

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНОГО
ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИОННЫХ СПЛАВОВ
ПО ПЛОСКИМ И ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ***

© 2018 г. **Волков И.А.^{1,2}, Игумнов Л.А.², Тарасов И.С.¹,
Шишулин Д.Н.², Маркова М.Т.¹**

¹*Волжский государственный университет водного транспорта,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

pmptmvgavt@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.05.2018

Рассматриваются процессы сложного пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны. Модифицированный вариант уравнений состояния упругопластичности Ю.Г. Коротких, используемый в настоящей статье, основан на представлении о поверхности текучести и принципе градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения. Такой вариант уравнений состояния отражает основные эффекты упругопластического деформирования материала для произвольных сложных траекторий деформирования. Модификация теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением Ю.Г. Коротких заключается в использовании другой формулировки эволюционных уравнений для смещения координат центра поверхности текучести (тензора микронапряжений).

Особое внимание уделяется вопросам моделирования процессов упругопластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов для сложных процессов деформирования, сопровождающихся вращением главных площадок тензоров напряжений, полных и пластических деформаций.

Для оценки степени достоверности и определения границ применимости определяющих соотношений пластичности проведены численные исследования сложного деформирования стали 45 с площадкой текучести по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны:

- плоской кусочно-ломаной траектории по типу «песочные часы»;
- двух плоских траекторий, симметричных относительно биссектрисы

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-08-00881).

прямого угла, представляющих собой четверть окружности и прямолинейный участок с изломом траектории на 90° ;

– пространственной винтовой траектории со смещенным центром кривизны.

Показано, что модифицированная модель пластичности Ю.Г. Коротких качественно и с необходимой для практических расчетов точностью количественно описывает основные эффекты сложного пластического деформирования стали 45 с площадкой текучести при нагружении по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, моделирование, численный эксперимент, натурный эксперимент, плоские и пространственные траектории деформирования.

Введение

Расчетная оценка долговечности элементов конструкций, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения, требует анализа процессов сложного пластического деформирования конструкционных материалов, так как история деформирования определяет темпы накопления повреждений в результате нестационарной пластической деформации материала, и от достоверности моделирования этих процессов зависит точность расчетных оценок их прочности и долговечности [1–3]. По этой причине к настоящему времени выполнены многочисленные эксперименты, направленные на выяснение основных закономерностей процессов упругопластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов при различных режимах термомеханического нагружения (в основном в условиях одноосного растяжения-сжатия и знакопеременного кручения цилиндрических образцов).

Формулировка моделей упругопластических сред и их верификация проводится на базе анализа результатов экспериментальных исследований процессов деформирования лабораторных образцов при нагружениях, соответствующих эксплуатационным условиям работы конструкционного материала в составе конструктивного элемента [2, 4].

Исследования закономерностей упругопластического деформирования конструкционных материалов имеют и принципиальное значение для развития фундаментальных основ теории пластичности [4, 5]. Для проверки физической достоверности определяющих соотношений упругопластических сред необходимо проведение расчетов и сопоставление полученных численных результатов с имеющимися в литературе экспериментальными данными на широком классе траекторий деформирования [6–16]. Результаты таких исследований могут быть также полезны при определении (конкретизации) материальных параметров скалярных функций и функционалов, входящих в определяющие соотношения моделей пластичности [2, 4, 5].

В настоящей статье для описания процессов сложного пластического деформирования стали 45 с площадкой текучести по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны используется модифицированная модель теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением Ю.Г. Коротких. Полученные численные результаты сравниваются с данными натурных экспериментов, полученных на автоматизированных испытательных машинах высокого класса точности [17–19]. Показано качественное и количественное соответствие численных и экспериментальных данных при описании эффектов сложного нагружения стали 45

с площадкой текучести при деформировании по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны.

1. Определяющие соотношения пластичности

Определяющие соотношения пластичности базируются на следующих основных положениях [2, 4]:

– компоненты тензоров деформаций e_{ij} и скоростей деформаций \dot{e}_{ij} включают в себя упругие e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e и пластические e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p составляющие, то есть обратимые и необратимые компоненты;

– начальная поверхность текучести для различных температур описывается поверхностью в форме Мизеса. Эволюция изменения поверхности текучести описывается изменением ее радиуса C_p и перемещением ее центра ρ_{ij} ;

– изменение объема тела упруго;

– рассматриваются начально-изотропные среды, учитывается только анизотропия, вызванная процессами пластичности;

– рассматриваются процессы деформирования, характеризуемые малыми деформациями.

В упругой области связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций и их скоростей устанавливается с помощью закона Гука:

$$\sigma = 3Ke, \quad \sigma_{ij} = 2Ge_{ij}^e, \quad \dot{\sigma} = 3K\dot{e}, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij}^e, \quad (1)$$

где K – объемный модуль упругости П. Бриджмена, а G – модуль сдвига.

Для описания эффектов монотонного и циклического деформирования вводится поверхность текучести в форме Мизеса [4]:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}. \quad (2)$$

Для описания сложных циклических режимов деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность циклической «памяти» [4]:

$$F_\rho = \rho_{ij}\rho_{ij} - \rho_{\max}^2 = 0, \quad (3)$$

где ρ_{\max} – максимальный за историю нагружения модуль ρ_{ij} .

