

УДК 539.3

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА*

© 2018 г.

Богачев И.В.¹, Ватульян А.О.^{1,2}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ, Российская Федерация

bogachev89@yandex.ru, vatulyan@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 01.12.2017

Рассмотрена обратная задача определения пьезоэлектрических характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра на основе данных акустического анализа при установившихся колебаниях, вызванных механической нагрузкой, приложенной к внешней грани. Неизвестными считались функции пьезоэлектрических характеристик при неоднородной поляризации цилиндра в случае, когда модули упругости неполяризованной керамики являются известными функциями. В качестве дополнительной информации использовались значения функции смещения в некоторой точке поверхности цилиндра в заданном частотном диапазоне. Для решения обратной задачи предложен специальный подход на основе проекционных схем и метода алгебраизации, позволяющий определять искомые функции-характеристики в виде разложений по системам независимых функций. Искомые коэффициенты разложений определялись из соответствующих систем линейных и нелинейных уравнений, получаемых с использованием слабой постановки задачи. Результаты решения обратной задачи проиллюстрированы вычислительными экспериментами.

Ключевые слова: электроупругость, пьезокерамика, функционально-градиентный пьезоматериал, неоднородный цилиндр, обратные задачи, метод алгебраизации.

Введение

Активное использование пьезоэлектрических преобразователей в современных технических устройствах в настоящее время влечет за собой развитие моделей электроупругих тел [1]. Значительный интерес при этом представляют функционально-градиентные пьезоматериалы (ФГП), свойства которых непрерывно изменяются относительно координат. Современные технологии позволяют изготавливать ФГП со значительными диапазонами изменения механических и пьезоэлектрических свойств, ввиду чего существенную значимость приобретает создание новых мето-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №16-01-00354а) и Минобрнауки РФ (проект № 9.4726.2017/8.9).

дик их идентификации с целью сравнения характеристик изготовленных материалов с расчетными характеристиками. Пьезоэлектрический элемент цилиндрической формы является одним из наиболее распространенных пьезоэлементов и широко используется в акустическом оборудовании [2]. При моделировании пьезокерамических цилиндров зачастую прибегают к использованию однородных моделей [3], в таких случаях методики определения характеристик-констант достаточно хорошо развиты [4].

Однако при изучении ФГП гипотезы однородности неприменимы, и требуется разработка моделей, учитывающих зависимость характеристик материала от координат. Исследованию ФГП посвящено достаточно большое количество работ. Например, в статье [5] проведен анализ свободных колебаний и динамического отклика на импульсную нагрузку цилиндрических панелей из ФГП. На основе принципа Гамильтона выведены уравнения колебаний цилиндрических панелей из ФГП и для описания электрического поля использовано одно из уравнений Максвелла. На основе прямого и обратного преобразования Лапласа по времени удается построить аналитический подход к расчету форм колебаний панелей и провести анализ влияния неоднородностей на них. В [6] разработана аналитическая методика расчета влияния величины электрического потенциала, прикладываемого к полуму цилиндру из ФГП, свойства которого меняются по толщине по экспоненциальному закону, на механический отклик. Показано, что в зависимости от вида неоднородности материала и величины нагрузок пластические зоны могут возникать на внешней, внутренней поверхностях цилиндра, а также и на обеих поверхностях одновременно.

Решение обратных задач идентификации характеристик ФГП является весьма актуальной и при этом слабоизученной областью науки. Статьи [7–9] посвящены идентификации характеристик неоднородных стержней и прямоугольных областей. В них на основе анализа акустического отклика в некоторых точках объекта при возбуждении колебаний механической нагрузкой и разностью потенциалов удается определять механические и электрические характеристики рассматриваемых объектов. В статьях [9, 10] учтен возможный эффект затухания в исследуемых пьезополимерах на основе теории комплексных модулей.

Представленные в публикациях [7–12] подходы на основе метода линеаризации и регуляризационных процедур [13–16] достаточно хорошо себя зарекомендовали, однако при их использовании достаточно трудоемким этапом является получение соответствующих операторных соотношений. Процедура идентификации в представленных подходах требует проведения большого количества итераций, связанных с ресурсоемкими вычислительными расчетами [17]. В связи с этим интерес представляет разработка методик, позволяющих определять характеристики ФГП, используя доступные в практической реализации схемы.

