

УДК 539.3

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
И КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОМПОНЕНТАХ
МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ***

© 2018 г.

**Яковлева Т.В.^{1,2}, Крысько А.В.^{1,2},
Кружилин В.С.¹, Крысько В.А.¹**

¹*Саратовский государственный технический университет
им. Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томск, Российская Федерация*

yan-tan1987@mail.ru

Поступила в редакцию 13.11.2017

Статья посвящена построению математической модели компонентов датчиков инерциальной информации с учетом параметрических колебаний и их контактного взаимодействия. Предложена математическая модель компонентов датчиков инерциальной информации в виде многослойной системы, состоящей из пластины, подкрепленной набором балок с зазорами. Контактное взаимодействие балочно-пластинчатой структуры исследовано с помощью методов нелинейной динамики: строились сигналы, фазовые портреты, Фурье-спектры, применялись вейвлет-преобразования и анализ знаков старших показателей Ляпунова. Изучено влияние количества подкрепляющих ребер (одна, две или три балки) на характер колебаний элементов. Выявлены зоны синхронизации и перемежаемости частот. Достоверность решения достигнута сопоставлением результатов, полученных разными численными методами: методом конечных разностей и методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях по пространственной координате, методами типа Рунге – Кутты по времени.

Ключевые слова: микромеханические датчики инерциальной информации, контактное взаимодействие пластин и балок, параметрические колебания, метод Бубнова – Галеркина, метод Рунге – Кутты, вейвлет-анализ.

Введение

В последние годы одним из наиболее интенсивно и динамично развивающихся направлений является микросистемная техника, включающая в себя миниатюрные датчики инерциальной и внешней информации, микродвигатели и преобразователи. Современные микромеханические и микроэлектромеханические системы, к которым относятся микромеханические гироскопы (ММГ) и акселерометры (ММА),

* Выполнено при финансовой поддержке грантом Президента Российской Федерации МК-5609.2016.8 и РФФИ (гранты №16-08-01108а, №16-01-00721а).

значительно превосходят традиционные гироскопы с вращающимся ротором по массогабаритным характеристикам, показателям себестоимости и энергопотребления, что обусловило применение ММГ и ММА для широкого круга подвижных объектов – в навигационном оборудовании, автомобильной промышленности, военной технике, авиастроении и ракетостроении [1–3]. При этом для прецизионного приборостроения чрезвычайно актуальной и важной является проблема повышения точности работы датчиков. Решение ее заключается в применении новых технологических методов, в создании точных математических моделей движения чувствительного элемента, а также алгоритмов минимизации погрешностей работы прибора. Современные требования к прецизионным датчикам инерциальной информации и условия их эксплуатации обуславливают необходимость при их проектировании глубокого, с достаточной степенью обобщения, исследования особенностей влияния на динамику датчика различных по своей природе физических процессов и возмущающих факторов. К таким особенностям следует отнести возможность возникновения феномена детерминированного хаоса в микромеханических датчиках инерциальной информации (ММДИИ) (то есть возникновение хаотического движения чувствительного элемента ММДИИ и, следовательно, хаотического выходного сигнала датчика, находящегося под воздействием детерминированных внешних возмущений). Этой теме в последние годы посвящено большое количество исследований [4–6]. В публикациях [7–13] представлены разработки по моделированию и анализу и экспериментальные результаты, связанные с нелинейным динамическим поведением микроэлектромеханических систем (МЭМС). В статье [14] приведен обзор фундаментальных исследований по нелинейной динамике микрорезонаторов, включая явления резонанса, параметрических колебаний, автоколебаний и синхронизации, которые возникают в элементах конструкции. Среди причин, которые могут привести к возникновению эффекта детерминированного хаоса в выходном сигнале датчика, можно назвать вибрационные нагрузки на чувствительный элемент и на корпус датчика, наличие реверсивных систем терморегулирования, нелинейную силу, возбуждающую первичные колебания чувствительного элемента и т.д. Очевидно, что хаотический выходной сигнал для датчиков инерциальной информации вообще и для ММДИИ в частности является крайне нежелательным явлением, и уже на этапе проектирования необходимо знать, какие внешние условия эксплуатации и динамические воздействия, а также какие сочетания параметров ММДИИ могут привести к хаотизации выходного сигнала датчика. Поэтому представляется эффективным при исследовании и разработке ММДИИ применение методов нелинейной динамики.