Примем, что структура эволюционного уравнения для радиуса поверхности текучести имеет вид [4]:

$$\dot{C}_p = [q_\chi H(F_\rho) + a(Q_s - C_p)\Gamma(F_\rho)]\dot{\chi} + q_3\dot{T}, \quad (4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left(\frac{2}{3} \dot{e}'_{ij} \dot{e}'_{ij} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$\chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_\rho) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt,$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1-A)q_1}{A\psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1-A)Q_1}{A\psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}'_{ij}}{(\dot{e}'_{ij} \dot{e}'_{ij})^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}},$$

$$H(F_p) = \begin{cases} 1, & F_p = 0 \wedge \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} > 0, \\ 0, & F_p < 0 \vee \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} \leq 0, \end{cases} \quad \Gamma(F_p) = 1 - H(F_p). \quad (6)$$

Здесь q_1, q_2, q_3 – модули изотропного упрочнения; Q_1 и Q_2 – модули циклического изотропного упрочнения; a – постоянная, определяющая скорость процесса стационарного упрочнения; Q_s – стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных ρ_{\max} и температуре T ; C_p^0 – начальное значение радиуса поверхности текучести. Операторы $H(F_p)$ и $\Gamma(F_p)$ позволяют автоматически разделить монотонные и циклические процессы деформирования.

Эволюция внутренней переменной ρ_{ij} принимается в виде [20]:

$$\dot{\rho}_{ij} = f(\chi_m)[g_1 \dot{e}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\chi}] + g_T \rho_{ij} \langle \dot{T} \rangle + \dot{\rho}_{ij}^*, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad (7)$$

$$f(\chi_m) = 1 + k_1(1 - \exp(-k_2 \chi_m)), \quad \dot{\rho}_{ij}^* = g_3 \dot{e}_{ij}^p H(F_p) - g_4 \rho_{ij}^* \dot{\chi} \Gamma(F_p) \langle \cos \gamma \rangle, \quad (8)$$

$$\cos \gamma = \frac{\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij}^*}{(\dot{\rho}_{ij} \dot{\rho}_{ij})^{1/2} (\rho_{ij}^* \rho_{ij}^*)^{1/2}}, \quad (9)$$

где g_1, g_2, g_3, g_4, k_1 и k_2 – экспериментально определяемые материальные параметры; для любой величины B , заключенной в угловые скобки, выполняются условия:

$$\langle B \rangle = \begin{cases} B & \text{при } B > 0, \\ 0 & \text{при } B \leq 0. \end{cases}$$

При $g_3 = g_4 = k_1 = 0$ из уравнения (7) получаем частный случай – уравнение Армстронга – Фредерика – Кадашевича:

$$\dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{e}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\chi}. \quad (10)$$

Для описания эволюции поверхности «памяти» необходимо сформулировать уравнение для ρ_{\max} :

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{(\rho_{ij} \dot{\rho}_{ij}) H(F_p)}{(\rho_{mn} \rho_{mn})^{1/2}} - g_2 \rho_{\max} \dot{\chi} - g_3 \rho_{\max} \dot{T}. \quad (11)$$

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций подчиняются закону градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda S_{ij}, \quad (12)$$

где λ – коэффициент пропорциональности, определяемый из условия прохождения новой поверхности текучести через конец вектора девиатора напряжений в конце этапа нагружения.

2. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными

В [13, 14, 17–19] приведены результаты экспериментальных исследований пропорционального и непропорционального циклического упругопластического деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов), которые были

получены в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе высокого класса точности под общим руководством профессора В.Г. Зубчанинова. Эксперименты были выполнены при нормальной температуре $T = 20^\circ\text{C}$ на тонкостенных цилиндрических образцах с длиной рабочей части $l = 110$ мм, толщиной стенки $h = 1$ мм и радиусом срединной поверхности $R = 15,5$ мм, выполненных из стали 45 с площадкой текучести в состоянии поставки.

Образцы нагружались по заданной программе испытаний осевой силой P , внутренним давлением интенсивностью q и крутящим моментом M . Компоненты тензоров напряжений и деформаций в рабочей части образца вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi R h}, & \sigma_{22} &= \frac{qR}{h}, & \sigma_{12} &= \frac{M}{2\pi R^2 h}, & \sigma_{33} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ e_{11} &= \frac{\Delta l}{l}, & e_{22} &= \frac{\Delta R}{R}, & e_{12} &= \frac{\varphi R}{2l},\end{aligned}\quad (13)$$

где φ – угол закручивания.