В настоящей статье представлена методика решения обратной задачи идентификации характеристик функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра с неоднородной поляризацией в радиальном направлении на основе анализа установившихся колебаний, вызванных механической нагрузкой. При этом модули упругости для неполяризованной керамики считаются известными и требуется определить законы изменения пьезоэлектрических характеристик как функции радиальной координаты. На практике изменение этих характеристик чаще всего является монотонным и наибольший интерес представляет задача определения уровня

поляризации и характера ее монотонности (возрастание, убывание). Для решения обратной задачи разработан подход, основанный на разложении функции смещения и искомых функций-характеристик по системам линейно независимых функций. В результате пьезоэлектрические характеристики удастся восстанавливать в классе линейных функций. Представлен набор вычислительных экспериментов по идентификации для различных законов изменения искомых функций.

1. Постановка задачи

Аналогично постановке, приведенной в [10], рассмотрим установившиеся осесимметричные радиальные колебания бесконечного сплошного кругового неоднородного пьезокерамического цилиндра радиусом a с радиальной поляризацией (в направлении r). Поверхность цилиндра неэлектропроводна, к ней приложена нормальная механическая нагрузка p . Колебания возбуждаются нормальной механической нагрузкой, приложенной к боковой поверхности цилиндра [18]. Уравнения движения, определяющие соотношения и граничные условия имеют вид [1]:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho\omega^2 u_r = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{1}{r}D_r = 0, \quad (2)$$

$$D_r(a) = 0, \quad \sigma_r(a) = p, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = C_{33} \frac{du_r}{dr} + C_{13} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = C_{13} \frac{du_r}{dr} + C_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (4)$$

$$D_r = -\varepsilon_{33} \frac{d\varphi}{dr} + e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{du_r}{dr}. \quad (5)$$

В соотношениях (1)–(5) введены следующие обозначения: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ – компоненты тензора напряжений; u_r – радиальная компонента вектора смещения; D_r – радиальная компонента вектора электрической индукции; ω – частота колебаний; φ – потенциал электрического поля; C_{11} , C_{13} , C_{33} – модули упругости для неполяризованной керамики; e_{31} , e_{33} – пьезоэлектрические характеристики; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость.

Отметим, что величины C_{11} , C_{13} , C_{33} и e_{31} , e_{33} являются функциями радиальной координаты и, в частности, могут быть кусочно-постоянными или непрерывными, что характерно для слоистой и функционально-градиентной структур материала соответственно.

Используя граничное условие (3), при интегрировании уравнения (2) получим, что $D_r = 0$. Используя это соотношение, возможно исключить электрический потенциал из соотношений для компонент напряжений (4). Введем обозначения:

$$C_{11}^* = C_{11} + E_1^2, \quad C_{13}^* = C_{13} + E_1 E_2, \quad C_{33}^* = C_{33} + E_2^2, \quad (6)$$

где

$$E_1^2 = \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}}, \quad E_2^2 = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}},$$

тогда

$$\frac{e_{31}e_{33}}{\varepsilon_{33}} = E_1E_2.$$

С учетом (6) выражения для компонент тензора напряжений примут вид:

$$\sigma_{rr} = C_{33}^* \frac{du_r}{dr} + C_{13}^* \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = C_{13}^* \frac{du_r}{dr} + C_{11}^* \frac{u_r}{r}. \quad (7)$$

Таким образом, исходное уравнение (1) и граничное условие (2) можно записать относительно u_r :

$$\frac{d}{dr} \left(C_{33}^* \frac{du_r}{dr} \right) + \frac{d}{dr} \left(C_{13}^* \frac{u_r}{r} \right) + \frac{1}{r} (C_{33}^* - C_{13}^*) \frac{du_r}{dr} + \frac{1}{r^2} (C_{13}^* - C_{11}^* + \rho\omega^2 r^2) u_r = 0, \quad (8)$$

$$\left(C_{33}^* \frac{du_r}{dr} + C_{13}^* \frac{u_r}{r} \right) \Big|_{r=a} = p. \quad (9)$$

