

УДК 539.37

## МЕТОДИКИ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТИПА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО КРИВЫМ ОБРАТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2018 г.

**Хохлов А.В.**

*НИИ механики Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

*Поступила в редакцию 21.02.2018*

Исследуется физически нелинейное определяющее соотношение для нестареющих вязкоупругопластичных материалов, основанное на представлении полной деформации в виде суммы упругой и вязкопластической компонент, с целью выявления комплекса моделируемых им реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния двух его материальных функций и феноменологических ограничений на них, способов идентификации, верификации и настройки. На основе анализа общих свойств кривых ползучести и обратной ползучести, порождаемых этим определяющим соотношением с произвольными материальными функциями, разработана методика идентификации модели по серии кривых обратной ползучести (образцов) материала для различных уровней напряжения и длительностей стадии нагружения (в одномерном случае). Методика позволяет определить массивы значений двух материальных функций на произвольно заданной сетке точек и не требует задания конкретных аппроксимаций, минимизации среднеквадратичного отклонения для определения их параметров, численного решения системы нелинейных уравнений, использования рекуррентных формул и итерационных методов. Получены явные формулы для прямого (независимого) определения всех значений материальных функций в узловых точках по минимальному набору регистрируемых величин, предотвращающие накопление погрешности. Для материалов, демонстрирующих степенную зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения, разработан способ быстрой идентификации модели в классе степенных материальных функций по двум кривым обратной ползучести при разных уровнях напряжения. Выведены формулы, выражающие четыре параметра степенных функций через два уровня напряжения, длительности нагружения и четыре измеряемые характерные деформации. Указаны специфические индикаторы применимости (или неприменимости) степенной модели.

*Ключевые слова:* вязкоупругопластичность, наследственность, физическая нелинейность, скорость ползучести, пластическая деформация, индикаторы применимости, сверхпластичность, полимеры.

## Введение

Проблема надежного моделирования термомеханического поведения и разрушения материалов и конструкций, вопросы построения или выбора адекватных определяющих соотношений, анализа их свойств и области применимости, сфер влияния материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработки методик идентификации и аттестации по-прежнему остаются актуальными в механике, материаловедении и практике инженерных расчетов. Одним из простейших и важнейших видов одноосных базовых испытаний, позволяющих уловить и исследовать разные аспекты поведения материала, обнаружить признаки нелинейности в его поведении и собрать достаточно богатую информацию для выбора и идентификации определяющих соотношений, являются испытания на ползучесть при постоянной нагрузке и обратную ползучесть [1–13] для различных уровней напряжения и длительностей стадии нагружения, то есть изучение отклика  $\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*)$  материала (образца) на прямоугольный импульс напряжения

$$\sigma(t, \bar{\sigma}, t_*) = \bar{\sigma} [h(t) - h(t - t_*)], \quad (1)$$

где  $\bar{\sigma}, t_* > 0$  – параметры,  $h(t)$  – функция Хевисайда (то есть на нагружение  $\sigma(t) = \bar{\sigma}$  при  $t \in (0, t_*)$ , мгновенную разгрузку и выдержку при  $\sigma(t) = 0$  для  $t > t_*$ ). Для стабильных вязкоупругих материалов после снятия нагрузки характерно постепенное уменьшение (релаксация) деформации до некоторого уровня (возможно, нулевого). Это явление называется восстановлением, возвратом, последствием, обратной ползучестью.

Для обоснованного выбора определяющего соотношения (ОС), определения его арсенала возможностей и области применимости, для грамотной обработки опытных данных и идентификации материальных функций (МФ) и параметров выбранного ОС необходимо системное аналитическое изучение общих свойств теоретических кривых ползучести и кривых обратной ползучести, а также кривых релаксации и деформирования при разных программах нагружения, порождаемых ОС с произвольными МФ, необходимо исследование влияния параметров нагружения и характеристик материальных функций, выявление необходимых условий (индикаторов) применимости ОС к моделируемому материалу.

В цикле работ [13–21] такой анализ проведен для физически нелинейного ОС

$$\varepsilon(t) = E^{-1} F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau)) d\tau, \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon} = E^{-1} [F(\sigma)\dot{\sigma} + \tau_r^{-1} V(\sigma)], \quad t > 0, \quad (2)$$

связывающего деформацию  $\varepsilon(t)$  с историей изменения напряжения  $\sigma(\tau)$ ,  $\tau \in (0, t)$ , в изотермических процессах деформирования стабильных реономных материалов (в одномерном случае). Соотношение основано на представлении полной деформации  $\varepsilon(t)$  в виде суммы упругой и вязкопластической компонент:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad \varepsilon_e = \frac{F(\sigma)}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_v = \frac{V(\sigma)}{\eta}$$

и нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью, высокой скоростной чувствительностью и, возможно, разносопротивляемостью. В ОС (2) входят две МФ:  $F(x)$ ,  $V(x)$ ,  $x \in (\omega_-, \omega_+)$ , и две постоянные: модуль упругости  $E > 0$  и коэффициент вязкости  $\eta > 0$ . Параметры  $E$  и  $\eta$  выделены из МФ  $F$  и  $V$  для удобства учета влияния температуры

в форме  $E = E(T)$ ,  $\eta = \eta(T)$ . Если  $\omega_+$  и  $\omega_-$  конечны, они могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии (как материальные параметры ОС).

В частном случае  $F(x) \equiv 0$ ,  $V(x) = x|x|^{n-1}$ ,  $n > 1$ , ОС (2) дает степенной закон вязкого течения (*Norton-Bailey model*) – самый простой и популярный в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров и гидродинамике неньютоновских жидкостей. Он используется для моделирования зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения, течения степенных жидкостей и сверхпластического течения материалов [1–11, 22–28]. Задавая  $F(x) = 0$  и  $V(x) = x|x|^{n-1}$ , получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью, которая применялась в ряде работ для описания экспериментальных кривых ползучести, моделирования сверхпластичности и решения конкретных задач [2, 5, 26, 29–31]. Модель с произвольными МФ  $F(x)$  и  $V(x)$  системному исследованию не подвергалась.

В публикациях [13–21] аналитически изучены уравнения семейств базовых квазистатических кривых, порождаемых ОС (2): кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации или нагружения, при циклическом нагружении. Исследованы общие свойства этих кривых в зависимости от характеристик МФ и параметров программ нагружения: интервалы монотонности и выпуклости, точки перегиба, отклики на разрывы входного процесса (скачки и изломы), асимптотики и двусторонние оценки теоретических кривых, характер сходимости их семейств к предельным кривым при стремлении параметров программ нагружения (скорости деформирования или нагружения, длительности начальной стадии нагружения и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику и остаточную деформацию и т.п. В результате сопоставления обнаруженных свойств теоретических кривых с типичными качественными свойствами кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком механических эффектов) выведены необходимые дополнительные ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное моделирование основных реологических эффектов, выявлены теоретико-экспериментальные индикаторы применимости ОС (2) и те эффекты, которые оно принципиально не может описать ни при каких МФ. Математические свойства оператора (2), обзоры литературы и родственных (2) моделей, применяемых в теории ползучести, сверхпластичности и механике полимеров, вывод ограничений на МФ, учет влияния температуры и обобщение ОС (2) на трехмерный случай приведены в [13–21].

