

УДК 539.3

СИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО УДАРНИКА НА СВЕРХЗВУКОВОМ ЭТАПЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ*

© 2018 г. Коровайцева Е.А.¹, Тарлаковский Д.В.^{1,2}

¹НИИ механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

katrell@mail.ru

Поступила в редакцию 06.06.2018

Исследуется плоская нестационарная контактная задача о взаимодействии симметричного абсолютно твердого ударника и вязкоупругой полуплоскости на сверхзвуковом этапе. Движение полуплоскости описывается двумерными интегро-дифференциальными уравнениями, наследственные свойства материала полуплоскости моделируются ядром релаксации Колтунова. Движение ударника предполагается вертикальным. Рассмотрены два предельных условия контакта: абсолютно жесткое сцепление и свободное проскальзывание. Показано, что выражение для контактной силы для обоих условий одинаковое. Решение уравнения движения ударника получено численно методом Рунге – Кутты для трех типов поверхностей, ограничивающих ударник: параболического, кругового и гиперболического цилиндров. Для вычисления свертки в правой части уравнения используется метод прямоугольников, при наличии особенности подынтегральной функции применяется прием мультипликативного выделения особенности. Показано, что на сверхзвуковом этапе взаимодействия временные зависимости перемещения и скорости ударника, а также изменения радиуса области контакта и скорости расширения области контакта не зависят от значений параметров ядра релаксации в рассматриваемом диапазоне их изменения. Кроме того, при отсутствии внешней силы, действующей на ударник, указанные зависимости практически совпадают. С использованием метода малого параметра выполнена оценка влияния вязкости на характеристики контактного взаимодействия для случая ограничения поверхности ударника параболическим цилиндром. Показано, что на сверхзвуковом этапе величины, характеризующие контактное взаимодействие, не зависят от параметров вязкости материала, порядка алгебраической поверхности, ограничивающей ударник, а также от типа ограничивающей поверхности при отсутствии воздействия внешней силы на ударник.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругая полуплоскость, сверхзвуковой этап взаимодействия, функция влияния.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-38-60074 мол_а_дк).

Введение

Изучению нестационарных динамических процессов в линейно-вязкоупругих телах в последние десятилетия посвящен целый ряд публикаций, однако ввиду математической сложности соответствующих задач многие вопросы в этой области до сих пор остаются открытыми, а область применения получаемых решений зачастую ограничена. Так, использование одного из первых разработанных подходов к исследованию динамических задач линейной вязкоупругости, предполагающего распространение принципа Вольтерры на задачи указанного типа [1], существенно ограничено условиями, налагаемыми на свойства материала. Другой подход предполагает построение решения динамической задачи линейной вязкоупругости с помощью интегральной свертки решения соответствующей динамической задачи теории упругости с решением некоторой вспомогательной одномерной динамической задачи, в которой участвуют наследственные ядра материала линейно-вязкоупругого тела [2]. Решение такой задачи может быть получено с применением одной из наиболее распространенных процедур построения решений нестационарных динамических задач линейной вязкоупругости – преобразования Лапласа по времени с последующим обращением (например, [3–10]). Сложность операции обращения приводит к тому, что зачастую ее проводят асимптотически (то есть в сильно ограниченном диапазоне изменения времени) или при существенных ограничениях на свойства материала.

Решению динамических контактных задач вязкоупругости посвящено ограниченное количество публикаций, причем рассматриваются либо статические, либо стационарные динамические процессы взаимодействия тел. Так, в [11] представлено решение контактной задачи о стационарном движении штампа по вязкоупругой полосе. При этом использован принцип соответствия [12] задач для упругой и вязкоупругой сред при дозвуковых режимах движения. В [13] получено асимптотическое решение задачи о стационарном движении жесткого штампа, имеющего углы, по полуплоскости, наследственные свойства материала которой описываются степенным законом нелинейной теории ползучести. В монографии [14] приведены аналитические решения задач о давлении жесткого штампа на вязкоупругую полуплоскость, свойства которой описываются экспоненциальным ядром ползучести, и о качении вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала. В последнем случае получены соотношения для длины площадки контакта, нормального давления и тангенциальных усилий, действующих на границе полуплоскости. В статье [15] методом конечных элементов решена задача о качении вязкоупругой шины, моделируемой кольцом, по упругому основанию. Вязкоупругие свойства материала описываются моделью Кельвина – Фойгта. Получены значения собственных частот шины и распределения нормальной контактной силы.