В опытах измерялись деформации e_{11} , e_{22} , e_{12} и напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} . Векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$ в трехмерном совмещенном векторном подпространстве девiatorов с общим неподвижным репером $\{\bar{e}_k\}$ имеют вид:

$$\bar{\sigma} = S_k \bar{e}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_k \bar{e}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Компоненты векторов S_k , \mathcal{E}_k , напряжений $\bar{\sigma}$, деформаций $\bar{\varepsilon}$ и их модули σ , ε вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned}S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right], & S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), & S_3 &= \sqrt{2}\sigma_{12}, \\ S_4 &= \sqrt{2}\sigma_{23} = 0, & S_5 &= \sqrt{2}\sigma_{13} = 0, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(e_{11} - e_0), & \mathcal{E}_2 &= \sqrt{2}\left(e_{22} + \frac{1}{2}e_{11} - \frac{3}{2}e_0\right), & \mathcal{E}_3 &= \sqrt{2}e_{12}, \\ \mathcal{E}_4 &= \sqrt{2}e_{23} = 0, & \mathcal{E}_5 &= \sqrt{2}e_{13} = 0, \\ \sigma &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, & \varepsilon &= \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2},\end{aligned}\quad (15)$$

где

$$e_0 = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$ и считалось, что $\sigma_{33} = 0$ [13, 14, 17–19].

В публикациях [13, 14, 17–19] в качестве траекторий сложного нагружения исследовались плоские и пространственные траектории постоянной и переменной кривизны в пятимерном девiatorном пространстве деформаций А.А. Ильюшина. Эксперименты выполнены по схеме «жесткого нагружения».

При численном моделировании указанных экспериментальных процессов с использованием развитых определяющих соотношений упругопластичности [2, 4]

заданными являлись экспериментальные траектории деформаций (закономерности изменения компонент тензора деформации $e_{ij}(t)$), а траектории напряжений получались в результате интегрирования определяющих соотношений термопластичности по заданной истории изменения e_{ij} . Результаты численного моделирования сопоставлялись с экспериментальными данными.

В статье [17] в качестве траекторий сложного нагружения исследовалась неаналитическая траектория деформирования по типу «песочные часы», состоящая из четырех прямолинейных кусочно-ломаных участков (рис. 1):

- на первом прямолинейном участке реализовывалось пропорциональное кручение по координате Θ_3 при $\Theta_1 = 0$ до значения $\Theta_3^* = 0,025$;
- на втором участке при изломе траектории деформирования на угол $\theta = 135^\circ$ реализовывалось комбинированное растяжение с кручением до значений $\Theta_3^* = 0$ и $\Theta_1^* = 0,025$;
- на третьем участке при изломе траектории деформирования на угол $\theta = 135^\circ$ при $\Theta_1^* = 0,025$ осуществлялось кручение до $\Theta_3^* = 0,025$;
- на четвертом участке при изломе траектории деформирования вновь на $\theta = 135^\circ$ реализовывалось комбинированное сжатие с кручением с приходом в начало координат.

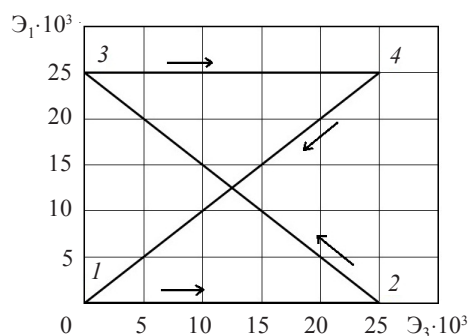


Рис. 1

Физико-механические характеристики стали 45 и материальные параметры модифицированной модели пластичности с трансляционно-изотропным упрочнением Ю.Г. Коротких приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Физико-механические характеристики и параметры модели МПС стали 45

K , МПа	G , МПа	C_p^o , МПа	g_1 , МПа	g_2	g_3 , МПа	g_4	k_1	k_2	a
175000	80770	305	19000	224	1500	0	0	0	5

Таблица 2

Модуль монотонного упрочнения q_1 стали 45

q_1 , МПа	-23505	-17527	-8244	-982	5800	7892	3000	0	120	720
χ	0	0,00175	0,006	0,009	0,013	0,0165	0,02	0,03	0,05	0,08

На рис. 2 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в виде траектории напряжений в плоскости S_3S_1 совмещенного девиаторного подпространства E_s .

На рис. 3 приведены результаты сопоставления расчетных экспериментальных данных для диаграммы прослеживания процесса сложного нагружения $\sigma \sim s$, ха-

рактически характеризующих скалярные свойства материалов в зависимости от длины дуги s сложного деформирования.

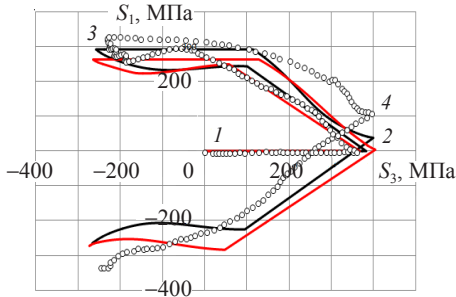


Рис. 2

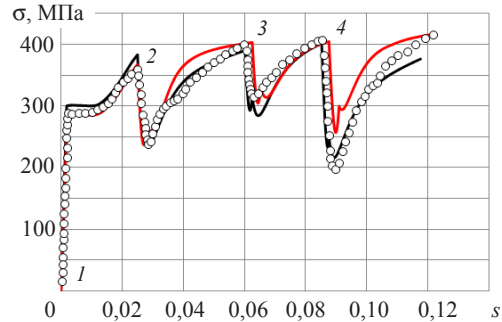


Рис. 3

На рис. 4, 5 приведены локальные диаграммы деформирования. Цифрами 1–4 на рис. 1–5 обозначены точки начала соответствующих участков реализованной кусочно-ломаной траектории деформирования типа «песочные часы». Здесь и далее экспериментальные данные отмечены точками, а модельные расчетные данные – черными сплошными линиями. Красными сплошными линиями отмечены расчетные данные, полученные с использованием уравнения Армстронга – Фредерика – Кадашевича (10).