Цель настоящей статьи – разработка способов идентификации ОС (2) по кривым обратной ползучести моделируемого материала.

## 1. Об ограничениях на материальные функции ОС и области его применимости

МФ  $F$  определяет в (2) упругую деформацию  $\varepsilon_e(\sigma)$ . Минимальные первичные ограничения на нее:  $F(x)$ ,  $x \in (\omega_-, \omega_+)$ , – непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что  $F(0) = 0$ . Эти условия обеспечивают совпадение знаков упругой деформации  $\varepsilon_e(\sigma)$  и  $\sigma$  и соблюдение условия  $\varepsilon_e(0) = 0$ . Из строгого возрастания  $F(x)$  следует возрастание  $\varepsilon_e(|\sigma|)$  и энергии упру-

гой деформации с ростом  $|\sigma|$  и существование обратной к  $F$  функции  $f$  (МФ  $f$  определяет форму диаграммы мгновенного деформирования  $\sigma(\varepsilon) = f(E\varepsilon)$  [17]). Функция вязкости  $V(x)/\eta$  в ОС (2) управляет вязкопластическими свойствами: она регулирует память материала, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряжения (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации, длительную прочность [13–21]. Минимальные первичные ограничения на нее:  $V(x)$  – непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале  $(\omega_-, \omega_+)$ , такая, что  $V(0) = 0$ . Эти ограничения на МФ обеспечивают, в частности, возрастание диаграмм деформирования и кривых ползучести, убывание кривых релаксации и длительной прочности и термодинамическую согласованность модели, то есть положительность работы напряжения  $\sigma(\tau)$  в произвольном процессе деформирования:

$$A = \int_0^t \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t E^{-1} \sigma F'(\sigma) \dot{\sigma} d\tau + \int_0^t \eta^{-1} V(\sigma) \sigma d\tau = U + W, \quad (3)$$

возрастание энергии упругой деформации  $U(\sigma)$  с ростом  $|\sigma|$  и неотрицательность и возрастание диссипации  $W(t, \sigma(\tau))$  в любой момент времени:

$$\dot{W}(t) = \eta^{-1} \sigma(t) V(\sigma(t)) > 0.$$

Анализ свойств основных теоретических кривых, порождаемых ОС (2), обнаружил, что следует различать два основных случая, в которых ОС (2) (моделируемый материал) ведет себя по-разному:

- 1)  $|V(x)| > 0$  при  $x \neq 0$ ,
- 2)  $V(x) \equiv 0$  на некотором отрезке  $Z = [\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$ ,  $\sigma_- \leq 0$ ,  $\sigma_+ \geq 0$ ,  $\sigma_+ \neq \sigma_-$  (по определению,  $\sigma_-$  и  $\sigma_+$  – нижняя и верхняя грани множества нулей МФ  $V(x)$ ). Во втором случае, пока  $\sigma(t) \in Z$ , ОС (2) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала: диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения (или деформации) при  $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$ , где  $\varepsilon_{\pm} = E^{-1} F(\sigma_{\pm})$ ;  $\sigma_-$ ,  $\sigma_+$  играют роль пределов упругости (и порогов ползучести) материала при сжатии и растяжении, а при  $\sigma > \sigma_+$  (или  $\sigma < \sigma_-$ ) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

Системное исследование ОС (2), проведенное в [13–21], показало, что это соотношение можно применять для описания комплекса основных реологических эффектов, типичных для вязкоупругопластических материалов, обладающих памятью, высокой чувствительностью к скорости нагружения, и, возможно, разносопротивляемостью, для которых характерны следующие особенности механического поведения:

- 1) возрастающие кривые нагружения с постоянной скоростью, которые могут быть выпуклыми вверх или обладать точкой перегиба,
- 2) положительная скоростная чувствительность,
- 3) монотонное убывание и выпуклость кривой разгрузки или наличие на ней точки максимума или точки перегиба (в зависимости от скорости и уровня нагружения),
- 4) отсутствие восстановления (релаксации деформации) после импульса нагружки, превышающей предел упругости, и полной разгрузки,
- 5) существенное влияние длительности и скорости нагружения на величину пластической деформации,

6) выраженная стадия течения при постоянном напряжении на диаграммах деформирования с постоянной скоростью и (возрастающая) зависимость предела текучести от скорости,

7) «неограниченное» нарастание пластической деформации при циклическом нагружении за пределом упругости (рэтчетинг без стабилизации и приспособляемости, циклическое разупрочнение),

8) ползучесть с постоянной скоростью,

9) релаксация напряжения до нулевого или ненулевого значения,

10) возрастание податливости и скоростной чувствительности, увеличение скоростей диссипации, релаксации, ползучести и рэтчетинга с ростом температуры.

К таким материалам (в определенных режимах деформирования) относятся, например, многие полимеры, их расплавы и растворы, твердые топлива, асфальтобетоны, высокомолекулярные полиэтиленовые нити, геоткани и георешетки, льды, титановые и алюминиевые сплавы в состоянии, близком к сверхпластичности, углеродные и керамические материалы (при высоких температурах) и др.

## 2. Кривые ползучести и обратной ползучести, порождаемые ОС (2)

При  $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$ ,  $t > 0$ , ОС (2) порождает семейство кривых ползучести (КП)

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})t + E^{-1}F(\bar{\sigma}) = E^{-1}[V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})], \quad (4)$$

где  $r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma})$ ,  $\gamma = \eta^{-1} = E^{-1}\tau_r^{-1}$ ,  $\tau_r = \eta/E$  – время релаксации линейной модели Максвелла (с  $V(x) = F(x) = x$ ;  $\tau_r$  удобно использовать для обезразмеривания времени).

Если  $V(x) \equiv 0$  на некотором отрезке  $[\sigma_-, \sigma_+]$ ,  $\sigma_- < 0$ ,  $\sigma_+ > 0$ , то при  $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$  ОС (2) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала и при  $\bar{\sigma} \in [\sigma_-, \sigma_+]$  ползучесть отсутствует (пределы упругости на сжатие и растяжение совпадают с порогами ползучести).

Если  $V(\bar{\sigma}) \neq 0$ , то все КП линейны по времени при  $t > 0$ , то есть при любых МФ ОС (2) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью (как и линейная модель Максвелла). ОС (2) не способно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также ограниченную ползучесть, свойственную, например, многим полимерам. Так как  $V(\bar{\sigma}) > 0$  при  $\bar{\sigma} > 0$  и возрастает, то КП (4) возрастает по  $t$  (при  $\bar{\sigma} > 0$ ) и по  $\bar{\sigma}$ , что совпадает с типичными качественными свойствами КП структурно стабильных однородных материалов.