В доступной литературе не представлены решения нестационарных динамических контактных задач вязкоупругости. В настоящей статье впервые приведено решение нестационарной динамической плоской задачи о взаимодействии абсолютно твердого ударника с вязкоупругой полуплоскостью, наследственные свойства материала которой описываются ядром Колтунова.

1. Постановка задачи

В декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_3 рассматривается вязкоупругая полуплоскость $x_3 \geq 0$, коэффициент Пуассона материала которой не зависит от времени. С полуплоскостью взаимодействует движущийся вдоль оси Ox_3 ограниченный гладкой выпуклой цилиндрической поверхностью абсолютно твердый ударник. В начальный момент времени $t = 0$ он касается лобовой точкой границы полуплоскости.

Используется система безразмерных величин, обозначенных штрихами (в последующем изложении штрихи опущены):

$$\begin{aligned} x'_k &= \frac{x_k}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u'_k = \frac{u_k}{L}, \quad \sigma'_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\lambda + 2\mu} \quad (k, l = 1, 3), \\ M'(\tau) &= \frac{4L}{3\rho c_1^3} M(t), \quad m' = \frac{m}{\rho L^2}, \quad R'_3 = \frac{R_3}{(\lambda + 2\mu)L}, \quad R'_e = \frac{R_e}{(\lambda + 2\mu)L}, \\ \eta &= \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{\gamma}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \kappa = 1 - 2\gamma^2, \quad \beta^2 = 1 - \gamma^2, \end{aligned}$$

где L – некоторый характерный линейный размер; u_k – координаты вектора перемещений; σ_{kl} – напряжения; $M(t)$ – ядро релаксации; m – погонная масса ударника; ρ – плотность материала полуплоскости; R_3 и R_e – контактная и внешняя силы; c_1 и c_2 – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в упругой среде соответственно; λ, μ – упругие постоянные Ламе.

Безразмерные уравнения движения полуплоскости имеют вид [16]:

$$D(\tau) * \left(\beta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \gamma^2 \Delta u_1 \right) = \ddot{u}_1, \quad D(\tau) * \left(\beta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \gamma^2 \Delta u_3 \right) = \ddot{u}_3, \quad (1)$$

где

$$D(\tau) = \delta(\tau) - M(\tau), \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (2)$$

Здесь $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака; звездочка соответствует свертке по времени τ .

Соотношения для напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= D(\tau) * T_{kl}(u_1, u_3), \\ T_{11}(u_1, u_3) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad T_{22}(u_1, u_3) = \kappa \theta, \quad T_{33}(u_1, u_3) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \kappa \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ T_{12}(u_1, u_3) &= T_{23}(u_1, u_3) = 0, \quad T_{13}(u_1, u_3) = \gamma^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В начальный момент времени среда находится в покое:

$$u_1|_{\tau=0} = u_3|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = \dot{u}_3|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Граничная поверхность ударника в начальный момент времени $\tau = 0$ задается уравнением:

$$x_3 + l = f(x_1), \quad f(-x_1) = f(x_1), \quad f'(x_1) < 0 \quad (x_1 > 0), \quad f'(0) = 0, \quad f''(x_1) < 0,$$

где l – расстояние между центром масс и лобовой точкой.