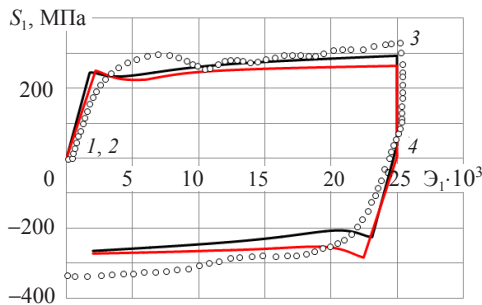


Рис. 4

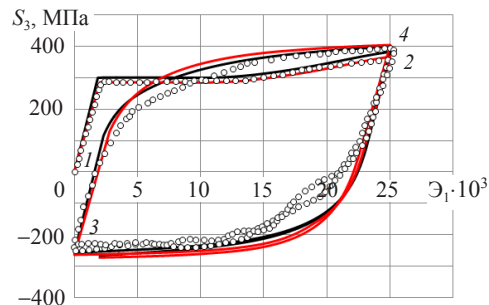


Рис. 5

Видно качественное и приемлемое для инженерных расчетов количественное соответствие опытных и модельных представлений для плоских траекторий деформирования типа «песочные часы» по теории пластического течения с трансляционно-изотропным упрочнением Ю.Г. Коротких, что говорит о правильности моделирования процесса сложного деформирования материала и нахождения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений пластичности. Следует также отметить, что модифицированная модель пластичности более точно описывает кинетику напряженно-деформированного состояния в окрестностях точек излома траектории деформирования, чем определяющие соотношения пластичности Ю.Г. Коротких с использованием уравнения Армстронга – Фредерика – Кадашевича.

Для оценки достоверности модели пластичности и проверки постулата изотропии А.А. Ильюшина были рассмотрены две ломаные нетривиальные траектории деформирования, которые зеркально отображают друг друга относительно биссектрисы прямого угла на плоскости $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3$ [18].

Первая из двух траекторий деформирования (траектория 1 на рис. 6) состоит из двух кусочно-ломанных участков:

- первый из участков представляет собой четверть окружности радиусом 0,02 с центром кривизны в точке $A(0,02; 0)$, на котором реализовывалось комбинированное нагружение растяжением с кручением до точки $K(0,02; 0,02)$;
- на втором участке при изломе траектории деформирования $\theta = 90^\circ$ осуществляется нагружение кручением.

В зеркально отображенной траектории деформирования (траектория 2 на рис. 6):

- первый из участков представляет собой четверть окружности радиусом 0,02 с центром кривизны в точке $B(0; 0,02)$, на котором реализовывалось совместное растяжение с кручением до точки $K(0,02; 0,02)$;
- на втором участке при изломе траектории деформирования $\theta = 90^\circ$ осуществляется последующее монотонное нагружение растяжением.

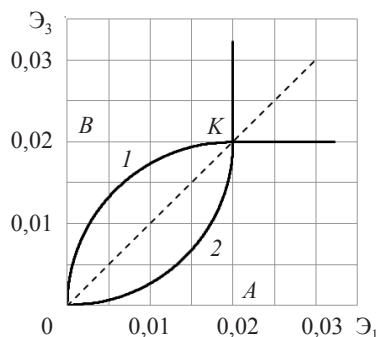


Рис. 6

Результаты численных расчетов и их сравнение с экспериментальными данными представлены на рис. 7–10 для первой траектории, а на рис. 11–14 для второй.

На рис. 7 и 11 приведен отклик на реализованные траектории деформирования (см. рис. 6) в виде траекторий напряжений в плоскости совмещенного девиаторного пространства напряжений А.А. Ильюшина.

На рис. 8 и 12 приведены результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных для диаграммы прослеживания процесса сложного нагружения по траекториям 1 и 2. Видно, что для рассматриваемых двух типов траекторий деформирования постулат изотропии А.А. Ильюшина подтверждается экспериментально и расчетным путем.

На рис. 9, 10 и 13, 14 приведены локальные диаграммы деформирования для траекторий деформирования 1 и 2 соответственно. Видно также качественное и количественное соответствие опытных и расчетных данных.

В третьем примере [19] была рассмотрена пространственная цилиндрическая винтовая траектория деформирования со смещением от начала координат на плоскости $\mathcal{E}_3\mathcal{E}_1$ центром кривизны (рис. 15). Было выполнено четыре витка при увеличивающемся значении \mathcal{E}_2 . Радиус кривизны проекции траектории на плоскости $\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1$ равен 0,005, координаты полюса $P(0,005; 0)$, а шаг винта в направлении $\mathcal{E}_2 - h = 0,0025$ (см. рис. 16–18). Цифрами на рис. 16–25 отмечены начало первого и последующих оборотов винта.