Для удобства дальнейшей вычислительной реализации введем безразмерные параметры и характеристики: $\xi = r/a$, $\kappa^2 = \rho\omega^2 a^2 / C_{33}(a)$, $U = u_r/a$, $B_1(\xi) = C_{11}^*(\xi) / C_{33}(a)$, $B_2(\xi) = C_{13}^*(\xi) / C_{33}(a)$, $B_3(\xi) = C_{33}^*(\xi) / C_{33}(a)$. В итоге получим постановку задачи (8), (9) в безразмерной форме:

$$\frac{d}{d\xi} \left(B_3 \frac{dU}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} \left(B_2 \frac{U}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} (B_3 - B_2) \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} (B_2 - B_1 + \kappa^2 \xi^2) U = 0, \quad (10)$$

$$\left(B_3 \frac{dU}{d\xi} + B_2 \frac{U}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} = 1. \quad (11)$$

В связи с тем, что характеристики, входящие в постановку (10), (11), являются переменными, решение прямой задачи определения функции смещения по известным механическим и пьезоэлектрическим характеристикам можно осуществить лишь численно, и для построения ограниченного решения необходимо дополнительно использовать граничное условие в нуле:

$$U(0, \kappa) = 0. \quad (12)$$

В общем случае при постановке обратной задачи неизвестными считаются все три функции жесточенных модулей $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ и $B_3(\xi)$, однако одновременно определить их из одного эксперимента не представляется возможным. В статьях [7–9] были рассмотрены задачи одновременного определения двух механических и пьезоэлектрических характеристик для стержней и двумерных областей из двух экспериментов – при механическом и электрическом нагружении. В данном случае будем считать, что модули упругости C_{11} , C_{13} , C_{33} для неполяризованной керамики и диэлектрическая проницаемость ε_{33} являются известными функциями и требуется определить функции пьезоэлектрических характеристик e_{31} , e_{33} . Представим выражения для безразмерных функций, характеризующих жесточенные модули, в виде: $B_1(\xi) = G_{11}(\xi) + H_1^2(\xi)$, $B_2(\xi) = G_{13}(\xi) + H_1(\xi)H_2(\xi)$, $B_3(\xi) = G_{33}(\xi) + H_2^2(\xi)$, где $G_{11}(\xi) = C_{11}(\xi) / C_{33}(a)$, $G_{13}(\xi) = C_{13}(\xi) / C_{33}(a)$ и $G_{33}(\xi) = C_{33}(\xi) / C_{33}(a)$ – известные функции, характеризующие механические свойства неполяризованной керамики, $H_1^2(\xi) = E_1^2(\xi) / C_{33}(a)$ и $H_2^2(\xi) = E_2^2(\xi) / C_{33}(a)$ – неизвестные функции, характеризующие пьезоэлектрические свойства при наличии неоднородной поляризации. В результате запишем постановку (10), (11) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left((G_{33} + H_2^2) \frac{dU}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} \left((G_{13} + H_1 H_2) \frac{U}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} (1 - G_{13} + H_2^2 - H_1 H_2) \frac{dU}{d\xi} + \\ + \frac{1}{\xi^2} (G_{13} - G_{11} + H_1 H_2 - H_1^2 + \kappa^2 \xi^2) U = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$U(0, \kappa) = 0, \quad (14)$$

$$\left. \left((G_{33} + H_2^2) \frac{dU}{d\xi} + (G_{13} + H_1 H_2) \frac{U}{\xi} \right) \right|_{\xi=1} = 1. \quad (15)$$

Обратная задача. При известных функциях $G_{11}(\xi)$, $G_{13}(\xi)$ и $G_{33}(\xi)$ определить функции $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$ и $U(\xi, \kappa)$, удовлетворяющие (13)–(15), по дополнительной информации о значениях функции смещения на поверхности цилиндра в заданном диапазоне частот:

$$U(1, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (16)$$

Сформулированная обратная задача является существенно нелинейной, для решения подобных задач ранее использовались специально разработанные подходы [7–9] на основе линеаризации и регуляризационных методов. В данном случае необходимо определить две функции пьезоэлектрических характеристик из одного эксперимента при механическом нагружении. Для реализации решения обратной задачи (13)–(16) разработана специальная методика, позволяющая произвести регуляризацию за счет сужения множества неизвестных характеристик до некоторых заданных классов функций.

В приведенном исследовании при построении методики решения обратной задачи применен метод Галеркина [19].

