stability in limit points, characteristic of

low or shallow rod structures, such as trusses, arches, cupolas, etc. To trace a fundamental curve of equilibrium states with limit points, the method of successive increments of displacements is used. Sensitivity of the critical load corresponding to a limit point has been analytically studied, and sensitivity of displacements of geometrically nonlinear structures has been analyzed. Sensitivity was analyzed using the direct method. A method for optimizing elastic shallow rod structures, accounting for geometric nonlinearities and stability constraints is presented. An additional condition in the considered optimization problem is the condition that limit points arise earlier than bifurcation ones. The methodology has been tested on benchmark structure – the spatial symmetric thirty-element aerial. The results obtained in the ANSYS medium, accounting for the linear and nonlinear analyses of stability are in good agreement with results published by foreign researchers for the benchmark structure.

Keywords: rod structures, geometric nonlinearity, limit points, bifurcation points, overall buckling load, overall loss of stability, analytical study, sensitivity, optimization.