

УДК 539.374

ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

© 2018 г. **Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю.**

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

tm@mospolytech.ru

Поступила в редакцию 22.12.2017

Рассматриваются варианты теорий пластичности, применяемые в настоящее время в практических расчетах, – модели Коротких, Бондаря и Шабоша. Проводится анализ влияния различных типов микронапряжений на поведение петли упругопластического гистерезиса при одноосном мягком несимметричном циклическом нагружении, состоящем из нескольких этапов. Показано, что для подробного моделирования процессов вышагивания (ratcheting) петли, возникающих при таких нагружениях, необходимо использовать все три типа микронапряжений. Сделанный вывод подтвержден результатами экспериментальных исследований образцов из нержавеющей стали SS304 и 12X18Н10Т при мягких режимах нагружения, в ходе которых наблюдались процессы вышагивания как в прямом, так и в обратном направлении. Показано, что модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно – Ванга (третий тип) наиболее адекватно описывает процессы вышагивания петли упругопластического гистерезиса, в том числе и в обратном направлении.

Ключевые слова: пластичность, циклическое нагружение, микронапряжения, вышагивание петли.

Введение

Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях строится в основном на вариантах теорий пластичности, относящихся к классу теорий пластического течения при комбинированном (трансляционно-изотропном) упрочнении, обзор и анализ которых содержится в публикациях [1–12]. Главное отличие этих вариантов теорий заключается в различных формулировках эволюционных уравнений для смещения центра поверхности нагружения (тензора микронапряжений [1]). В настоящее время в практических расчетах наибольшее применение нашли варианты теорий пластичности – модели Коротких [7, 8], Бондаря [3–5] и Шабоша [9–11]. Все эти модели прошли достаточную верификацию [3, 6, 7, 13–16] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

В настоящей статье рассматриваются интенсивно изучаемые в последнее время процессы нагружения, включающие в себя последовательности циклических и монотонных нагружений, а также явление вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса. Рассматриваются три типа микронапряжений, из которых по

принципу суперпозиции Новожилова – Шабоша [1, 10] строятся эволюционные уравнения микронапряжений в моделях Коротких, Бондаря и Шабоша. Проводится анализ влияния различных типов микронапряжений на среднюю деформацию цикла при несимметричном мягком (контролируемом по напряжению) нагружении. Рассматривается три типа микронапряжений. Первый тип описывается уравнением Ишлинского – Прагера [12, 17], второй – уравнением Армстронга – Фредерика – Кадашевича [18, 19], третий соответствует простейшему аналогу [5] уравнений Оно – Ванга [20].

Анализ вариантов теорий при нестационарном несимметричном мягком циклическом нагружении проводится на результатах экспериментальных исследований образцов из нержавеющей стали SS304 [21] и 12X18H10T. Нагружение образцов стали SS304 проводится в условиях мягкого блочного циклического нагружения. На всех блоках нагружения наблюдается вышагивание (ratcheting) петли пластического гистерезиса.

Экспериментальные исследования образцов из нержавеющей стали 12X18H10T проводятся в условиях одноосного растяжения-сжатия при нормальной температуре и в условиях мягкого циклического нагружения. Следует отметить, что на всех блоках, кроме первого, наблюдается вышагивание (ratcheting) петли пластического гистерезиса как в сторону растяжения, так и сжатия.

Для разных вариантов теорий пластичности осуществляются расчеты кинетики напряженно-деформированного состояния для двух программ испытаний. Проводится сопоставление расчетных и экспериментальных данных.

1. Основные положения и уравнения вариантов теорий

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются малые деформации поликристаллических конструкционных сталей и сплавов. В процессе упруго-пластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Ниже приводятся основные уравнения рассматриваемых теорий пластического течения при комбинированном упрочнении [4, 7, 10]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})] \quad \left(\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} \right), \quad (2)$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - [C_p(\varepsilon_{u^*}^p)]^2 = 0, \quad (3)$$

$$s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \quad \sigma_u^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{1/2}, \quad \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (4)$$

$$\sigma_u^* < C_p(\varepsilon_{u^*}^p) \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0 - \text{упругость}, \quad (5)$$

$$\sigma_u^* = C_p(\varepsilon_{u^*}^p) \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0 - \text{упругопластичность},$$

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}. \quad (6)$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – тензоры скоростей полной, упругой и пластической деформаций; σ_{ij} , s_{ij} , s_{ij}^* , a_{ij} – тензор напряжений, девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений [1]; ε_{u*}^p – накопленная пластическая деформация; E , ν – модуль Юнга, коэффициент Пуассона; $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, $a_{ij}^{(m)}$ ($m = 3, \dots, M$) – микронапряжения первого, второго и третьего типов [4]. Тензор a_{ij} характеризует смещение центра поверхности нагружения (анизотропное упрочнение), а скаляр $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ соответствует размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение.