На рис. 19–21 проказан отклик на реализованную траекторию деформирования в виде траектории напряжений в плоскостях S_2S_1, S_3S_1, S_2S_3 совмещенного девиаторного подпространства E_5 .

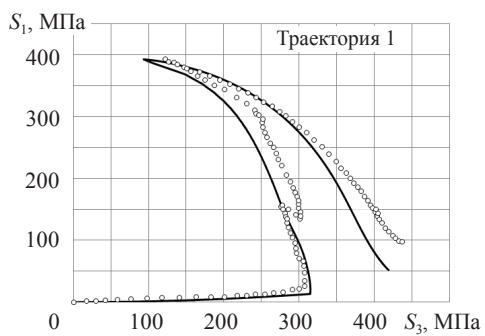


Рис. 7

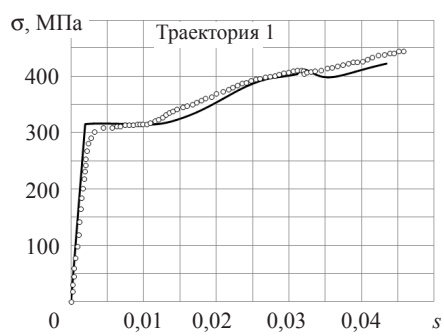


Рис. 8

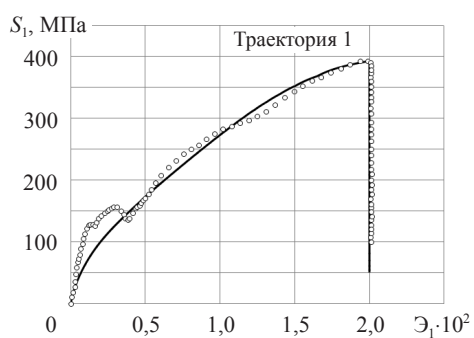


Рис. 9

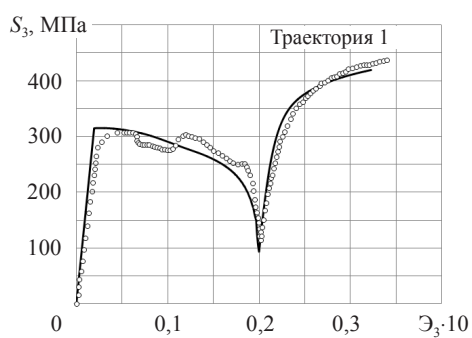


Рис. 10

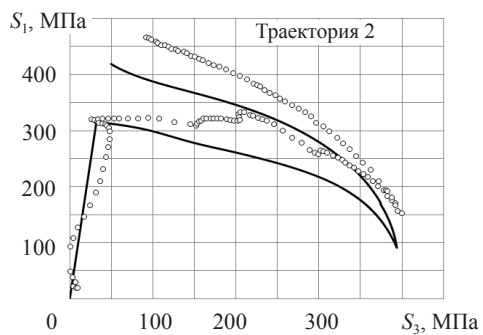


Рис. 11

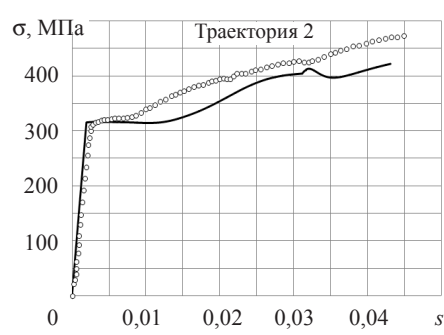


Рис. 12

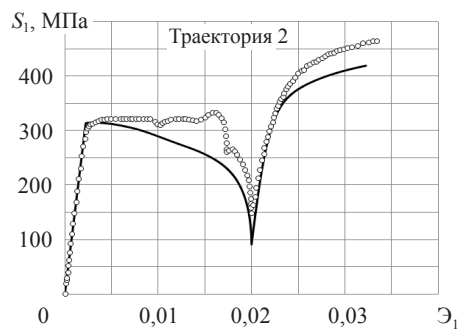


Рис. 13

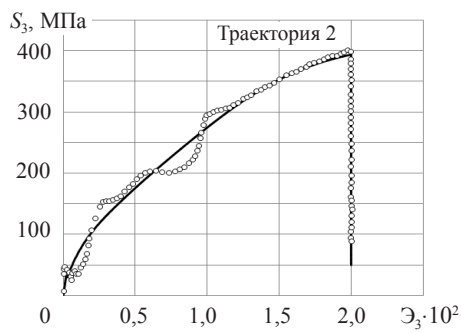


Рис. 14

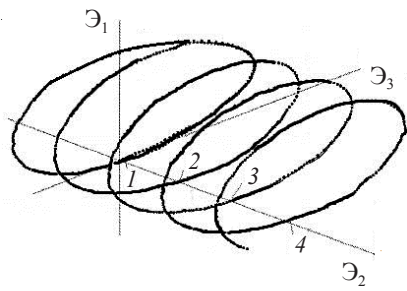


Рис. 15

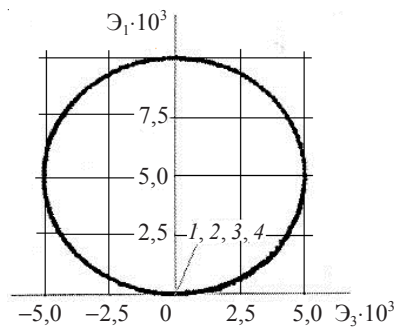


Рис. 16