Настоящая статья посвящена построению математической модели параметрических колебаний в ММДИИ и их компонентах с учетом контактного взаимодействия. Составным элементом в электронной технике, в приборах систем навигации, в частности в гироскопах (слоистые плоские микромеханические акселерометры), является пластина, подкрепленная ребрами жесткости в виде балок [15]. Динамические воздействия при наличии малых зазоров между пластиной и балками вызывают хаотические колебания, недостаточно изученные в настоящее время. Поэтому важен вопрос учета контактного взаимодействия слоев и влияния количества подкрепляющих ребер жесткости на устойчивость колебаний [16, 17].

В качестве численного эксперимента были рассмотрены три задачи: 1) пластина подкреплена одной балкой, расположенной по центру пластины, 2) пластина

подкреплена двумя балками, расположенными симметрично относительно центра пластины, 3) пластина подкреплена тремя балками, расположенными симметрично относительно центра пластины. В ходе проведенных исследований выявлено, что в результате контактного взаимодействия колебания такой системы происходят хаотически с утроением периода. Впервые было обнаружено явление хаотической фазовой синхронизации и перемежаемости частот для таких систем.

Полученные результаты могут быть использованы как исследователями, так и конструкторами ММДИИ, применяемых в системах управления прецизионной техники космического и авиационного назначения.

1. Постановка задачи и метод решения

Построена математическая модель параметрических колебаний и контактного взаимодействия многослойной системы, которая представляет собой пластину, подкрепленную набором балок (одной, двумя и тремя). Между пластиной и балками имеются малые зазоры (рис. 1).

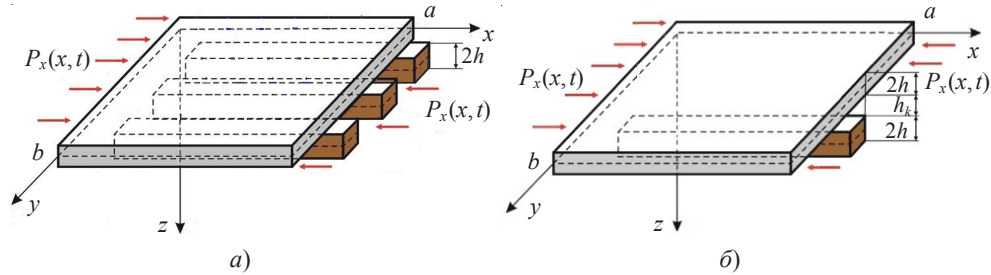


Рис. 1. Схема многослойной структуры:
пластина подкреплена тремя балками (а) и одной балкой (б)

Верхний слой представляет собой пластину, которая описывается уравнением типа Жермен – Лагранжа, а нижний слой – набор параллельных балок Эйлера – Бернулли. Контактное взаимодействие учитывается по модели Винклера. Пластина и балки изотропные, их поведение описывается системой уравнений, записанных в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla_\lambda^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^3 q_{k_i} = 0, \\ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial t} + q_{k_1} = 0, \\ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial t} + q_{k_2} = 0, \\ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_3}{\partial t} + q_{k_3} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$q_{k_i} = K(w - w_i - h_k) \Psi_i, \quad \Psi_i = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w - h_k - w_i)].$$

Соотношения q_{k_i} представляют собой контактное давление между слоями [18];

w, w_i – функции прогибов пластины и балок ($i = 1, 2, 3$) соответственно; K – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта; h_k – зазор между слоями; t – время; ε – коэффициент затухания; $\mu = 0,3$ – коэффициент Пуассона; $P_x(x, t) = p_0 \sin \omega_p t$ – продольная нагрузка, действующая на пластину. Система уравнений (1) приведена к безразмерному виду обычным образом [19].

Имеют место граничные условия: шарнирное опирание по контуру пластины и шарнирно-опертая балка и нулевые начальные условия. К этим условиям добавляются условия непроникания элементов системы друг в друга.