Различные варианты теорий отличаются количеством и видом эволюционных уравнений для микронапряжений.

В модели Коротких используется только одно эволюционное уравнение, аналогичное уравнению Армстронга – Фредерика – Кадашевича [18, 19] (микронапряжения второго типа):

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (7)$$

Здесь g и g_a – определяющие функции, выражающиеся через материальные функции:

$$g = \beta \sigma_a, \quad g_a = -\beta. \quad (8)$$

В таком варианте отсутствуют микронапряжения первого и третьего типов. Следует также отметить, что в модели Коротких для радиуса поверхности нагружения предлагается сложное эволюционное уравнение, разделяющее в изотропном упрочнении монотонные и циклические процессы деформирования. Здесь это рассматриваться не будет, так как учет этих процессов никак не отражается на описании особенностей вышагивания (ratcheting) петли пластического гистерезиса.

Итак, рассматриваемый вариант замыкают следующие материальные функции: E , ν – упругие параметры; β , σ_a – модули анизотропного упрочнения; $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ – функция изотропного упрочнения.

В модели Бондаря используются эволюционные уравнения для трех типов микронапряжений. Для первого типа микронапряжений принимается уравнение Ишлинского – Прагера [12, 17]:

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \varepsilon_{ij}^p \quad (9)$$

или

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (10)$$

так как здесь $g^{(1)} = \text{const}$.

В качестве второго эволюционного уравнения для микронапряжений второго типа принимается уравнение Армстронга – Фредерика – Кадашевича [18, 19]:

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (11)$$

Последующие эволюционные уравнения для микронапряжений третьего типа соответствуют простейшему аналогу [5] уравнений Оно – Ванга [20]:

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (m = 3, \dots, M). \quad (12)$$

Обычно достаточно $M = 5$, то есть используются три уравнения типа Оно – Ванга.

Определяющие функции, входящие в уравнения (9)–(12), выражаются через материальные функции следующим образом:

$$g^{(1)} = E_a, \quad g^{(2)} = \beta \sigma_a, \quad g_a^{(2)} = -\beta, \quad (13)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}, \\ 0, \end{cases} \quad \text{если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \quad (14)$$

$$a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{1/2}, \quad m = 3, \dots, M.$$

Здесь $E_a, \sigma_a, \beta, \sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$ – материальные параметры. Следует отметить, что уравнения (9)–(11) эквивалентны ранее предложенному и достаточно апробированному уравнению с трехчленной структурой [3, 4].

Итак, указанный вариант замыкают следующие материальные функции: E, ν – упругие параметры; $E_a, \beta, \sigma_a, \beta^{(m)}, \sigma_a^{(m)}$ ($m = 3, \dots, M$) – модули анизотропного упрочнения; $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ – функция изотропного упрочнения.

Описание явлений вышагивания при мягком циклическом нагружении в рамках модифицированной модели Бондаря состоит в том, что параметр E_a , входящий в первое эволюционное уравнение для микронапряжений первого типа, принимается зависящим от накопленной пластической деформации:

$$E_a = \frac{E_{a0}}{1 + K_E (\varepsilon_{u*}^p)^{n_E + 1}}. \quad (15)$$

Здесь E_{a0}, K_E, n_E – материальные параметры, дополняющие материальные функции модели Бондаря и замыкающие модифицированную модель Бондаря.

В модели Шабоша используются три эволюционных уравнения типа уравнений Армстронга – Фредерика – Кадашевича [18, 19] (микронапряжения второго типа):

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u*}^p \quad (m = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Здесь определяющие функции выражаются через материальные функции:

$$g^{(m)} = \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}, \quad g_a^{(m)} = -\beta^{(m)} \quad (m = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Если принимать параметр $\beta^{(1)}$ порядка 10^1 , параметр $\beta^{(2)}$ порядка 10^2 , а параметр $\beta^{(3)}$ порядка 10^3 , то каждое эволюционное уравнение будет соответствовать микронапряжениям первого, второго и третьего типов при описании петли упруго-пластического гистерезиса.