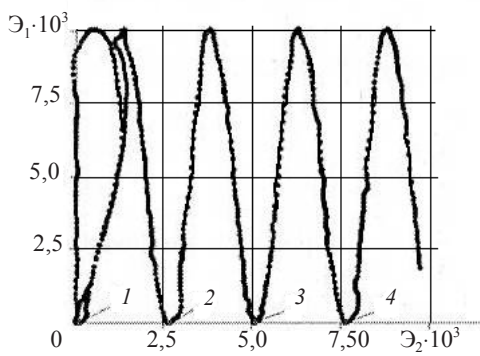


Рис. 17

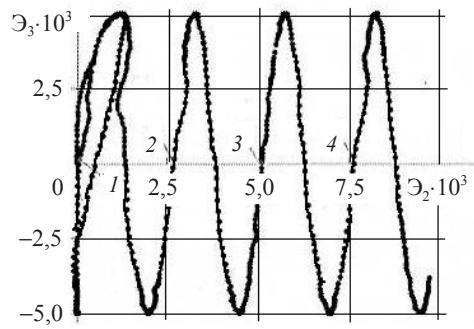


Рис. 18

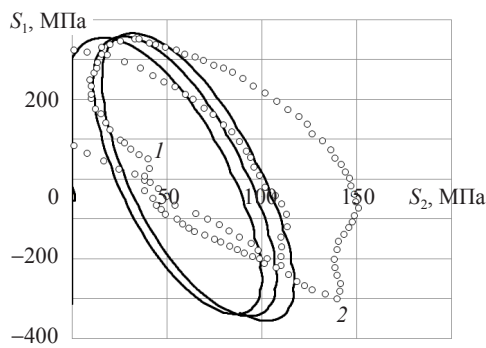


Рис. 19

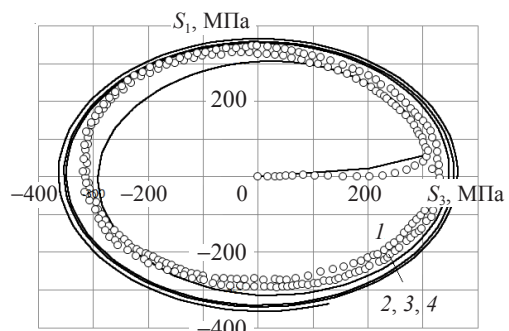


Рис. 20

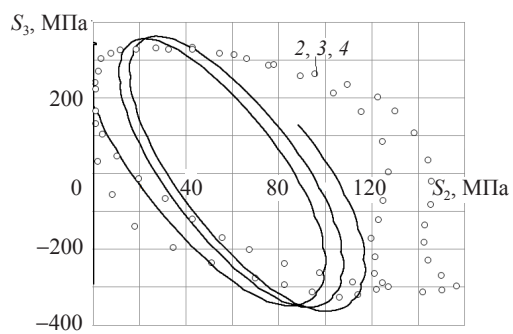


Рис. 21

На рис. 22 приведены результаты сопоставления расчетных экспериментальных данных для диаграммы прослеживания процесса сложного нагружения $\sigma \sim s$, характеризующих скалярные свойства материалов в зависимости от длины дуги s сложного деформирования.

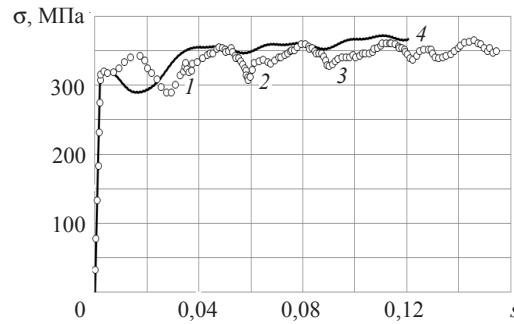


Рис. 22

На рис. 23–25 представлены локальные диаграммы деформирования. Цифрами на рис. 19–25 отмечены начало первого и последующих оборотов винта.