Выраженная стадия ползучести с постоянной скоростью характерна для многих пластичных металлов, полимеров в вязкотекучем состоянии и для материалов в состоянии сверхпластичности (высокому показателю скоростной чувствительности при сверхпластическом деформировании соответствуют величины показателя  $n \leq 3$ , в отличие от металлов в обычном состоянии, у которых всегда  $n \in (3; 10)$  или более) [24–27]. КП полимеров имеют стадию установившейся ползучести лишь при достаточно высоких температурах, когда полимер находится в вязкотекучем состоянии.

Кривые обратной ползучести (КОП) – отклики ОС (2) на прямоугольный импульс (1) с параметрами  $t_* > 0$ ,  $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ . Подстановка (1) в (2) дает уравнение семейства КОП:

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = r(\bar{\sigma})t + E^{-1}F(\bar{\sigma}) \text{ при } t < t_*, \quad \varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*) \text{ при } t > t_*, \quad (5)$$

$$r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma}), \quad p(\bar{\sigma}, t_*) = \gamma V(\bar{\sigma}) t_* = E^{-1} V(\bar{\sigma}) t_* \tau_r^{-1}. \quad (6)$$

Скачок деформации в точке  $t = t_*$  равен  $-F(\bar{\sigma})/E$ , при  $t > t_*$  деформация становится постоянной и равной накопленной за время  $t_*$  деформации ползучести  $p(\bar{\sigma}, t_*)$ . При полной разгрузке исчезает только упругая деформация  $\varepsilon(+0) = F(\bar{\sigma})/E$ , а вся накопленная деформация ползучести оказывается необратимой, пластической. Именно такое поведение демонстрируют многие металлы (и другие материалы) при достаточно высоких температурах. Таким образом, ОС (2) не описывает «обратную ползучесть» («упругое последствие»), то есть процесс постепенной релаксации накопленной деформации с выходом на некоторый постоянный уровень при больших значениях времени, как это наблюдается в испытаниях многих материалов (например, для сетчатых полимеров и для костной ткани кривые обратной ползучести стремятся к асимптоте  $\varepsilon = 0$ ). ОС (2) описывает только мгновенное восстановление (предельный, идеализированный случай) упругой деформации, «высокоэластичная» компонента деформации, обеспечивающая постепенность убывания, полностью отсутствует в модели (2).

На рис. 1 приведены КОП модели (2) с  $F(x) = x$ ,  $V(x) = x|x|$ ,  $E = 10$ ,  $\eta = 10$  (тогда  $\tau_r = 1$ ) для  $\bar{\sigma} = 0,1$ ,  $t_* = 5$  (кривая 1) и  $t_* = 10$  (кривая 2) и для  $\bar{\sigma} = 0,05$ ,  $t_* = 10$  (кривая 3). По оси абсцисс отложено безразмерное время: рассматриваемые качественные свойства кривых не зависят от его масштабирования.

На рис. 2 приведены КОП трех линейных моделей вязкоупругости с функцией ползучести  $\Pi = At^u + \alpha t$ ,  $u \in (0, 1)$ ,  $A, \alpha > 0$ , при трех разных (малых) показателях для  $t_* = 10$ ,  $\bar{\sigma} = 0,01$  (КОП 1–3 соответствуют  $\alpha = 0,05$ ,  $A = 1$  и  $u = 0,1; 0,05; 0,01$ ). Они демонстрируют малое количественное отличие от КОП линейной модели Максвелла с функцией ползучести  $\Pi = 1 + \alpha t$  (штриховая кривая 4). КОП этой линейной модели описывают восстановление при любых  $u$ ,  $A$ ,  $\alpha$  и непрерывны в точке  $t = t_*$  (так как  $\Pi(0) = 0$ ), но при  $u \rightarrow 0+$  их семейство сходится к (разрывной) КОП модели Максвелла при  $t \neq t_*$  (скачок деформации моделируется свойствами  $\dot{\varepsilon}(0) = +\infty$  и  $\dot{\varepsilon}(t_*) = -\infty$ , вытекающими из  $\dot{\Pi}(0) = +\infty$ ).

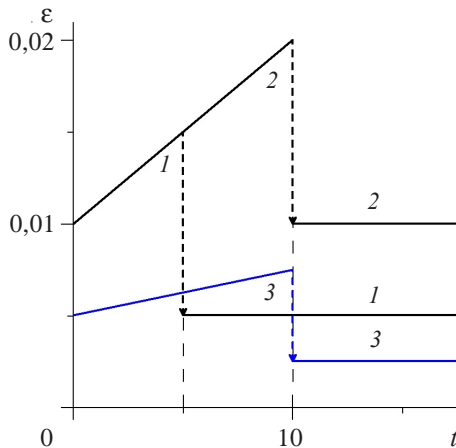


Рис. 1

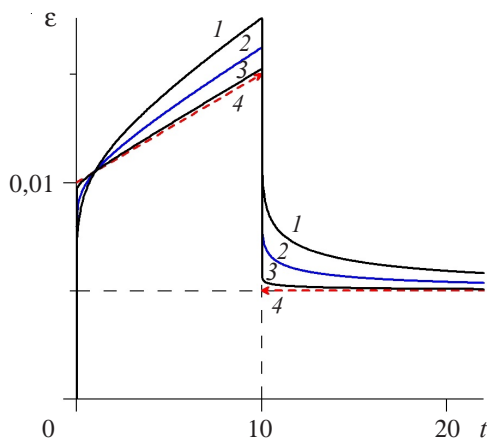


Рис. 2

В силу (5), след, оставленный финитным импульсом нагрузки (1), не стирается никогда, то есть память модели (2) не затухающая, а «перманентная» («permanente-memo»)». Неспособность описывать материалы с затухающей памятью – недоста-

ток ОС (2), сужающий круг моделируемых материалов и процессов. Однако это свидетельствует о том, что ОС (2), возможно, способно описывать не только вязкоупругость, но и вязкопластичность. Эта гипотеза подтверждается наличием у диаграмм деформирования, порождаемых ОС (2) при постоянной скорости деформации, горизонтальных асимптот, то есть участков течения при постоянном напряжении (без последующего упрочнения), – как это наблюдается у материалов в состоянии сверхпластичности [24–27] (для них характерна как раз ползучесть с постоянной скоростью и отсутствие восстановления после разгрузки).

МФ  $F$  не влияет на скорость ползучести, ее скачки и пластическую деформацию  $p(\bar{\sigma}, t_*)$ , а  $V$  не влияет на мгновенные скачки деформации. Это позволяет определить МФ  $\gamma V(x)$  и  $F(x)/E$  по отдельности по КОП материала.

### 3. Индикаторы применимости ОС (2) по кривым обратной ползучести материала

Из обнаруженных общих свойств КОП (5), порождаемых ОС (2) с произвольными МФ, вытекают необходимые признаки применимости ОС (2), которые удобно проверять при анализе экспериментальных КОП материалов и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (2) для моделирования этих материалов.