Модифицированная модель Шабоша включает в себя дополнительно четвертое эволюционное уравнение [9–11, 14].

Скорость накопленной пластической деформации для всех рассматриваемых моделей определяется для мягкого нагружения следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \frac{1}{E_*} \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^*}{\sigma_u^*}, \quad (18)$$

$$E_* = \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} + \sum_{m=1}^M g^{(m)} + \sum_{m=1}^M g_a^{(m)} a_u^{(m)*},$$

$$a_u^{(m)*} = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}^{(m)}}{2 \sigma_u^*} \quad (m = 1, \dots, M).$$

Для жесткого и смешанных режимов нагружения уравнения для $\dot{\epsilon}_{u*}^p$ приводятся в публикациях [3, 4].

2. Анализ влияния различных типов микронапряжения на смещение петли упругопластического гистерезиса

Для анализа влияния различных типов микронапряжения на процесс вышагивания (ratcheting) петли упругопластического гистерезиса проведен гипотетический расчет изменения средней пластической деформации в цикле при мягком нагружении, состоящем из двух этапов. На первом этапе напряжение изменялось от -20 до 80 МПа, на втором – от -20 до 30 МПа. На каждом этапе реализовано по 50 циклов нагружения. Расчет проведен при различных комбинациях микронапряжений разных типов. Принятые в расчете материальные параметры указаны в таблице 1.

Таблица 1

E_{ao} , МПа	K_E	n_E	$\beta^{(2)}$	$\sigma_a^{(2)}$, МПа	$\beta^{(3)}$	$\sigma_a^{(3)}$, МПа	$\sigma_a^{(2)} + \sigma_a^{(3)}$, МПа
10000	2	-0,2	300	0–100	5000	0–100	100

На рис. 1 приведены зависимости среднего значения пластической деформации от номера цикла для различных вариантов комбинаций микронапряжений. На графиках в скобках указано отношение $\sigma_a^{(2)}/\sigma_a^{(3)}$.

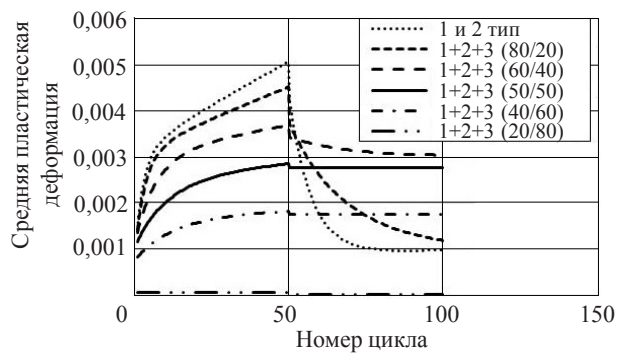
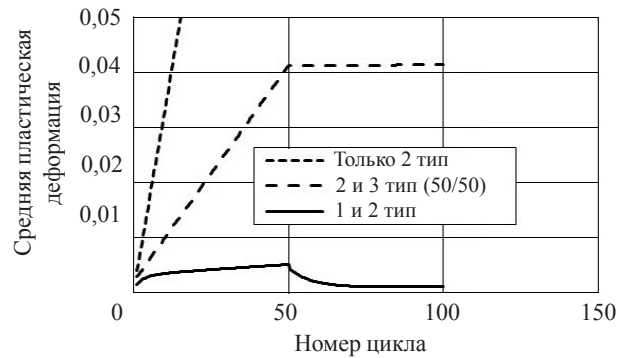


Рис. 1

Из рис. 1а видно, что для адекватного описания процесса смещения петли упругопластического гистерезиса необходимо наличие первого типа микронапряжений в эволюционном уравнении. При моделировании процесса смещения петли только с помощью микронапряжений второго типа наблюдается линейный рост средней пластической деформации от цикла к циклу. На практике такие процессы, как правило, являются затухающими.

На рис. 1б показано, что с помощью микронапряжений третьего типа можно достаточно точно описать процесс вышагивания при переходе от одного блока нагружения к другому. Так, при отсутствии микронапряжений третьего типа наблюдается сильное смещение петли в обратном направлении, а при равном соотношении микронапряжений второго и третьего типа смещение петли в обратном направлении отсутствует.