2. Методика решения обратной задачи

Для построения проекционной методики (метода алгебраизации) решения обратной задачи (13)–(16) сформулируем ее слабую постановку [20]. Для этого в полярной системе координат скалярно умножим уравнение (13) на произвольную непрерывно-дифференцируемую функцию V , удовлетворяющую условию (14). После преобразований с использованием формулы интегрирования по частям и граничных условий получается следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\left((1 + H_2^2) \xi \frac{dU}{d\xi} + (G_{13} + H_1 H_2) U \right) \frac{dV}{d\xi} + \right. \\ \left. + \left((G_{13} + H_1 H_2) \frac{dU}{d\xi} + (G_{11} + H_1^2) \frac{U}{\xi} - \kappa^2 \xi U \right) V \right] d\xi = V(1). \end{aligned} \quad (17)$$

Введем в рассмотрение две линейно независимые системы функций φ_n и ψ_m , причем функции φ_n удовлетворяют условию (14). Решение сформулированной обратной задачи (12)–(16) будем искать в виде:

$$U(\xi, \kappa) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad H_1(\xi) = \sum_{j=1}^M C_j^{(1)} \psi_j, \quad H_2(\xi) = \sum_{j=1}^M C_j^{(2)} \psi_j, \quad (18)$$

где $C_j^{(1)}$ и $C_j^{(2)}$ – произвольные постоянные, а коэффициенты a_i зависят от частоты колебаний κ .

При подстановке разложения (18) в соотношение (17), пользуясь линейностью его левой части по переменным U и V и выбирая в качестве функции $V = \varphi_n$, $n = \overline{1, N}$, получим систему N линейных относительно коэффициентов $a_i(\kappa)$ уравнений, общий вид которой выглядит так:

$$\sum_{i=1}^N a_i A_{in}(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}; \kappa) = \varphi_n(1), \quad n = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (19)$$

$A_{in}(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}; \kappa)$ – квадратичные формы относительно коэффициентов $C_j^{(1)}, C_j^{(2)}$.

Затем полученная линейная система (19) решается относительно коэффициентов $a_i(\kappa)$. После их нахождения и подстановки в разложение (18) получается выражение для $U(\xi, \kappa, C_j^{(1)}, C_j^{(2)})$, зависящее от частоты κ и наборов коэффициентов $C_j^{(1)}, C_j^{(2)}$, $j = \overline{1, M}$, которое затем подставляется в дополнительное условие (16) обратной задачи. Выбирая набор значений параметров κ_m ($m = \overline{1, 2M}$), из условия (16) получаем систему из $2M$ нелинейных уравнений порядка $4M$ относительно набора из $2M$ коэффициентов

$$U(1, \kappa, C_j^{(1)}, C_j^{(2)}) = f(\kappa_m), \quad j = \overline{1, M}, \quad m = \overline{1, 2M}. \quad (20)$$

По найденным из системы (20) коэффициентам $C_j^{(1)}, C_j^{(2)}$ определяются искомые безразмерные функции $H_1(\xi)$ и $H_2(\xi)$, характеризующие пьезоэлектрические свойства.

3. Вычислительные эксперименты

Далее представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению пьезоэлектрических характеристик на основе предложенной методики. Как было отмечено ранее, в экспериментах рассматривались монотонные функции и основной целью решения обратной задачи являлось определение уровня неоднородной поляризации по толщине цилиндра и определение характера ее монотонности (возрастание, убывание).

При реализации описанного проекционного метода в качестве функций φ_n в разложении (18) выбирались функции $\varphi_n(\xi) = \xi^n$, $n = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условию (14). Параметр N выбирался равным 2. В таком случае достигалась достаточная точность решения прямой задачи, при этом не усложнялась чрезмерно задача решения получаемых систем нелинейных уравнений.

Отметим, что при одновременном восстановлении функций $H_1(\xi)$ и $H_2(\xi)$ даже в классе линейных или кусочно-постоянных функций (при $M = 2$) необходимо решать систему нелинейных уравнений (20) порядка $4M = 8$, что является существенно трудоемкой задачей. В связи с этим было принято решение модифицировать предложенный подход в двухступенчатую процедуру:

1) на первом шаге восстанавливалась функция $H_1(\xi)$ в виде $H_1(\xi) = C_1^{(1)}\psi_1(\xi) + C_2^{(1)}\psi_2(\xi)$, а функция $H_2(\xi)$ – в классе констант: $H_2(\xi) = C_1^{(2)}$;

2) на втором шаге восстанавливалась функция $H_1(\xi)$ в классе констант: $H_1(\xi) = C_1^{(1)}$, а функция $H_2(\xi)$ – в виде $H_2(\xi) = C_1^{(2)}\psi_1(\xi) + C_2^{(2)}\psi_2(\xi)$.