Постоянство скорости ползучести  $\dot{\varepsilon}(t) = r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma})$  при  $t \in (0, t_*)$  (полагаем, что в (1)  $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ , и потому  $V(\bar{\sigma}) > 0$ ) и постоянство деформации  $\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$  при  $t \geq t_*$  (отсутствие восстановления, то есть релаксации деформации после полной разгрузки) – два важнейших атрибутивных свойства ОС (2) и, следовательно, два необходимых качественных признака применимости ОС (2) для моделирования поведения материала, легко проверяемых в испытаниях. Пропорциональность остаточной деформации

$$p(\bar{\sigma}, t_*) = \gamma V(\bar{\sigma}) t_* \quad (7)$$

длительности  $t_*$  прямоугольного импульса нагружения (1) – третий индикатор применимости ОС (2); для любых МФ ОС (2) предсказывает, что в двух испытаниях с одинаковым уровнем напряжения должно быть  $p_2/p_1 = t_{*2}/t_{*1}$ .

Еще одна характерная точка на КОП (5) – при  $t = t_*$ , когда деформация максимальна:

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) = \varepsilon(t_* - 0, \bar{\sigma}, t_*) = E^{-1}F(\bar{\sigma}) + \gamma V(\bar{\sigma}) t_* = E^{-1}F(\bar{\sigma}) + p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (8)$$

Из (8) следует, что для любых  $\bar{\sigma}, t_*$  разность  $\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*)$  не зависит от  $t_*$  и МФ  $V$ :

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*) = E^{-1}F(\bar{\sigma}). \quad (9)$$

Первое свойство – еще один качественный индикатор применимости ОС (2). Его можно записать (и проверять по испытаниям (1) с фиксированным  $\bar{\sigma}$  и различными  $t_{*i}$ ) в формах

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*2}) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*1}) = p(\bar{\sigma}, t_{*2}) - p(\bar{\sigma}, t_{*1}), \quad \frac{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*2}) - p(\bar{\sigma}, t_{*2})}{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*1}) - p(\bar{\sigma}, t_{*1})} \equiv 1. \quad (10)$$

Эти формулы связывают только измеряемые характерные величины деформации и не зависят от МФ. Отсутствие МФ  $V$  в формуле (9) позволяет напрямую определить МФ  $F$  отдельно от  $V$  по испытаниям с разными  $\bar{\sigma}$ . Кроме того, из (9) следует, что

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*2}) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*1}) = \gamma V(\bar{\sigma})(t_{*2} - t_{*1}). \quad (11)$$

Следовательно, значение МФ  $\gamma V(\bar{\sigma})$  можно определить как по измеренным величинам остаточной деформации (7), так и по разности величин максимальных деформаций (8) в испытаниях с одинаковым  $\bar{\sigma}$  и разными  $t_{*i}$ .

Таким образом, прежде чем применять ОС (2) для моделирования поведения некоторого материала, следует провести несколько испытаний на нагружение вида (1) с разными величинами  $t_*$  и  $\bar{\sigma}$  из рабочего диапазона напряжений и проверить наличие у экспериментальных кривых ползучести следующих свойств (индикаторов применимости):

1) постоянство скорости ползучести  $r(\bar{\sigma}) = [\varepsilon(t_2, \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t_1, \bar{\sigma}, t_*)]/(t_2 - t_1)$  при любых  $\bar{\sigma}$ ,  $t_* > 0$  и  $t_i < t_*$ ;

2) постоянство деформации  $\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$  при  $t \geq t_*$  для любых  $\bar{\sigma}$ ,  $t_* > 0$ ;

3) пропорциональность остаточной деформации длительности нагружения  $t_*$ :  $p(\bar{\sigma}, t_*)/t_*$  не зависит от  $t_*$ , или  $p_2/p_1 = t_{*2}/t_{*1}$  в испытаниях с любыми  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ ,  $t_{*i} > 0$ ;

4) справедливость равенств (10) при любых  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}$ ,  $t_{*i} > 0$ ;

5) выполнение пропорций  $(\varepsilon_{*3} - \varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1}) = (t_{*3} - t_{*1})/(t_{*2} - t_{*1})$  при любых  $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}$ ,  $t_{*i} > 0$ .

Естественно, когда речь идет о проверке постоянства функции измеряемых величин (ее независимости от аргумента), имеется в виду приближенное равенство в пределах допустимой погрешности. Если указанные признаки явно отсутствуют у КОП материала, то применять ОС (2) для его моделирования нельзя. Если все проверки дают положительный результат, можно переходить к идентификации.

#### 4. Идентификация ОС (2) по кривым обратной ползучести материала

Проведенный анализ позволяет предложить несколько способов определения двух материальных функций  $\gamma V(x)$  и  $F(x)/E$  по серии кривых обратной ползучести материала при растяжении и сжатии (при фиксированной температуре). Покажем, что можно найти значения  $\gamma V(x)$  и  $F(x)/E$  и по отдельности, последовательно в любом заданном наборе узловых точек  $s_k > \sigma_+ \geq 0$  из рабочего диапазона напряжений (например,  $s_k = \sigma_+ + kh$ ).

По формуле (9) можно найти массив значений функции  $F(s_k)/E$ , если измерить величины максимальной деформации  $\varepsilon_*(s_k, t_*)$  и остаточной деформации  $p_k = p(s_k, t_{*k})$  в серии экспериментов с разными уровнями напряжений  $\bar{\sigma} = s_k$ :

$$E^{-1}F(\bar{\sigma}) = \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (12)$$

Определить  $\gamma V(s_k)$  можно тремя способами. Из (7) по остаточной деформации:

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{p(\bar{\sigma}, t_*)}{t_*}, \quad \bar{\sigma} = s_k. \quad (13)$$

Из формулы для скорости ползучести

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{\varepsilon(t_2, \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t_1, \bar{\sigma}, t_*)}{t_2 - t_1}, \quad t_i \leq t_*, \quad (14)$$

где величины деформации в любые выбранные моменты времени  $t_i < t_*$  измеряются по КП материала для заданного уровня напряжения  $\bar{\sigma}$ . Лучше взять базу измерений  $t_2 - t_1$  в диапазоне установившейся ползучести как можно большей, например,



$t_2 = t_{*k}$ , а  $t_1 \approx 0$  совместить с началом достоверно определенного участка установившейся ползучести.

Третий способ следует из формулы (11):

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*2}) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*1})}{t_{*2} - t_{*1}}, \quad (15)$$

где величины максимальной деформации в моменты времени  $t_{*i}$  измеряются по двум КОП материала для заданного уровня напряжения  $\bar{\sigma}$  и двух разных  $t_*$ .