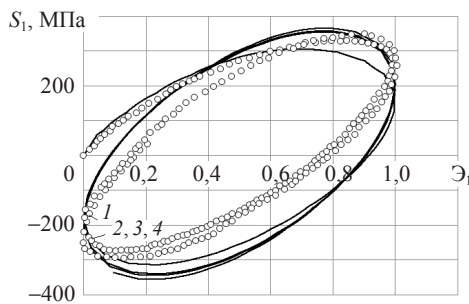


Рис. 23

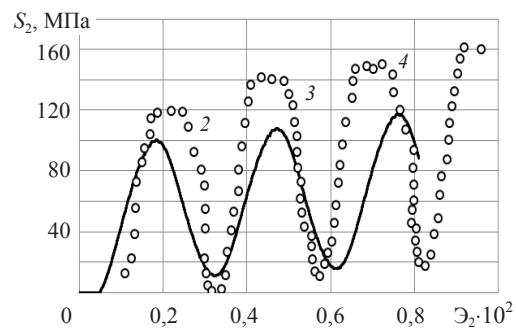


Рис. 24

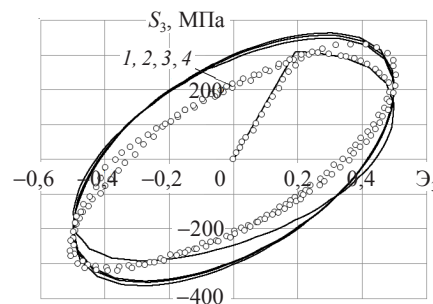


Рис. 25

Видно качественное и приемлемое для инженерных расчетов количественное соответствие опытных и модельных представлений для пространственной цилиндрической винтовой траектории деформирования со смещенным от начала координат на плоскости $\epsilon_3 \epsilon_1$ центром кривизны по теории пластического течения с трансляционно-изотропным упрочнением [2, 4], что говорит о правильности моделирования процесса сложного деформирования материала и нахождения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений пластичности. Некото-

рые отличия расчетных значений от экспериментальных можно объяснить, по-видимому, неточностями при задании параметров материала, а также тем, что при обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости материала.

Заключение

Проведена верификация модифицированных определяющих соотношений теории течения с изотропным и кинематическим упрочнением Ю.Г. Коротких [2, 4] путем сопоставления результатов численных экспериментов с опытными данными по упругопластическому деформированию стали 45 с площадкой текучести на плоских и пространственных траекториях деформирования произвольной кривизны. Результаты верификации свидетельствуют о правильности моделирования пропорционального и непропорционального пластического деформирования конструкционных сталей по произвольным плоским и пространственным траекториям деформирования.

Список литературы

1. Митенков Ф.М., Кайдалов В.Б., Коротких Ю.Г. *Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок*. М.: Машиностроение, 2007. 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
3. Коллинз Дж. *Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Преодоление*. М.: Мир, 1984. 624 с.
4. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. и др. *Прикладная теория пластичности*. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
5. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
6. Дегтярев В.П. *Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1967. 130 с.
7. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения материалов при упругопластическом деформировании. *Вопросы теории пластичности*. М.: АН СССР, 1961. С. 30–57.
8. Лэмба Г.С., Сайдботтом О.М. Пластичность при циклическом нагружении по непропорциональным траекториям. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1978. Т. 100. №1. С. 108–117.
9. Макдауэлл Д.Л. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №4. С. 98–111.
10. Охаси И., Каваи М., Каито Т. Неупругое поведение стали 316 при многоосных непропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №2. С. 6–15.
11. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity. *Acta Mechanica*. 1985. Vol. 57. P. 167–182.
12. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of strain path shapes on non-proportional cyclic plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1985. Vol. 33. No 6. P. 559–575.
13. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования*. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.
14. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 2. Процессы сложного нагружения*. Тверь: ТГТУ, 2004. 184 с.
15. Охаси И., Танака Е., Оока М. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации. *Теоретические основы инженерных расчетов*. 1985. Т. 107. №4. С. 61–73.
16. Заховайко А.А., Можаровский Н.С. О характеристиках прочности и пластичности при сложных путях нагружения. *Проблемы прочности*. 1982. №1. С. 90–93.

17. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гульгьяев В.И. Моделирование процессов упруго-пластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017. №3. С. 203–215.
18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 32. No 3. P. 298–304.
19. Zubchaninov V.G., Gultiaev V.I., Alekseev A.A., Garanikov V.V., Subbotin S.L. Testing of steel 45 under complex loading along the cylindrical screw trajectories of deformation. *Materials Physics and Mechanics*. Vol. 32. No 3. 2017. P. 305–311.
20. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Маркова М.Т. Моделирование усталостной долговечности поликристаллических конструкционных сплавов при блочном несимметричном малоцикловом нагружении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 15–30.