В зависимости от количества подкрепляющих балок в многослойной структуре возможны различные задачи:

- 1) пластина подкреплена одной балкой ($i = 1$) по центру ($y = 0,5$), в этом случае математическая модель будет состоять из первых двух уравнений системы (1);
- 2) пластина подкреплена двумя параллельными балками ($i = 2$) на симметричном расстоянии от центра пластины ($y = 0,35$ и $y = 0,65$);
- 3) пластина подкреплена тремя параллельными балками ($i = 3$) на симметричном расстоянии от центра пластины ($y = 0,25, y = 0,5$ и $y = 0,75$).

Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях. Функции w, w_1, w_2, w_3 , являющиеся решениями, приближенно аппроксимируем выражениями в виде произведения функций, зависящих от времени и от координат:

$$w = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \varphi_{kj}(x, y), \quad w_i = \sum_{k=1}^{N_i} A_i^k(t) \varphi_i^k(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Функции $\varphi_{kj}(x, y)$ и $\varphi_i^k(x)$ в формуле (2) выбираем таким образом, чтобы они были линейно независимы, непрерывны вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно и удовлетворяли граничным условиям. Положим, что $\varphi_{kj}(x, y) = \sin(k\pi x) \sin(j\pi y)$ и $\varphi_i^k(x) = \sin(k\pi x)$. Коэффициенты $A_{kj}(t)$ и $A_i^k(t)$ являются искомыми функциями времени. Применим метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях и получим систему из $(N^2 + iN_i)$ уравнений второго порядка относительно функций времени. Количество уравнений в системе зависит от количества балок и числа членов разложения в ряды (2). Систему уравнений второго порядка сводим к системе уравнений первого порядка. Далее задачи Коши для нелинейной системы уравнений первого порядка решаются методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности по времени.

Так как система уравнений нелинейная, то решить ее аналитически не представляется возможным и возникает вопрос о погрешности. Поэтому для подтверждения достоверности был проведен сравнительный анализ результатов, полученных разными численными методами: методом конечных разностей с аппроксимацией $O(h^2), O(h^4), O(h^6)$ и методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях по пространственной координате, методами типа Рунге – Кутты 4-го, 6-го, 8-го порядков точности по времени [20, 21].

Далее анализ получаемых результатов осуществлялся с помощью методов нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений: для каждого слоя механической структуры строились сигналы, фазовые портреты, Фурье-спектры, применялись вейвлет-преобразования и анализ знаков показателей Ляпунова. Так как в настоящее время не существует точного метода нахождения показателя

телей Ляпунова, в целях исключения численной погрешности и установления истинности хаотического состояния применяются три метода: метод Канца, метод Вольфа и метод Розенштейна для вычисления знаков показателей Ляпунова. Изучение фазовой хаотической синхронизации механических динамических систем проводится на базе вейвлет-анализа. Фазовая хаотическая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов на синхронизированных временных масштабах [22], в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом, то есть являются хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов.

2. Контактное взаимодействие пластины, подкрепленной балками

Исследуем характер параметрических колебаний подкрепленной набором балок пластины в зависимости от их количества. Предположим, что между пластиной и балками имеется зазор $h_k = 0,1$. На пластину действует знакопеременная продольная нагрузка $P_x(x, t) = p_0 \sin \omega_p t$, где $\omega_p = 5$ – частота, близкая к частоте собственных колебаний пластины. Зададим значение прогиба пластины в начальный момент времени $w = 0,001$.

В случае подкрепления пластины одной балкой при действии продольной нагрузки с амплитудой $p_0 = 0,1$ пластина совершает гармонические колебания на частоте $\omega_p = 5$. При этом балка находится в состоянии покоя. Далее при интенсивности продольной нагрузки, начиная с $p_0 = 0,15$, пластина и балка вступают в контактное взаимодействие (рис. 2а). При этом характер колебаний пластины и балки становится хаотическим с утроенным периодом, то есть колебания происходят на трех частотах: $\omega_p/3 = 1,67$, $2\omega_p/3 = 3,33$, $\omega_p = 5$ (рис. 2б).