Таким образом, для полного определения значений МФ в  $K$  узловых точках  $s_k$  по формулам (12), (13) необходимо провести  $K$  испытаний материала вида (1) с разными  $\bar{\sigma} = s_k$  и  $t_{*k}$ , измеряя в каждом из них всего два характерных значения деформации  $p_k = p(s_k, t_{*k})$  и  $\varepsilon_{*k} = \varepsilon_*(s_k, t_{*k})$ . Так как левые части (12), (13) не зависят от  $t_*$ , то можно проводить испытания как при одинаковых  $t_{*k}$ , так и при разных. Если вместо (13) использовать формулу (14), то в указанных  $K$  испытаниях с  $\bar{\sigma} = s_k$  надо измерить только два значения деформации  $\varepsilon(t_1, s_k, t_{*k})$  и  $\varepsilon(t_2, s_k, t_{*k})$ ,  $t_i \leq t_{*k}$ , в диапазоне установившейся ползучести. Если же использовать формулу (15), то количество испытаний увеличивается в два раза, но появится возможность тщательно проверить соблюдение признаков применимости 3)–5) (см. п. 3).

Казалось бы, большое количество испытаний ограничивает эффективность методики, но следует учесть, что каждый эксперимент с прямоугольным импульсом нагрузки может иметь малую длительность (по сравнению с испытаниями на ползучесть и релаксацию) и, более того, можно даже проводить несколько испытаний с разными (возрастающими)  $\bar{\sigma} = s_k$  на одном образце, учитывая при обработке результатов пластическую деформацию, накопленную за предшествующие циклы нагружения-разгрузки. Существенно, что МФ определяются из той же серии испытаний (хотя более длинной), по которой проверяются индикаторы применимости ОС (2), а не из испытаний другого типа.

## 5. Учет немгновенности нагружения и разгрузки и порога ползучести

Формулы (7) и (8) получены в предположении мгновенности нагрузки и разгрузки (скачка напряжения), величины деформации существенно зависят от длительности стадий нагрузки и разгрузки. По этой причине для определения МФ  $V$  не рекомендуется использовать формулу (7) без коррекции. Лучше находить  $V$  из формулы для скорости ползучести (14) или формулы (11), так как разность  $\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*2}) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_{*1})$ , как и скорость ползучести, не зависит от длительности стадий нагружения и разгрузки [19, 20]. Разность деформаций (9) не зависит от стадии нагружения, но зависит от стадии разгрузки. Потому использовать ее для определения МФ  $F$  надо с осторожностью, либо скорректировать слагаемым, учитывающим длительность разгрузки.

При описании алгоритмов идентификации мы рассматривали случай  $s_k > \sigma_+ \geq 0$ , где  $\sigma_+$  – предел упругости и порог ползучести материала при растяжении; в частности, при  $\sigma_+ = 0$  значения МФ можно определить при любых  $s_k > 0$ . Если же испытания материала на ползучесть и деформирование с постоянными скоростями показывают, что целесообразнее задать  $\sigma_+ > 0$  (релаксация, ползучесть отсутствуют при  $\sigma < \sigma_+$ , кривая деформирования не зависит от скорости нагружения или деформации при достаточно малых  $\varepsilon$  и после разгрузки нет остаточной деформации), то следует положить  $V(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, \sigma_+]$ , а значения  $F(x)/E$  на этом отрезке опре-

делить по диаграмме (упругого) деформирования материала (диаграмма, порождаемая ОС (2), задается при  $\sigma < \sigma_+$  уравнением  $\varepsilon = F(\sigma)/E$  [17]).

Разработанные методики позволяют определить МФ  $\gamma V(x)$  и  $F(x)/E$  при  $x > 0$  по испытаниям на растяжение. Если поведение материала (его кривых ползучести и релаксации, диаграмм деформирования с постоянной скоростью) при сжатии не отличается от поведения при растяжении, то МФ следует продолжить в область  $x < 0$ , считая их нечетными. Если же поведение материала при сжатии отличается от поведения при растяжении, то для определения МФ на интервале  $(\omega_-, 0)$  необходимо применить одну из описанных методик идентификации, взяв за основу данные испытаний на сжатие. Чтобы определить  $\eta$  и  $E$  отдельно от  $V$  и  $F$ , нужно наложить на  $V$  и  $F$  некоторое нормировочное условие, например  $V(1) = 1$  и  $F(1) = 1$ .

Разработаны и другие способы идентификации (и верификации) ОС (2), помимо описанных выше: по экспериментальным кривым ползучести с начальной стадией нагружения, по одной КП при ступенчатом нагружении, по кривой нагрузки-разгрузки, по двум диаграммам нагружения с разными скоростями [20, 21]. Например, вместо серии испытаний на обратную ползучесть значения МФ  $\gamma V(s_k)$  и  $F(s_k)/E$  можно найти по одной экспериментальной КП материала при ступенчатом нагружении с нарастающими уровнями напряжения  $s_k$  и полной разгрузкой между ними. Рациональный выбор конкретного способа зависит от того, есть ли возможность планировать эксперименты по идентификации и верификации ОС (2) (в рамках имеющихся ресурсов времени, оборудования, изготовления образцов и т.п.) или приходится пользоваться уже имеющимися данными испытаний некоторого материала (возможно, весьма ограниченными или недостаточными).

## 6. Идентификация модели со степенными МФ и идентификаторы ее применимости

Выбор некоторых семейств аппроксимаций для МФ значительно сокращает количество базовых испытаний, тогда определению подлежат лишь несколько параметров, индивидуализирующих функцию, а не ее значения в узлах сетки, покрывающей рабочий диапазон напряжений. Рассмотрим алгоритм определения степенных МФ

$$F = x^m, \quad V = x^n, \quad m \geq 1, \quad n > m - 1. \quad (16)$$

Условие  $n > m - 1$  следует из критерия выпуклости вниз  $|V'(x)/V(x)| > |F''(x)/F'(x)|$  кривых релаксации ОС (2) [16]. Каждая МФ  $F(x)/E$ ,  $V(x)/\eta$  задается двумя параметрами  $\eta$ ,  $n$  и  $m$ ,  $E$ , а КОП задается уравнением (5), где формулы (6) для скорости ползучести и остаточной деформации и формула (9) для максимальной деформации  $\varepsilon_*$  принимают вид:

$$r(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^n / \eta, \quad p(\bar{\sigma}, t_*) = \eta^{-1} \bar{\sigma}^n t_*, \quad \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*) = E^{-1} \bar{\sigma}^m. \quad (17)$$

Систему четырех независимых уравнений для определения параметров  $\eta$ ,  $n$ ,  $m$  и  $E$  можно получить по результатам двух нагружений образца прямоугольным импульсом (1) с двумя разными  $\bar{\sigma}$  (длительности импульсов  $t_{*1}$  и  $t_{*2}$  могут быть и одинаковыми), измерив деформации  $p_1, p_2, \varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}$  и приравняв их к теоретическим значениям (17):

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}_1^n t_{*1}}{\eta}, \quad p_2 = \frac{\bar{\sigma}_2^n t_{*2}}{\eta}, \quad \varepsilon_{*1} - p_1 = \frac{\bar{\sigma}_1^m}{E}, \quad \varepsilon_{*2} - p_2 = \frac{\bar{\sigma}_2^m}{E}.$$