References

1. Mitenkov F.M., Kaydalov V.B., Korotkikh Yu.G. *Metody obosnovaniya resursa yadernykh energeticheskikh ustanovok [Methods of Substantiation of the Resource of Nuclear Power Plants]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2007. 448 p. (In Russian).
2. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyzkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami [Equations of State Viscoelastoplastic Environments with Injuries]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).
3. Callings J.A. *State Equation for Viscoelastoplastic Media with Injuries*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. 1981. 624 p.
4. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. et al. *Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 284 p. (In Russian).
5. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of the Processes of Plastic Media]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2010. 352 p. (In Russian).
6. Degtiarev V.P. *Plastichnost i polzuchest mashinostroytelnykh konstruktsiy [Plasticity and Creep of Engineering Structures]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1967. 130 p. (In Russian).
7. Zhukov A.M. Nekotorye osobennosti povedeniya materialov pri uprugoplasticheskom deformirovani [Some peculiarities of behavior of materials under elastic-plastic deformation]. *Voprosy teorii plastichnosti [Questions of the Theory of Plasticity]*. Moscow. AS USSR Publ. 1961. P. 30–57 (In Russian).
8. Lamba H.S., Sidebottom O.M. Cyclic plasticity for non-proportional paths: Part 1. Cyclic hardening, erasure of memory, and subsequent strain hardening experiments. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1978. Vol. 100. No 1. P. 96–103. DOI:10.1115/1.3443456.
9. McDowell D.L. An experimental study of the structure of constitutive equations for non-proportional cyclic plasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1985. Vol. 107. No 4. P. 307–315. DOI: 10.1115/1.3225824.
10. Ohashi Y., Kawai M., Kaito T. Inelastic behavior of type 316 stainless steel under multiaxial nonproportional cyclic stressings at elevated temperatur. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1985. Vol. 107. No 2. P. 101–109. DOI: 10.1115/1.3225781.
11. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity. *Acta Mechanica*. 1985. Vol. 57. P. 167–182.
12. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of strain path shapes on non-proportional cyclic plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1985. Vol. 33. No 6. P. 559–575.
13. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garanikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 1. Protessy slozhnogo deformirovaniya [Experimental Plasticity. Book. 1. Processes of Complex Deformation]*. Tver. TSTU Publ. 2003. 172 p. (In Russian).
14. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garanikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kn. 2. Protessy slozhnogo nagruzheniya [Experimental plasticity. Book. 2. Processes of Complex Loading]*. Tver. TSTU Publ. 2004. 184 p. (In Russian).

15. Ohashi Y., Tanaka E., Ooka M. Plastic deformation behavior of type 316 stainless steel subject to out-of-phase strain cycles. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1985. Vol. 107. Iss. 4. P. 286–292.
16. Zakhovaiko A.A., Mozharovskii N.S. Strength and ductility characteristics for a material with complex loading paths. *Strength of Materials*. 1982. Vol. 14. No 1. P. 102–105.
17. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. Modelirovanie protsessov uprugoplasticheskogo deformirovaniya materialov po mnogozvennym kusochno-lomanyim pryamolinейnym traektoriyam [Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multielement piecewise zig-zag linear trajectories]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta [Perm State Technical University Mechanics Bulletin]*. 2017. No 3. P. 203–215. (In Russian).
18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 32. No 3. P. 298–304.
19. Zubchaninov V.G., Gultiaev V.I., Alekseev A.A., Garanikov V.V., Subbotin S.L. Testing of steel 45 under complex loading along the cylindrical screw trajectories of deformation. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 32. No 3. P. 305–311.
20. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. Modelirovanie ustalostnoy dolgovechnosti polikristallicheskih konstruktsionnykh splavov pri blochnom nesimmetrichnom malotsiklovom nagruzhennii [Modeling fatigue life of polycrystalline structural alloys under bloc-tipe nonsymmetrical low-cycle loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 1. P. 15–30 (In Russian).

MODELING COMPLEX PLASTIC DEFORMATION OF POLYCRYSTALLINE STRUCTURAL ALLOYS ALONG PLANE AND SPATIAL TRAJECTORIES OF ARBITRARY CURVATURE

**Volkov I.A.^{1,2}, Igumnov L.A.², Tarasov I.S.¹,
Shishulin D.N.², Markova M.T.¹**

¹*Volga State University of Water Transport, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

²*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

Processes of complex plastic deformation of polycrystalline structural alloys along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature are considered. The modified version of Korotkikh's elastoplastic state equations used in the present paper is based on the notion of yield surface and the principle of gradiality of the plastic strain rate vector to the yield surface in the loading point. This version of state equations reflects the main effects of elastoplastic deformation of materials for arbitrary complex deformation trajectories. The modification of Korotkikh's theory of yield with kinematic and isotropic hardening consists in using a different formulation of evolutionary equations for the displacement of the coordinates of the yield surface center (the micro-stress tensor).

Special attention is paid to the issues of modeling the processes of elastoplastic deformation of polycrystalline structural alloys for complex deformation processes accompanied by the rotation of the main sites of stress and total and plastic strain tensors.

To assess the degree of reliability the scope of applicability of the defining relations of plasticity, complex deformation of Steel 45 with a yield area along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature has been numerically analyzed:

- an “hourglass” plane piecewise-broken trajectory ;
- two plane trajectories symmetric relative to the right angle bisector in the form of a quarter-circle and a straight part with a 90-degree kink of the trajectory;
- a spatial spiral trajectory with a biased curvature center.

It is shown that the modified Korotkikh's model of plasticity qualitatively and quantitatively, accurately enough for applied engineering purposes, describes the main effects of complex plastic deformation of Steel 45 with a yield area loaded along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature.

Keywords: plasticity, complex loading, modeling, numerical and full-scale experiments, plane and spatial deformation trajectories.