Движение ударника описывается следующей начальной задачей:

$$m\ddot{u}_{c3} = R_e + R_3, \quad R_3(\tau) = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} \sigma_{330}(x_1, \tau) dx_1, \quad \sigma_{330} = \sigma_{33}|_{x_3=0}, \quad (5)$$

$$u_{c3}|_{\tau=0} = u_{c30}, \quad \dot{u}_{c3}|_{\tau=0} = v_0, \quad (6)$$

где u_{c3} – перемещение центра масс ударника; $[-b(\tau), b(\tau)]$ – область контакта. Полагаем, что граница полуплоскости вне области контакта свободная:

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0, \quad |x_1| > b(\tau). \quad (7)$$

Взаимодействие ударника и полуплоскости моделируем двумя предельными условиями контакта – абсолютно жестким сцеплением и свободным проскальзыванием:

$$u_1|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = w(x_1, \tau), \quad w = f(x_1) + u_{c3} - l, \quad |x_1| \leq b(\tau), \quad (8)$$

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = w(x_1, \tau), \quad |x_1| \leq b(\tau), \quad (9)$$

где $w(x_1, \tau)$ – перемещение вдоль оси Ox_3 поверхности ударника. Кроме того, требуем, чтобы компоненты напряженно-деформированного состояния полупространства были ограничены.

2. Контактная сила

Рассматривается начальный сверхзвуковой этап взаимодействия (условия его существования для упругой среды получены в [17]), для которого на некотором интервале $\tau \leq \tau_*$ справедливо неравенство $b(\tau) \geq l$ ($\tau \leq \tau_*$). В этом случае возмущения не выходят за границу области контакта, то есть граничные условия (7)–(9) можно записать в несмешанном виде ($H(x_1)$ – функция Хевисайда):

$$u_1|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = u_{30}(x_1, \tau), \quad u_{30} = w(x_1, \tau)H[b(\tau) - |x_1|], \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = u_{30}(x_1, \tau), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

а радиус области контакта определяется из условия равенства нулю нормального перемещения, которое, согласно (8), приводит к равенству

$$b(\tau) = f^{-1}[l - u_{c3}(\tau)]. \quad (12)$$

При этом контактная сила в (5) выражается через преобразование Фурье нормальных напряжений (индекс F обозначает изображение; q – параметр преобразования):

$$R_3(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{330}(x_1, \tau) dx_1 = \lim_{q \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{330}(x_1, \tau) \exp(iqx_1) dx_1 = \sigma_{330}^F(0, \tau). \quad (13)$$

Для построения явного вида этой формулы нормальные напряжения на границе полуплоскости, соответствующие (10) и (11), записываем в интегральном виде (дополнительная звездочка соответствует свертке по координате x_1):

$$\sigma_{330}(x_1, \tau) = \Gamma_j(x_1, \tau) * u_{30}(x_1, \tau). \quad (14)$$

Здесь $\Gamma_j(x_1, \tau)$ – ограниченные нормальные напряжения на границе полуплоскости,

соответствующие (1), (4) и следующим равенствам на границе полуплоскости для двух указанных выше граничных условий ($j = 1$ и $j = 2$):

$$u_1|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = \delta(x_1)\delta(\tau), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = \delta(x_1)\delta(\tau), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Для определения функций $\Gamma_j(x_1, \tau)$ к уравнениям (1) с использованием начальных условий (4) и равенств (2) применяем преобразования Фурье и Лапласа по времени (индекс L обозначает изображение; s – параметр преобразования). В результате получаем, что изображения искомых функций при $q = 0$ для обоих случаев условий контакта совпадают:

$$\Gamma_1^{FL}(0, s) = \Gamma_2^{FL}(0, s) = \Gamma^{FL}(0, s) = -s\chi^L(s), \quad \chi^L(s) = \sqrt{1 - M^L(s)}.$$

Используя это равенство, а также формулу (14), из (13) получаем изображение результирующей силы:

$$R_3^L(s) = \sigma_{330}^{FL}(0, s) = \Gamma^{FL}(0, s)u_{30}^{FL}(0, s) = -s\chi^L(s) \int_{-\infty}^{\infty} u_{30}^L(x_1 s) dx_1.$$

Отсюда с учетом (8) и (10) находим оригинал результирующей силы:

$$R_3(\tau) = -\chi(\tau) * \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{30}(x_1, \tau) dx_1 = -2\chi(\tau) * [b(\tau)\dot{u}_{c3}(\tau)]. \quad (17)$$

Для определенности положим, что ядро релаксации является ядром Колтунова [18]. Его безразмерная форма имеет вид $M(\tau) = a\tau^{\alpha-1} \exp(-\vartheta\tau)/\Gamma(\alpha)$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $\vartheta = \beta L/c$, $a = 4LA/(3\rho c^3)$, а A , β и α – физические параметры ($\alpha \leq 1$).