Отсюда

$$\frac{p_2 t_{*1}}{(p_1 t_{*2})^{-1}} = \frac{\bar{\sigma}_2^n}{\bar{\sigma}_1^n}, \quad \frac{\varepsilon_{*2} - p_2}{\varepsilon_{*1} - p_1} = \frac{\bar{\sigma}_2^m}{\bar{\sigma}_1^m}$$

и

$$n = \frac{\ln(p_2 p_1^{-1} t_{*1} t_{*2}^{-1})}{\ln(\bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}_1)}, \quad m = \frac{\ln[(\varepsilon_{*2} - p_2) / (\varepsilon_{*1} - p_1)]}{\ln(\bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}_1)}, \quad (18)$$

$$\eta = \frac{\bar{\sigma}_1^n t_{*1}}{p_1}, \quad E = \frac{\bar{\sigma}_1^m}{\varepsilon_{*1} - p_1}. \quad (19)$$

Таким образом, чтобы найти все четыре параметра степенных МФ (16), достаточно всего двух испытаний на обратную ползучесть с разными  $\bar{\sigma}$ . При этом используются только параметры двух программ нагружения (1)  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, t_{*1}, t_{*2}$  и четыре измеренные деформации  $p_1, p_2, \varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}$ . Величины  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$  лучше выбирать так, чтобы отношение  $\bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}_1$  больше отличалось от единицы или знаменатель  $\ln(\bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}_1)$  – от нуля.

Применять модель (2) со степенными МФ (16) и пытаться найти их параметры следует только после проверки выполнения специфических индикаторов применимости моделей со степенными МФ (16), помимо общих индикаторов применимости ОС (2), обнаруженных выше. Из формул (17) следует, что для степенных МФ зависимости всех трех характерных величин (17) от  $\bar{\sigma}$  степенные, то есть  $\ln r, \ln p$  и  $\ln(\varepsilon_* - p)$  связаны с  $\ln \bar{\sigma}$  линейными зависимостями. Линейная связь логарифмов легко проверяется по данным испытаний с разными  $\bar{\sigma}$ : экспериментальные точки должны располагаться вдоль прямой. Линейность зависимостей  $\ln r, \ln p$  и  $\ln(\varepsilon_* - p)$  от  $\ln \bar{\sigma}$  – специфические индикаторы применимости ОС (2) со степенными МФ. Если это свойство не выполняется у экспериментальных данных, то ОС (2) со степенными МФ не может описать поведение материала. Если выполняется, то можно переходить к их идентификации и последующему моделированию.

С целью уменьшения погрешности и оценки разброса можно вычислить параметры  $\eta, n, m, E$  как средние значения по результатам  $N > 2$  испытаний с разными  $\bar{\sigma}_k \in (0, \omega_+)$ , то есть найти константы, минимизирующие среднеквадратичные отклонения от последовательностей вычисленных по формулам (18) значений  $n_i, \eta_i, m_i, E_i, i = 1, \dots, N - 1$ . Для этого придется провести дополнительные испытания, но они нужны и для проверки выполнения указанных необходимых условий применимости степенной модели (2), (16).

На примере данных из виртуальных испытаний рассмотрим, как работает предложенная методика определения степенных МФ ОС(2) по формулам (18), (19).

Используем для генерации «экспериментальных» данных КОП при  $t_* = 10$  и трех уровнях напряжения  $\bar{\sigma} = 0,01; 0,02; 0,03$ , порожденные линейным интегральным ОС вязкоупругости с функцией ползучести  $\Pi = At^u + \alpha t, A = 1, u = 0,05, \alpha = 0,05$ . Семейство таких КОП, приведенных на рис. 3а сплошными линиями, задается уравнением

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\Pi(t) \text{ при } t < t_*, \quad \varepsilon(t) = \bar{\sigma}(\Pi(t) - \Pi(t - t_*)) \text{ при } t > t_*. \quad (20)$$

Значения характерных деформаций, снятых с КОП:  $\varepsilon_{*1} = 0,0163, p_1 = \varepsilon(22, \bar{\sigma}_1) = 0,0053, \varepsilon_{*2} = 0,0325, p_2 = \varepsilon(22, \bar{\sigma}_2) = 0,0106$ . Подставим  $p_1, p_2, \varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}, \bar{\sigma}_2 = 2\bar{\sigma}_1$  и  $t_{*1} = t_{*2}$  в (18), (19) и найдем:  $n = \ln(0,0106/0,0053)/\ln 2 = 1,00, m =$

$= \ln(0,0219/0,011)/\ln 2 = 0,994$ ,  $\eta = 0,01 \cdot 10/0,0053 = 18,8$ ,  $E = 0,01^{0,994}/0,0110 = 0,935$ . КОП, порожденные моделью (2) с найденными параметрами степенных функций, показаны на рис. 3а штриховыми линиями.

В силу линейности генерирующей модели  $\varepsilon_{*i}/\varepsilon_{*k} = \sigma_i/\sigma_k$  и  $p_i/p_k = \sigma_i/\sigma_k$ , и потому априори ясно, что в результате должны получиться МФ (16) с  $m = 1$  и  $n = 1$  (с точностью до погрешности регистрации), то есть линейная модель Максвелла с подходящими  $E$  и  $\eta$ . Поэтому модифицируем способ генерации данных испытаний, вводя в функцию ползучести  $\Pi = At^u + \alpha t$  зависимость  $\alpha$  от  $\sigma$  (нелинейность), например  $\alpha = C\sigma$ , при сохранении уравнения КОП (20). На рис. 3б приведены «экспериментальные» КОП при  $t_* = 10$  и  $\bar{\sigma} = 0,01; 0,02; 0,03$  (сплошные кривые). Значения характерных деформаций, снятых с КОП:  $\varepsilon_{*1} = 0,0122$ ,  $p_1 = 0,0013$ ,  $\varepsilon_{*2} = 0,0265$ ,  $p_2 = 0,0046$ . Подставим величины  $p_1, p_2, \varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}, \bar{\sigma}_2 = 2\bar{\sigma}_1$  и  $t_{*1} = t_{*2}$  в (18), (19):  $n = \ln(46/13)/\ln 2 = 1,82$ ,  $m = \ln(0,0219/0,0109)/\ln 2 = 1,01$ ,  $\eta = 0,01^{1,82} \times 10/0,0013 = 1,74$ ,  $E = 0,01^{1,01}/0,0109 = 0,888$ . КОП, порожденные моделью (2) с найденными параметрами степенных функций, показаны на рис. 3б штриховыми линиями.