Здесь введены обозначения

$$\psi_1(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq 0,5, \\ 0, & \xi > 0,5, \end{cases} \quad \psi_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq 0,5, \\ 1, & \xi > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок рассматриваемых нелинейных систем удастся снизить до $3M = 6$ и упростить вычислительный процесс. Получаемые в результате идентификации выражения в виде кусочно-постоянных функций с помощью интерполяции преобразовывались к виду линейных функций, которые и являлись решением обратной задачи.

Далее представлены примеры использования описанного модифицированного подхода. Частотный диапазон во всех экспериментах выбирался до первой резонансной частоты $[\kappa_1, \kappa_2] = [0, 3]$. Отметим, что его выбор не оказывал существенного влияния на процедуру реконструкции.

Пример 1. Восстановление возрастающих линейных функций $H_1(\xi) = 0,4(1 + 0,5\xi)$ и $H_2(\xi) = 1 + 0,25\xi$. На рис. 1 представлены графики точных решений (сплошные линии) и восстановленных функций (точки). Относительная погрешность восстановления для H_1 не превосходит 2,5%, для H_2 – 10%.

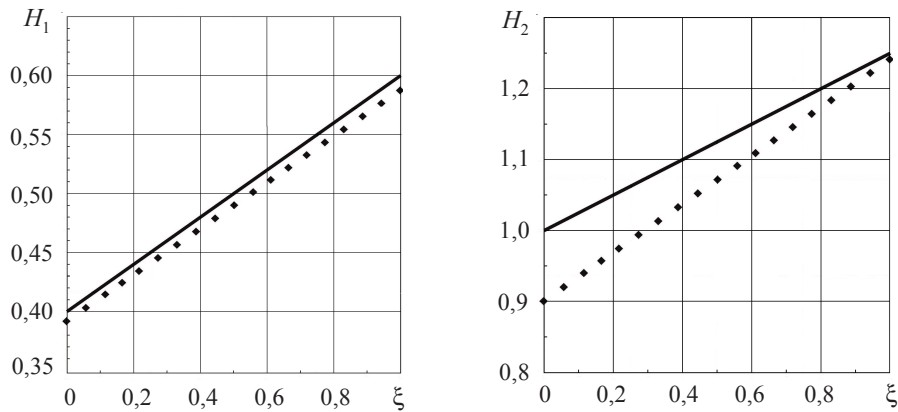


Рис. 1. Результат восстановления линейных возрастающих функций

Пример 2. Восстановление монотонно возрастающих квадратичных функций $H_1(\xi) = 0,3(1 + 0,5\xi^2)$ и $H_2(\xi) = 1,3(1 + 0,25\xi^2)$. На рис. 2 представлены графики точных решений (сплошные линии) и восстановленных функций (точки).

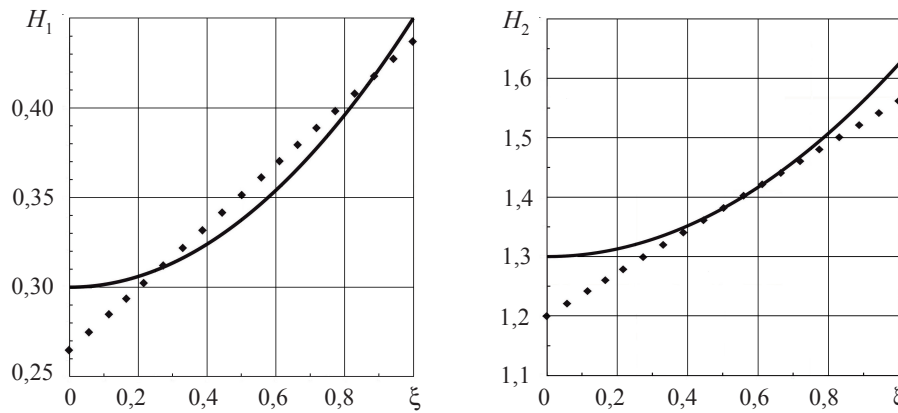


Рис. 2. Результат восстановления квадратичных возрастающих функций

Относительная погрешность восстановления для H_1 не превосходит 12%, для H_2 – 8%.