Для частного случая двухпараметрического ядра релаксации при $\alpha = 1$ оригинал функции $\chi^L(s)$ имеет вид [19]:

$$\chi(\tau) = \delta(\tau) - f_r(\tau), \quad f_r(\tau) = \frac{a}{2} \left[I_0\left(\frac{a\tau}{2}\right) - I_1\left(\frac{a\tau}{2}\right) \right] \exp\left(-\left(\vartheta - \frac{a}{2}\right)\tau\right) \mathbf{H}(\tau), \quad (18)$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя.

В общем случае, учитывая, что в некоторой правой полуплоскости $\text{Re } s > \beta$ имеет место неравенство $|M^L(s)| < 1$, функцию $\chi^L(s)$ раскладываем в ряд по степеням $M^L(s)$. В результате приходим к такому равенству для функции $f_r(\tau)$ в (18):

$$f_r^L(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi_l a^l}{(s + \vartheta)^{\alpha l}}, \quad \chi_l = \frac{(2l-3)!!}{2^l l!},$$

что соответствует оригиналу:

$$f_r(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} r_l(\tau) a^l, \quad r_l(\tau) = \frac{\chi_l \tau_+^{\alpha l - 1} \exp(-\vartheta\tau)}{\Gamma(\alpha l)}. \quad (19)$$

Таким образом, на сверхзвуковом этапе взаимодействия вне зависимости от условий контакта определение перемещения центра масс ударника сводится к решению вытекающей из (5), (6), (17) и (19) начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения:

$$m\ddot{u}_{c3}(\tau) = R_e(\tau) - 2\{b(\tau)\dot{u}_{c3}(\tau) - f_r(\tau) * [b(\tau)\dot{u}_{c3}(\tau)]\},$$

$$u_{c3}|_{\tau=0} = u_{c30}, \quad \dot{u}_{c3}|_{\tau=0} = v_{c30}. \quad (20)$$

3. Пример

Задача (20) решалась численно с использованием метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности. При вычислении свертки применялся метод прямоугольников с использованием мультипликативного выделения особенности [20] подынтегральной функции $f_r(\tau)$ при $\alpha < 1$. Отрезок интегрирования был разбит на 100 шагов. Численные исследования показали, что дальнейшее увеличение числа шагов не приводит к существенному изменению результатов расчета.

Параметры ядра релаксации выбирались из условия (v – мгновенное значение коэффициента Пуассона)

$$\frac{a}{g^\alpha} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1-2v}{1-v}, \quad (21)$$

обеспечивающего ограниченную ползучесть материала [18]. В расчетах принимались $a = 1$, $v = 0,3$, значение α варьировалось в пределах $0 < \alpha \leq 1$, а параметр ϑ выбирался из условия (21).

Рассматривались три основных типа поверхностей, ограничивающих ударник: параболический цилиндр $f(x_1) = 2x_1^2$; круговой цилиндр $f(x_1) = \sqrt{1-x_1^2}$; гиперболический цилиндр $f(x_1) = \sqrt{1+x_1^2}$.

На рис. 1 и 2 представлены графики изменения во времени перемещения u_{c3} и скорости v_{c3} ударника, а на рис. 3 и 4 – зависимости для радиуса b и скорости \dot{b} расширения области контакта на сверхзвуковом этапе взаимодействия. Эти результаты соответствуют отсутствию внешней силы и начальным условиям в (20): $u_{c30} = 0$, $v_{c30} = 0,05$, причем для всех указанных поверхностей они практически совпадают. Поэтому на каждом из рисунков присутствует только одна кривая. Выявлено также, что результаты фактически не зависят от значений параметров ядра релаксации.