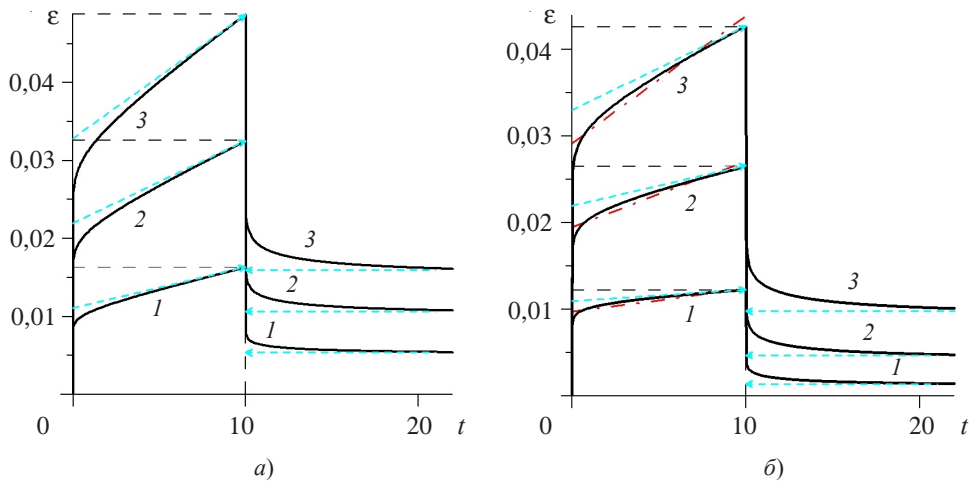


Рис. 3

Можно усовершенствовать алгоритм идентификации, если ввести этап предварительной обработки экспериментальных КОП, аппроксимируя каждую из них (по методу наименьших квадратов) отрезком прямой на интервале  $[0, t_*]$  и горизонтальным отрезком на интервале  $[t_*, T]$  ( $T$  – время испытания), то есть приводя КОП материала (после проверки выполнения основных индикаторов применимости ОС (2)) к виду, характерному для ОС (2), и подставляя в формулы (18), (19) значения  $p_1, p_2, \varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}$ , снятые с обработанных КОП (в результате  $p_i$  увеличатся). Во многих случаях лучше применять такую аппроксимацию КОП только на первом участке (при  $t \in [0, t_*]$ ), корректируя только  $\varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}$  (см. штрихпунктирные линии на рис. 3б), а  $p_1, p_2$  снимать с концевых точек исходных кривых ( $p_i = \varepsilon(T, \bar{\sigma}_i)$ ), поскольку, как правило, важно точнее определить пределы  $\varepsilon(\infty, \bar{\sigma}_i)$  после полного восстановления (асимптоты КОП), но  $\varepsilon(\infty, \bar{\sigma}_i) < p_i$  и не стоит увеличивать  $p_i$  и погрешность определения  $\varepsilon(\infty, \bar{\sigma}_i)$  дополнительной обработкой.

## Заключение

На основе результатов аналитического исследования общих свойств кривых ползучести и обратной ползучести (5), порождаемых определяющим соотношением (2) с произвольными материальными функциями  $F(x)$  и  $V(x)$ , выявлены необходимые признаки применимости ОС (2), которые удобно проверять при анализе данных испытаний материалов на ползучесть и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (2) для моделирования этих материалов, и разработана методика идентификации ОС (2) по серии кривых обратной ползучести (образцов) материала для различных уровней напряжения и длительностей стадии нагружения. Методика позволяет определить массивы значений двух материальных функций ОС (2) на произвольно заданной сетке точек по минимальному набору регистрируемых величин, не требует задания конкретных аппроксимаций, минимизации среднеквадратичного отклонения для определения их параметров, численного решения связанной системы нелинейных уравнений (она решена в общем виде) и использования рекуррентных формул и итерационных методов. Получены явные формулы для прямого (независимого) определения значений материальных функций в произвольно заданных точках из рабочего диапазона напряжения, предотвращающие накопление погрешности, рассмотрены разные варианты методики, их достоинства и недостатки и возможные модификации.

Для материалов со степенной зависимостью скорости установившейся ползучести от напряжения разработана методика быстрого определения степенных материальных функций (16) по минимальному набору базовых испытаний. Показано, что для определения всех параметров степенных функций достаточно всего двух испытаний на обратную ползучесть по программе (1) с разными напряжениями  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ , получены явные формулы (18), (19) для четырех параметров степенных функций (16) через  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ , длительности нагружения  $t_{*1}, t_{*2}$  и четыре измеряемые деформации. Указаны специфические индикаторы применимости (или неприменимости) модели (2), (16) по кривым обратной ползучести материала.

### Список литературы

1. Кеннеди А.Дж. *Ползучесть и усталость в металлах*. М.: Металлургия, 1965. 312 с.
2. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Бугаков И.И. *Ползучесть полимерных материалов*. М.: Наука, 1973. 287 с.
4. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. *Итоги науки и техники. ВИНТИ. Серия Механика деформируемого твердого тела*. 1980. Т. 13. С. 3–104.
5. Малинин Н.Н. *Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
6. Никитенко А.Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
7. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.
8. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
9. Радченко В.П., Кичаев П.Е. *Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов*. Самара: Изд-во СамГТУ, 2011. 157 с.
10. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Amsterdam: William Andrew, 2015. 520 p.
11. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
12. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных

материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки*. 2017. №3. С. 93–123.

13. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации. *Машиностроение и инженерное образование*. 2016. №3. С. 55–68.

14. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. 2016. №6. С. 36–41.

15. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2016. Т. 20. №3. С. 524–543.

16. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки*. 2017. №6. С. 31–55.

17. Хохлов А.В. Свойства семейства кривых нагружения с постоянной скоростью, порождаемых нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла. *Машиностроение и инженерное образование*. 2017. №1. С. 57–71.

18. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2017. Т. 21. №1. С. 160–179.

19. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. №7. С. 7–19.

20. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Ч. 2. Методики. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. №10. С. 2–9.

21. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по диаграммам нагружения с постоянными скоростями. *Деформация и разрушение материалов*. 2018. №4. С. 2–10.

22. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Materials Transactions*. 2014. Vol. 55. No 2. P. 275–284.

23. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2016. Т. 20. №3. С. 496–507.

24. Кайбышев О.А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.

25. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge: Univ. Press, 1997. 287 p.

26. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 363 p.

27. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. 542 p.

28. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2007. Vol. 11. P. 159–172.

29. Еникеев Ф.У. Экспериментальная оценка скоростной чувствительности сверхпластичного материала с сильно неоднородным напряженно-деформированным состоянием. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2007. Т. 73. №10. С. 44–50.

30. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Математическая модель ползучести микронееднородного нелинейно-упругого материала. *Прикладная механика и теоретическая физика*. 2008. Т. 49. №3. С. 157–163.

31. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Archive of Applied Mechanics*. 2009. Vol. 79. P. 619–630.