Пример 3. Восстановление монотонно убывающих квадратичных функций $H_1(\xi) = 0,5(1 - 0,5\xi^2)$ и $H_2(\xi) = 1,5(1 - 0,25\xi^2)$. На рис. 3 представлены графики точных решений (сплошные линии) и восстановленных функций (точки). Относительная погрешность восстановления для H_1 не превосходит 11,5%, для H_2 – 8%.

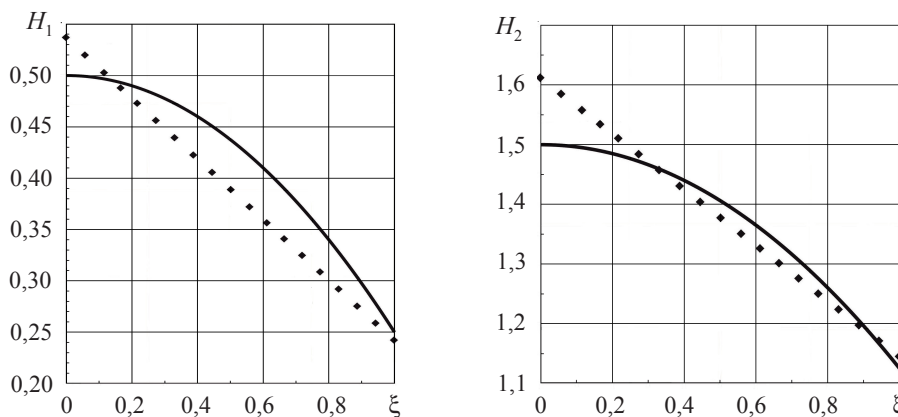


Рис. 3. Результат восстановления квадратичных убывающих функций

Заключение

Полученные в процессе проведения вычислительных экспериментов результаты показывают, что разработанный подход достаточно эффективен для определения уровня и характера монотонности пьезоэлектрических характеристик цилиндрических конструкций, изготовленных из функционально-градиентных пьезокомпозитивов, при неоднородной поляризации.

Список литературы

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 472 с.
2. *Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer Applications*. Eds. A. Safari, E.K. Akdogan. New York: Springer, 2008. 481 p.
3. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. 176 с.
4. Акопян В.А., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н. *Методы и алгоритм определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. 144 с.
5. Bodaghi M., Shakeri M. An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads. *Composite Structures*. 2012. Vol. 95 (5). P. 1721–1735.
6. Ataia A.A., Lak D. Analytic solution of effect of electric field on elasto-plastic response of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2017. Vol. 155. P. 1–14.
7. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. P. 506–510.
8. Ватульян А.О., Дударев В.В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5. №3. С. 259–264.

9. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. Идентификация характеристик функционально-градиентного пьезополимерного стержня. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2016. Т. 22. №2. С. 201–212.
10. Ватульян А.О., Кондратьев В.С. Колебания неоднородного пьезокерамического цилиндра при наличии затухания. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №4. С. 406–414.
11. Ватульян А.О., Домброва О.М., Жиров В.Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней. *Прикладная математика и механика*. 2007. №1. С. 93–101.
12. Ватульян А.О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
13. Денисов А.М. *Введение в теорию обратных задач*. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
14. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1989. 128 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979. 288 с.
16. Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. *Обратные и некорректные задачи*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2011. 232 с.
17. Бахвалов Н.С. *Численные методы*. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 632 с.
18. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем*. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
19. Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галеркина*. М.: Мир, 1988. 352 с.
20. Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Изд-во МГУ, 1970. 512 с.