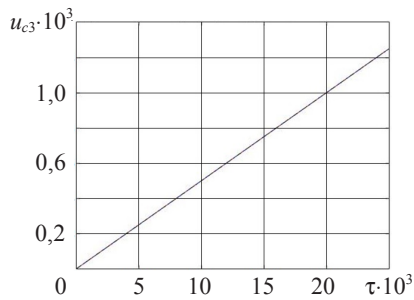


Рис. 1

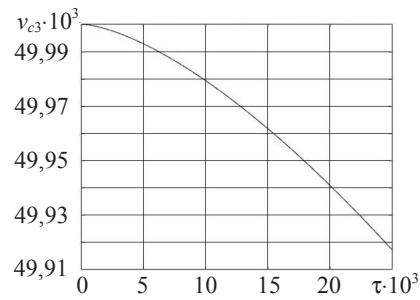


Рис. 2

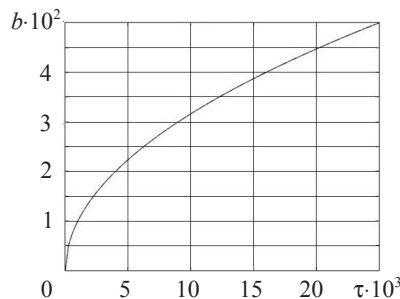


Рис. 3

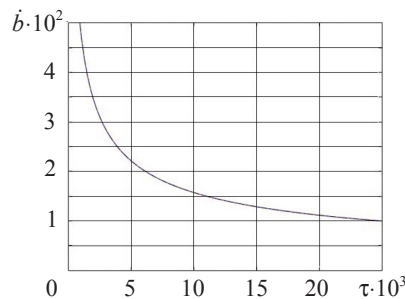


Рис. 4

Проводились также расчеты для внешней силы вида $R_e(\tau) = R_0 H(\tau)$, а также для граничных поверхностей более высокого порядка: $f(x_1) = x_1^{2n}$ ($n > 1$). Установлено, что и в этих случаях имеют место указанные особенности сверхзвукового этапа взаимодействия.

4. Оценка влияния вязкости методом малого параметра

Проиллюстрируем степень влияния вязкости на характеристики контактного взаимодействия для случая поверхности ударника в виде параболического цилиндра. С этой целью представим решение задачи (20) в виде ряда по степеням параметра ядра релаксации a , имея в виду, что вариант $a = 0$ соответствует упругой среде:

$$u_{c3}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m a^m(\tau). \quad (22)$$

Тогда, используя (12), радиус пятна контакта представляем так:

$$b(\tau) = \sqrt{u_{c3}(\tau)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m a^m, \quad (23)$$

где

$$b_0 = \sqrt{2u_0}, \quad b_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2u_0}}, \quad b_2 = \frac{4u_0 u_2 - u_1^2}{4u_0 \sqrt{2u_0}}, \dots$$

Подставляя (19), (22) и (23) в (20) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях a , получаем рекуррентную последовательность начальных задач:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_0 &= -2\dot{u}_0 \sqrt{2u_0}, \quad u_0|_{\tau=0} = u_{c30}, \quad \dot{u}_0|_{\tau=0} = v_{c30}, \\ m\ddot{u}_1 &= -2 \left[\frac{\dot{u}_0 u_1}{\sqrt{2u_0}} + \dot{u}_1 \sqrt{2u_0} - r_1 * (\dot{u}_0 \sqrt{2u_0}) \right], \quad u_1|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = 0, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Интегрирование этой последовательности выполнялось так же, как указано в п. 3, при тех же начальных условиях и следующих значениях параметров ядра релаксации: $a = 1$, $\alpha = 0,1$, $\vartheta = 1,55 \cdot 10^4$. Результаты расчета перемещения ударника, радиуса области контакта и скорости его изменения показывают, что коэффициенты рядов даже с индексом 1 значительно меньше коэффициентов с индексом ноль. Например,

$$\max_{\tau \in [0, \tau_*]} \left| \frac{u_1(\tau)}{u_0(\tau)} \right| = 9,81 \cdot 10^{-6}.$$

Заключение

Исследованы особенности сверхзвукового этапа контактного взаимодействия абсолютно твердого ударника и вязкоупругой полуплоскости. Показано, что на данном этапе величины, характеризующие контактное взаимодействие, не зависят от параметров вязкости материала, порядка алгебраической поверхности, ограничивающей ударник, а также от типа ограничивающей поверхности при отсутствии воздействия внешней силы на ударник.