## References

1. Kennedy A.J. *Processes of Creep and Fatigue in Metals*. Edinburgh, London. Olyver and Boyd. 1962. 480 p.
2. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest elementov konstruksiy [The Creep of Structural Elements]*. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).
3. Bugakov I.I. *Polzuchest polymernikh materialov [Creep of Polymeric Materials]*. Moscow. Nauka Publ. 1973. 287 p. (In Russian).
4. Shesterikov S.A., Lokoschenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. *Itogi nauki i tekhniki. VINITY. Seriya Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Results of Science and Technology. VINITY. Deformable Solid Mechanics Series]*. 1980. Vol. 13. P. 3–104. (In Russian.)
5. Malinin N.N. *Raschety na polzuchest elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy [The Calculations for the Creep of Elements of Mechanical Engineering Structures]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1981. 221 p. (In Russian).
6. Nikitenko A.F. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallicheskih materialov [Creep and Long-Term Strength of Metallic Materials]*. Novosibirsk. NGASU Publ. 1997. 278 p. (In Russian).
7. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2008. 367 p.
8. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
9. Radchenko V.P., Kichaev P.Ye. *Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov [Energy Concept of Creep and Vibrocreep of Metals]*. Samara. SamGPTU Publ. 2011. 157 p. (In Russian).
10. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Amsterdam. William Andrew. 2015. 520 p.
11. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallov [Creep and Long-Term Strength of Metals]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p. (In Russian).
12. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkoupругoplastichnykh materialov [Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]*. 2017. No 3. P. 93–123 (In Russian).
13. Khokhlov A.V. Nelineynaya model vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvella: svoystva krivykh polzuchesti pri stupenchatykh nagruzhennykh i usloviya nakopleniya plasticheskoy deformatsii [The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: properties of creep curves at piecewise-constant stress and criterion for plastic strain accumulation]. *Mashinostroenie i inzhenernoye obrazovanie [Mechanical Engineering and Engineering Education]*. 2016. No 3. P. 55–68 (In Russian).
14. Khokhlov A.V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. Vol. 71. No. 6. P. 132–136.
15. Khokhlov A.V. Krivye dlitelnoy prochnosti nelineynoy modeli vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvella i pravilo summirovaniya povrezhdennosti pri stupenchatykh nagruzhennykh [Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya. Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2016. No 3. P. 524–543 (In Russian).
16. Khokhlov A.V. Nelineynaya model vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvella: svoystva semeystva krivykh relaksatsii i ogranicheniya na materialnye funktsii [Nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model: general properties of stress relaxation curves and restrictions on the material functions]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]*. 2017. No 6. P. 31–55 (In Russian).
17. Khokhlov A.V. Svoystva semeystva krivykh nagruzheniya s postoyannoy skorostyu, porozhdaemykh nelineynoy modelyu vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvella [Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model at constant stress

rates]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie [Mechanical Engineering and Engineering Education]*. 2017. No 1. P. 57–71 (In Russian).

18. Khokhlov A.V. Nelineynaya model' vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella: modelirovanie vliyaniya temperatury na krivye deformirovaniya, relaksatsii i polzuchesti [The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: Simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2017. Vol. 21. No 1. P. 160–179 (In Russian).

19. Khokhlov A.V. Nelineynaya model' vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella: skorost nakopleniya plasticheskoy deformatsii pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: Rate of plastic strain accumulation under cyclic loadings]. *Deformatsiya i razrushenie materialov [Russian Metallurgy (Metally)]*. 2017. No 7. P. 7–19 (In Russian).

20. Khokhlov A.V. Identifikatsiya nelineynoy modeli uprugovyazkoplastichnosti tipa Maksvella po krivym polzuchesti s nachalnoy stadiyey nagruzheniya. Chast 2. Metodiki [Identification of elastoplasticity nonlinear Maxwell-type model using curves of creep in initial load stage. P. 2. Techniques]. *Deformatsiya i razrushenie materialov [Russian Metallurgy (Metally)]*. 2017. No 10. P. 2–9 (In Russian).

21. Khokhlov A.V. Identifikatsiya nelineynoy modeli uprugovyazkoplastichnosti tipa Maksvella po diagrammam nagruzheniya s postoyannymi skorostyami [Identification of the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model using stress-strain curves at constant stress rates]. *Deformatsiya i razrushenie materialov [Russian Metallurgy (Metally)]*. 2018. No 4. P. 2–10 (In Russian).

22. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Materials Transactions*. 2014. Vol. 55. No 2. P. 275–284.

23. Petukhov D.S., Keller I.E. Dvoystvennye zadachi ploskikh polzushchikh techeniy stepennoy neszhimaemoy sredy [Dual plane problems for creeping flow of power-law incompressible medium]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2016. Vol. 20. No 3. P. 496–507 (In Russian).

24. Kaibishev O.A. *Sverkhplastichnost promishlennikh splavov [Superplasticity of Industrial Alloys]*. Moscow. Metallurgiya Publ. 1984. 264 p. (In Russian).

25. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge Univ. Press. 1997. 287 p.

26. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2001. 363 p.

27. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York. Nova Science Pub. Inc. 2010. 542 p.

28. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2007. Vol. 11. P. 159–172.

29. Enikeev F.U. Eksperimental'naya otsenka skorostnoi chuvstvitel'nosti sverkhplastichnogo materiala s silno neodnorodnym napryazhonno-deformirovannym sostoyaniem [Experimental evaluation of speed sensitivity of superplastic material in strongly nonuniform deformed mode]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov [Industrial Laboratory]*. 2007. Vol. 73. No 10. P. 44–50 (In Russian).

30. Radchenko V.P., Shapievskii D.V. Mathematical model of creep for a microinhomogeneous nonlinearly elastic material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. Vol. 49. No 3. P. 478–483.

31. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Archive of Applied Mechanics*. 2009. Vol. 79. P. 619–630.



## IDENTIFICATION TECHNIQUES FOR THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE VISCOELASTOPLASTIC MODEL USING CREEP RECOVERY CURVES

**Khokhlov A.V.**

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russian Federation*

A physically nonlinear Maxwell-type constitutive relation for non-aging rheonomic materials is studied analytically to elucidate the set of basic rheological phenomena that it simulates, to indicate its application field, to reveal necessary phenomenological restrictions on two material functions of the relation and to develop identification techniques and ways of fitting. General properties of creep and recovery curves produced by the model with arbitrary material functions are analyzed in one-dimension case and an effective identification technique is developed based on a set of creep and recovery tests at various stress levels. The explicit formulas are derived to evaluate the material functions values at arbitrarily chosen points in stress domain via minimal set of measured magnitudes of strain. The identification technique enables direct and separate evaluation of the material functions values at a mesh points via test data without error accumulation. The technique doesn't need any prescribed forms of approximations and any type of least square deviation minimization to determine its parameters, it doesn't require to solve a set of non-linear equations and to use iteration or recurrent procedures.

In the case of materials exhibiting creep rate power dependence on stress, a specific rapid procedure is developed for the model identification in the class of power material functions. In this case only two creep recovery tests and four measured magnitudes of strain are needed to determine four parameters through the explicit expressions. A number of additional applicability indicators are found for the power model employing characteristic features of test stress-strain curves.

*Keywords:* viscoplasticity, viscoelasticity, physical non-linearity, creep rate, plastic strain, applicability indicators, identification, superplasticity, polymers.