References

1. Parton V.Z., Kudriavtsev V.A. *Elektromagnitoupругost pyzoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [*Electromagnetoelastic of Piezoelectric and Electroconductive Bodies*], М.: Nauka Publ. 1988. 472 p. (In Russian).
2. *Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer Applications*. Eds. A. Safari, E.K. Akdogan. New York. Springer. 2008. 481 p.
3. Vatulyan A.O., Solov'ev A.N. *Priamyie i obratnye zadachi dlia odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektrouprugikh tel* [*Direct and Inverse Problems for Homogeneous and Inhomogeneous Elastic and Electroelastic Bodies*]. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2008. 176 p. (In Russian).
4. Akop'yan V.A., Solov'ev A.N., Shevtsov S.N. *Metody i algoritm opredeleniya polnogo nabora sovместimykh material'nykh konstant p'yezokeramicheskikh materialov* [*Methods and Algorithm for Determining the Complete Set of Compatible Material Constants of Piezoceramic Materials*]. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2009. 144 p. (In Russian).
5. Bodaghi M., Shakeri M. An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads. *Composite Structures*. 2012. Vol. 95 (5). P. 1721–1735.
6. Ataia A.A., Lak D. Analytic solution of effect of electric field on elasto-plastic response of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2017. Vol. 155. P. 1–14.
7. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. P. 506–510.
8. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. On reconstruction of inhomogeneous properties of piezoelectric solids. *Computational Continuum Mechanics*. 2012. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.30.
9. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Identifikatsiya kharakteristik funktsional'no-gradientnogo pyezopolimernogo sterzhnya [Identification of inhomogeneous characteristics of functionally graded piezopolymeric rod]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [*Journal of Composite Mechanics and Design*]. 2016. Vol. 22. No 2. P. 201–212 (In Russian).
10. Vatulyan A.O., Kondratev V.S. Kolebaniya neodnorodnogo p'yezokeramicheskogo tsilindra pri nalichii zatukhaniya [Vibrations of an inhomogeneous piezoceramic cylinder in the presence of

damping]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2016. Vol. 78. No 4. P. 406–414 (In Russian).

11. Vatulyan A.O., Dombrova O.M., Zhirov V.E. Obratnye zadachi dlya neodnorodno polarizovannykh piezoelektricheskikh sterzhnej [Inverse problems for inhomogeneously polarized piezoelectric rods]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 2007. No 1. P. 93–101 (In Russian).

12. Vatulyan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruемого tverdogo tela* [*Inverse Problems in Mechanics of Solids*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2007. 223 p. (In Russian).

13. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [*Introduction to the Theory of Inverse Problems*]. Moscow. MGU Publ. 1994. 207 p. (In Russian).

14. Bakushinskij A.B., Goncharskij A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Iterative Methods for Solving Ill-posed Problems*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 128 p. (In Russian).

15. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Methods for Solving Ill-posed Problems*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 288 p. (In Russian).

16. Vatulyan A.O., Belyak O.A., Sukhov D.Yu., Yavruyan O.V. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [*Inverse and Incorrect Problems*]. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2011. 232 p. (In Russian).

17. Bahvalov N.S. *Chislennye metody* [*Numerical Methods*]. Moscow. Laboratoriya bazovykh znaniy Publ. 2002. 632 p. (In Russian).

18. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [*Oscillations of Deformable Systems*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1970. 736 p. (In Russian).

19. Fletcher C.A. *Computational Galerkin Methods*. New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo. Springer-Verlag. 1984. 462 p.

20. Mihlin S.G. *Variacionnye metody v matematicheskoy fizike* [*Variational Methods in Mathematical Physics*]. Moscow. MGU Publ. 1970. 512 p. (In Russian).

IDENTIFICATION OF INHOMOGENEOUS CHARACTERISTICS OF FUNCTIONALLY GRADED PIEZO-POLYMERIC ROD

Bogachev I.V.¹, Vatulyan A.O.^{1,2}

¹*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

²*Vladikavkaz Scientific Center of the RAS, Vladikavkaz, Russian Federation*

The inverse problem of determining the piezoelectric characteristics of a functional gradient piezoceramic cylinder based on acoustic analysis of steady-state oscillations caused by a mechanical load is considered. The problem consisted in identification of unknown functions of the piezoelectric characteristics with nonuniform polarization of the cylinder in the case when the elastic moduli of unpolarized ceramics are known. As additional information, the values of the displacement function at some point of the surface of the cylinder in a given frequency range were used. To solve the inverse problem, a special approach based on projection schemes and the method of algebraization is proposed. This approach makes it possible to determine the unknown function-characteristics in the form of expansions with respect to systems of independent functions. The required coefficients of the expansions were determined from the corresponding systems of linear and nonlinear equations obtained using the weak formulation of the problem. The results of solving the inverse problem are illustrated by computational experiments.

Keywords: electroelasticity, piezoceramics, functionally graded piezoelectric material, inhomogeneous cylinder, inverse problems, method of algebraization.