Список литературы

1. Розовский М.И. Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести. Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. №4. С. 792–795.
2. Ильясов М.Х. *Нестационарные вязкоупругие волны*. Баку, 2011. 330 с.
3. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. *Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней*. Кишинев: Штиница, 1988. 190 с.
4. Егорычев О.А., Поддаева О.И. Нормальный удар по торцу цилиндрической оболочки. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2006. №1. С. 34–36.
5. Colombaro I., Giusti A., Mainardi F. On the propagation of transient waves in a viscoelastic Bessel medium. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2017. 68: 62. DOI: 10.1007/s00033-017-0808-6.
6. Локшин А.А., Суворова Ю.В. *Математическая теория распространения волн в средах с памятью*. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
7. Lin Cong-mou, Yang Lin-de. Analytic solution on propagating law of stress wave from explosion of extended charge in linear viscoelastic medium. *Journal of Shandong University of Science and Technology – Natural Sciences*. 2001. Vol. 20. No 3. P. 1–3.
8. Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. *Thermodynamics of Materials with Memory*. Springer, 2012. 574 p.
9. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current Research*. India. 2015. Vol. 7. Iss. 7. P. 18356–18360.
10. Пшеничников С.Г. Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости. *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 1. С. 84–96.
11. Белоконь А.В., Шехов В.П. *Задача о движении по вязкоупругой полосе штампа, находящегося под действием нагрузки, гармонически изменяющейся во времени*. Ростов-на-Дону, РГУ. 1979. 25 с. Деп. в ВИНТИ 11.12.79. №4303-79Деп.
12. Белоконь А.В. Некоторые «принципы соответствия» для динамических задач вязкоупругости. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1975. №6. С. 136–138.
13. Grishin S.A. Contact problems for power-law creeping body. *Proceedings of the 2nd Contact Mechanics International Symposium*. 1994. Carry-le-Rouet–New-York–London: Plenum Press, 1995. P. 319–326.
14. Галин Л.А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. М.: Наука, 1980. 304 с.
15. Padovan J. Transient and steady state viscoelastic rolling contact. *Computers & Structures*. 1985. Vol. 20. No 1. P. 545–552.
16. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
17. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. *Динамические контактные задачи с подвижными границами*. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
18. Колтунов М.А. *Ползучесть и релаксация*. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
19. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.
20. Калиткин Н.Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978. 512 с.

References

1. Rozovskii M.I. Integralno-operatornyy metod v nasledstvennoy teorii polzuchesti [Integral-operator method in the hereditary theory of creep]. *Doklady AN SSSR [Doklady Physics]*. 1965. Vol. 160. No 4. P. 792–795 (In Russian).
2. Iliasov M.H. *Nestatsionarnyye vyazkouprugiye volny [Unsteady Viscoelastic Waves]*. Baku. 2011. 330 p. (In Russian).
3. Filippov I.G., Cheban V.G. *Matematicheskaya teoriya kolebaniy uprugikh i vyazkouprugikh plastin i stержней [Mathematical Theory of Oscillations of Elastic and Viscoelastic Plates and Rods]*. Kishinev. Shtinitsa Publ. 1988. 190 p. (In Russian).
4. Egorichev O.A., Poddaeva O.I. Normalnyy udar po tortsu tsilindricheskoy obolochki [Normal

impact on the butt of the cylindrical shell]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Design of Structures]. 2006. No 1. P. 34–36 (In Russian).

5. Colombaro I., Giusti A., Mainardi F. On the propagation of transient waves in a viscoelastic Bessel medium. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2017. 68: 62. DOI: 10.1007/s00033-017-0808-6.

6. Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyatyu* [Mathematical Theory of Wave Propagation in Media with Memory]. Moscow. MSU Publ. 1982. 151 p. (In Russian).