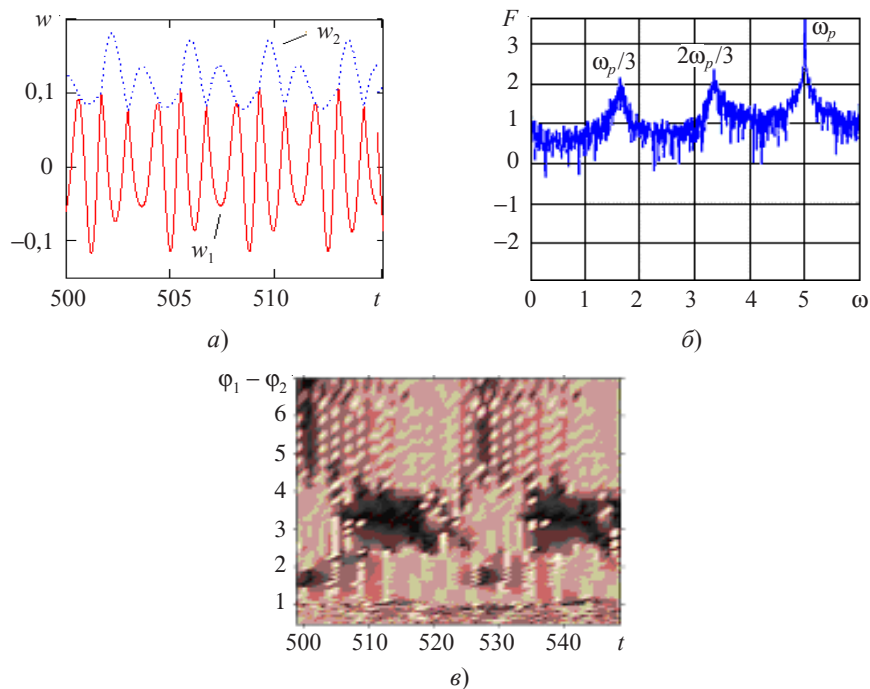


Рис. 2. Параметрические колебания пластины и балки при амплитуде $p_0 = 0,15$: совместные колебания пластины и балки (а); спектр мощности Фурье (б); хаотическая фазовая синхронизация колебаний (в)

Старшие показатели Ляпунова для пластины и балки, вычисленные тремя методами, оказались положительными, что указывает на хаотическое состояние системы. Фазовый портрет пластины представляет собой странный аттрактор, а фазовый портрет балки – сплошное пятно. В отдельные моменты времени происходит хаотическая фазовая синхронизация колебаний в окрестности частоты $2\omega_p/3 = 3,33$. На графике разности фаз темным цветом выделены частоты, на которых синхронизируются колебания (рис. 2в), наблюдаются зоны включения/выключения синхронизации, то есть явление перемежаемости. Для пластины доминирующей частотой колебаний является $\omega_p = 5$.

Дальнейшее увеличение амплитуды нагрузки до величины $p_0 = 0,65$ приводит к перестройке системы, сигналы колебаний вкладываются друг в друга. Спектры мощности пластины и балки представляют собой сплошные пьедесталы, фазовые портреты – синхронизированные хаотические аттракторы, причем на фазовом портрете пластины появляется петля. Последующее увеличение амплитуды нагрузки приводит к полной синхронизации системы в диапазоне частот $\omega \in [4,5; 7]$ и на частоте $\omega_p/3 = 1,67$.

В случае подкрепления пластины двумя или тремя балками при действии продольной нагрузки с амплитудой $p_0 = 0,10145$ происходит их первое касание в отдельные моменты времени. Колебания пластины становятся гармоническими на частоте $\omega_p = 5$, на фазовом портрете получен эллипс. Балки совершают непродолжительные по времени синхронные колебания, после чего колебания затухают. При продольной нагрузке $p_0 = 0,125$ на всем рассматриваемом интервале времени происходит контактное взаимодействие пластины и балок, колебания которых синхронные. Характер колебаний пластины и балок хаотический с утроением периода $\omega_p/3 = 1,67$, $2\omega_p/3 = 3,33$, $\omega_p = 5$. Фазовые портреты для пластины и балок представляют собой странные аттракторы с выраженной многооборотной составляющей, при этом на 2D вейвлет-спектрах присутствуют зоны перемежаемости частот. Старшие показатели Ляпунова имеют положительные знаки, что также подтверждает наличие хаотического состояния системы.