7. Lin Cong-mou, Yang Lin-de. Analytic solution on propagating law of stress wave from explosion of extended charge in linear viscoelastic medium. *Journal of Shandong University of Science and Technology – Natural Sciences*. 2001. Vol. 20. No 3. P. 1–3.

8. Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. *Thermodynamics of Materials with Memory*. Springer, 2012. 574 p.

9. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current research*. India. 2015. Vol. 7. Iss. 7. P. 18356–18360.

10. Pshenichnov S.G. Nonstationary dynamic problems of nonlinear viscoelasticity. *Mechanics of Solids*. 2013. Vol. 48. Iss. 1. P. 68–78.

11. Belokon' A.V., Shekhov V.P. *Zadacha o dvizhenii po vyazkouprugoy polose shtampa, nakhodyashchegosya pod deystviyem nagruzki, garmonicheskii izmenyayushcheyssya vo vremeni* [The Problem of Motion along a Viscoelastic Strip of a Stamp under the Action of a Load Harmonically Varying in Time]. Rostov-on-Don. RSU. 1979. 25 p. Deposited at the VINITI 11.12.79. No 4303-79Dep (In Russian).

12. Belokon' A.V. Nekotoryye “printsipy sootvetstviya” dlya dinamicheskikh zadach vyazkouprugosti [Some “correspondence principles” for dynamic viscoelasticity problems]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1975. No 6. P. 136–138. (In Russian).

13. Grishin S.A. Contact problems for power-law creeping body. *Proceedings of the 2nd Contact Mechanics International Symposium*. 1994. Carry-le-Rouet. New-York. London. Plenum Press. 1995. P. 319–326.

14. Galin L.A. *Kontaknyye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 304 p. (In Russian).

15. Padovan J. Transient and steady state viscoelastic rolling contact. *Computers & Structures*. 1985. Vol. 20. No 1. P. 545–552.

16. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

17. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskkiye kontaknyye zadachi s podvizhnymi granitsami* [Dynamic Contact Problems With Moving Boundaries]. Moscow. Nauka. Fizmatlit Publ. 1995. 352 p. (In Russian).

18. Koltunov M.A. *Polzuchest i relaksatsiya* [Creep and Relaxation]. Moscow. Vysshaya shcola Publ. 1976. 277 p. (In Russian).

19. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Operational Calculation Handbook]. Moscow. Vysshaya shcola Publ. 1965. 467 p. (In Russian).

20. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow. Nauka Publ. 1978. 512 p. (In Russian).

SYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR VISCOELASTIC HALF-PLANE AND ABSOLUTELY RIGID STRIKER AT SUPERSONIC STAGE OF INTERACTION

Korovaytseva E.A.¹, Tarlakovskii D.V.^{1,2}

¹Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Plane non-stationary contact problem concerning interaction of symmetric absolutely rigid striker and viscoelastic half-plane at supersonic stage is considered. Half-plane motion is described by two-dimensional integral-differential equations, hereditary properties of half-plane material are

modeled by Koltunov relaxation kernel. The striker motion is supposed to be vertical. Two limit cases of contact conditions are considered: absolutely rigid coupling and free slipping. It is shown that the expression for contact force is equal for both conditions. The solution of the striker motion equation is obtained numerically using Runge - Kutta method for three types of the surfaces setting boundaries of the striker: parabolic, circular and hyperbolic cylinder. For convolution in the right-hand side of the equation calculation rectangle method is used, if any singularity is present the method of multiplicative singularity extraction is used. It is shown that at supersonic stage of interaction time dependencies of the striker displacement and velocity, as well as changes of contact area radius and contact area expansion velocity don't depend on the parameters of relaxation kernel in the considered variation range. Besides, without external force acting on the striker the dependencies mentioned almost coincide. When using small parameter method viscosity influence on contact interaction characteristics estimation is carried out for the case of parabolic boundary of the striker surface. It is shown that, at the supersonic stage, the quantities characterizing the contact interaction do not depend on the viscosity parameters of the material, the order of the algebraic surface bounding the impactor, and also on the type of the bounding surface in the absence of external impact on the impactor.

Keywords: contact problem, viscoelastic half-plane, supersonic interaction stage, Green function.