Заключение

При продольном нагружении пластины при наличии контактного взаимодействия пластины и балок колебания становятся хаотическими, при этом можно выделить три доминирующие частоты: $\omega_p/3 = 1,67$, $2\omega_p/3 = 3,33$, $\omega_p = 5$. Для всех трех задач наблюдаются зоны включения/выключения синхронизации, то есть явление перемежаемости.

Список литературы

1. Пешехонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем. *Гироскопия и навигация*. 2011. №1(72). С. 3–16.
2. Распопов В.Я. *Микромеханические приборы*. Тула: Тульский гос. ун-т, 2002. 392 с.
3. Трофимов А.Н. Датчики параметров движения в ракетно-космической технике и народном хозяйстве. *Датчики и системы*. 2000. №7. С. 20–23.
4. Панкратов В.М., Барулина М.А., Крысько А.В. Влияние расстройки парциальных частот чувствительных элементов на амплитудно-частотные характеристики микромеханических гироскопов. *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2017. №2. С. 99–105.
5. Kirichenko V.F., Awrejcewicz J., Kirichenko A.F., Krysko A.V., Krysko V.A. On the non-classical mathematical models of coupled problems of thermo-elasticity for multi-layer shallow

shells with initial imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 74. P. 51–72.

6. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Krysko V.A., Kutepov I.E., Zagniboroda N.A., Papkova I.V., Serebryakov A.V. Chaotic dynamics of flexible beams with piezoelectric and temperature phenomenon. *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. No 34–36. P. 2058–2061.

7. Haghghi H.S., Markazi A.H. Chaos prediction and control in MEMS resonators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. No 10. P. 3091–3099.

8. Aghababa M.P. Chaos in a fractional-order micro-electro-mechanical resonator and its suppression. *Chinese Physics B*. 2012. Vol. 21. No 10. P. 100505-1–100505-9.

9. Zhang W.M., Meng G. Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2005. Vol. 119. No 2. P. 291–299.

10. Коновалов С.Ф., Кулешов А.В., Подчерцев В.П., Фатеев В.В. Вибрационные датчики угловой скорости. *Авиакосмическое приборостроение*. 2013. №12. С. 43–60.

11. Барулина М.А., Панкратов В.М., Крысько А.В. Математическая модель движения чувствительного элемента роторного микромеханического гироскопа как круглой ортогруппной пластины, закрепленной в центре. *XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: Сборник материалов*. 2017. С. 291–294.

12. Джашитов В.Э., Панкратов В.М. Суперминиатюрный микромеханический датчик инерциальной информации в условиях переменных и постоянных механических воздействий. *Нано- и микросистемная техника*. 2011. №6 (131). С. 39–43.

13. Tocchio A., Comi C., Langfelder G., Corigliano A., Longoni A. Enhancing the linear range of MEMS resonators for sensing applications. *IEEE Sensors*. 2011. No 11. P. 3202–3210.

14. Rhoads J., Shaw S.W., Turner K.L. Nonlinear dynamics and its applications in micro- and nanoresonators. In Proceedings of DSCC 2008: *The 2008 ASME Dynamic Systems and Control Conference*. Ann Arbor, Michigan, USA. 20-22 October 2008.

15. Amorim T.D., Dantas W.G., Gusso A. Analysis of the chaotic regime of MEMS/NEMS fixed-fixed beam resonators using an improved 1DOF model. *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 79. Iss. 2. P. 967–981.

16. Мицкевич С.А., Захарова А.А., Крысько А.В. Установившиеся колебания балочных МЭМС-резонаторов в вязкой среде при действии локальной ударной нагрузки. *Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции*. 2016. С. 277–280.

17. Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2015. №4. С. 259–272.

18. Кантор Б.Я. *Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения*. Киев: Наукова думка, 1990. 100 с.

19. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.

20. Мицкевич С.А., Папкина И.В., Захарова А.А., Крысько А.В. Нелинейная динамика сферических гидроакустических приборов, применяемых в нефтегазовой промышленности. *Изв. Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2016. Т. 327. №11. С. 17–23.

21. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems*. Singapore: World Scientific, 2016. 562 p.

22. Яковлева Т.В., Крысько А.В., Кружилин В.С. Вынужденные колебания и контактное взаимодействие структуры, состоящей из двух параллельных пластин с внутренним набором локальных ребер, применяемой в теории гироскопов. *Изв. Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2016. Т. 327. №10. С. 107–115.

References

1. Peshekhonov V.G. Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya giroskopicheskikh system [Current state and prospects for the development of gyroscopic systems]. *Giroskopiya i navigatsiya [Gyroscopy and Navigation]*. 2011. No 1(72). P. 3–16 (In Russian).

2. Raspopov V.Ya. *Mikromekhanicheskie pribory* [Micromechanical Devices]. Tula. Tul'skiy gosudarstvenniy universitet Publ. 2002. 392 p. (In Russian).
3. Trofimov A.N. Datchiki parametrov dvizheniya v raketnokosmicheskoy tekhnike i narodnom khozyaystve [Sensors of motion parameters in rocket and space technology and the national economy]. *Datchiki i sistemy* [Sensors & Systems]. 2000. No 7. P. 20–23 (In Russian).
4. Pankratov V.M., Barulina M.A., Krysko A.V. Vliyanie rasstroiki partialnykh chastot chuvstvitelnykh elementov na amplitudno-chastotnye kharakteristiki mikromekhanicheskikh giroskopov [The effect of detuning the partial frequencies of sensitive elements on the amplitude-frequency characteristics of micromechanical gyroscopes]. *Izvestiya vusov. Aviatsionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics]. 2017. No 2. P. 99–105 (In Russian).
5. Kirichenko V.F., Awrejcewicz J., Kirichenko A.F., Krysko A.V., Krysko V.A. On the non-classical mathematical models of coupled problems of thermo-elasticity for multi-layer shallow shells with initial imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 74. P. 51–72.
6. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Krysko V.A., Kutepov I.E., Zagniboroda N.A., Papkova I.V., Serebryakov A.V. Chaotic dynamics of flexible beams with piezoelectric and temperature phenomenon. *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. No 34–36. P. 2058–2061.
7. Haghghi H.S., Markazi A.H. Chaos prediction and control in MEMS resonators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. No 10. P. 3091–3099.
8. Aghababa M.P. Chaos in a fractional-order micro-electro-mechanical resonator and its suppression. *Chinese Physics B*. 2012. Vol. 21. No 10. P. 100505-1–100505-9.
9. Zhang W.M., Meng G. Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2005. Vol. 119. No 2. P. 291–299.
10. Konovalov S.F., Kuleshov A.V., Podchezertsev V.P., Fateev V.V. Vibratsionnye datchiki uglovoy skorosti [Vibration sensors for angular velocity]. *Aviakosmicheskoe priborostroenie* [Aerospace Instrument-Making]. 2013. No 12. P. 43–60 (In Russian).
11. Barulina M.A., Pankratov V.M., Krysko A.V. Matematicheskaya model' dvizheniya chuvstvitel'nogo elementa rotornogo mikromekhanicheskogo giroskopa kak krugloy ortotropnoy plastiny, zakreplennoy v tsentre [A mathematical model of the motion of a sensitive element of a rotary micromechanical gyroscope as a circular orthotropic plate fixed in the center]. *XXIV Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam: Sbornik materialov* [XXIV St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. The Collection of Materials]. 2017. P. 291–294 (In Russian).
12. Dzhashitov V.E., Pankratov V.M. Superminiaturnyy mikromekhanicheskiy datchik inertsiyalnoy informatsii v usloviyakh peremennykh i postoyannykh mekhanicheskikh vozdeystviy [Superminiature micromechanical sensor of inertial information under conditions of variable and permanent mechanical influences]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika* [Nano- and Microsystems Technology]. 2011. No 6 (131). P. 39–43 (In Russian).
13. Tocchio A., Comi C., Langfelder G., Corigliano A., Longoni A. Enhancing the linear range of MEMS resonators for sensing applications. *IEEE Sensors*. 2011. No 11. P. 3202–3210.
14. Rhoads J., Shaw S.W., Turner K.L. Nonlinear dynamics and its applications in micro- and nanoresonators. In Proceedings of DSCC 2008: *The 2008 ASME Dynamic Systems and Control Conference*. Ann Arbor, Michigan, USA. 20–22 October. 2008.
15. Amorim T.D., Dantas W.G., Gusso A. Analysis of the chaotic regime of MEMS/NEMS fixed-fixed beam resonators using an improved 1DOF model. *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 79. Iss. 2. P. 967–981.
16. Mitskevich S.A., Zakharova A.A., Krysko A.V. Ustanovivshiesya kolebaniya balochnykh MEMS-rezonatorov v vyazkoy srede pri deystvii lokal'noy udarnoy nagruzki [Steady oscillations of beam MEMS resonators in a viscous medium under the action of local shock loading]. *Kompyuternye nauki i informatsionnye tekhnologii. Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* [Computer Science and Information Technology. Materials of the International Scientific Conference]. 2016. P. 277–280 (In Russian).
17. Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova E. Yu. Kontaktnoe vzaimodeystvie plastiny s sistemoy balok pri nalichii zazorov s uchetom belogo shuma [Contact interaction of the

plate with the system of beams in the presence of gaps with allowance for white noise]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 4. P. 259–272 (In Russian).

18. Kantor B.Ya. *Kontaktnye zadachi nelineynoy teorii obolochek vrashcheniya [Contact Problems of the Nonlinear Theory of Shells of Revolution]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1990. 100 p. (In Russian).

19. Volmir A.S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek [Non-linear Dynamics of Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1972. 432 p. (In Russian).

20. Mitskevich S.A., Papkova I.V., Zakharova A.A., Krysko A.V. Nelineynaya dinamika sfericheskikh gidroakusticheskikh priborov, primenyaemykh v neftegazovoy promyshlennosti [Non-linear dynamics of spherical hydroacoustic devices used in oil and gas industry]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering]*. 2016. Vol. 327. No 11. P. 17–23 (In Russian).

21. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems*. Singapore. World Scientific. 2016. 562 p.

22. Yakovleva T.V., Krysko A.V., Kruzhilin V.S. Vynuzhdennye kolebaniya i kontaktnoe vzaimodeystvie struktury, sostoyashchey iz dvukh paralelnykh plastin s vnutrennim naborom lokalnykh reber, primenyaemoy v teorii giroskopov [Constrained oscillations and contact interaction of the structure, consisting of two parallel plates with internal set of local ribs, used in the theory of gyroscopes]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering]*. 2016. Vol. 327. No 10. P. 107–115 (In Russian).

PARAMETRIC OSCILLATIONS AND CONTACT INTERACTION IN THE COMPONENTS OF MICROMECHANICAL SENSORS OF INERTIAL INFORMATION

Yakovleva T.V.^{1,2}, Krysko A.V.^{1,2}, Kruzhilin V.S.¹, Krysko V.A.¹

¹*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

²*The National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

The paper considers constructing a mathematical model of components of inertial information transducers, accounting for parametric oscillations and their contact interaction. A mathematical model of components of inertial information transducers is presented in the form of a multilayered system, consisting of a plate stiffened with a set of spaced beams. Contact interaction of the beam-plate structure is analyzed using the methods of nonlinear dynamics: signals, phase portraits and Fourier-specters were constructed, wavelet-transforms and the analysis of the signs of the greatest of Lyapunov indices were used. The effects of the number of stiffening ribs (one, two and three beams) on the character of oscillations of the elements is studied. Zones of synchronization and intermittence of frequencies are found. The adequacy of the solution is corroborated by comparing the results obtained using various numerical methods: finite difference method and Bubnov – Galerkin method with higher approximations along the spatial coordinate, Runge – Kutta-type time methods.

Keywords: micromechanical sensors of inertial information, contact interaction of plates and beams, parametric oscillations, Bubnov – Galerkin method, Runge – Kutta method, wavelet analysis.