3. Моделирование процесса смещения петли упругопластического гистерезиса

С помощью моделей Коротких, Бондаря и Шабоша проводится моделирование экспериментов по циклическому нагружению образцов из нержавеющей стали SS304 [21] при мягком нестационарном несимметричном нагружении. Нагружение состоит из трех блоков (по 50 циклов), на которых реализуются мягкие циклические нагружения с одинаковой амплитудой $\sigma_a = 248$ МПа и разными значениями среднего напряжения σ_m (78, 117 и 78 МПа). Здесь на всех блоках происходит вышагивание (ratcheting) петли пластического гистерезиса.

На рис. 2 приведено изменение средней деформации цикла в процессе мягкого циклического нагружения, состоящего из трех блоков. Экспериментальные результаты показаны светлыми кружками, а кривые с номерами соответствуют расчетам по следующим моделям: 1 – модель Коротких; 2 – модель Бондаря; 3, 4 – модифицированная модель Бондаря с учетом и без учета микронапряжений третьего типа; 5, 6 – модель Шабоша с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений.

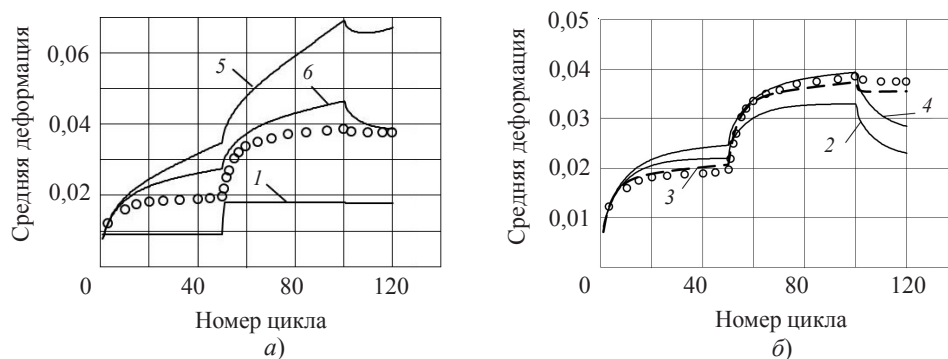


Рис. 2

На основе результатов, представленных на рис. 2, можно сделать следующие выводы:

- модель Коротких не способна описать процесс вышагивания при мягком несимметричном нагружении;
- модель Бондаря удовлетворительно описывает процесс вышагивания на первом блоке, хуже на втором и плохо на третьем;

– модифицированная модель Бондаря без учета микронапряжений третьего типа удовлетворительно описывает процесс вышагивания на втором блоке, хуже на первом и плохо на третьем;

– модели Шабоса с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений количественно плохо описывают процессы вышагивания на всех блоках при лучшем соответствии эксперименту модели с четырьмя уравнениями, где первые два эволюционных уравнения при малых β ($\beta^{(1)} = 0,5$, $\beta^{(2)} = 5$) предназначены для более точного описания процесса вышагивания;

– модифицированная модель Бондаря, учитывающая микронапряжения третьего типа, достаточно надежно описывает процессы вышагивания на всех трех блоках нагружения.

Таким образом, модифицированная модель Бондаря, учитывающая микронапряжения третьего типа, может адекватно описывать процессы нестационарного несимметричного мягкого циклического нагружения, состоящего из блоков с возрастающей и убывающей асимметрией циклов.

Для дополнительного обоснования этого утверждения рассматриваются экспериментальные исследования образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т в условиях мягкого одноосного растяжения-сжатия при нормальной температуре. Программа испытаний состоит из пяти блоков. Первый и пятый блоки представляют собой симметричные циклические нагружения с одинаковыми размахами напряжений $\Delta\sigma = 600$ МПа (средние напряжения $\sigma_m = 0$). На втором, третьем, четвертом блоках реализуются несимметричные циклические нагружения с размахами напряжений $\Delta\sigma$, равными 650, 700, 650 МПа, и средними напряжениями σ_m , равными 25, 50, 25 МПа соответственно. На всех блоках осуществляется по 20 циклов нагружения. Следует отметить, что на всех блоках, кроме первого, наблюдается вышагивание (ratcheting) петли пластического гистерезиса в сторону увеличения и уменьшения средней деформации цикла.

На рис. 3 приведены результаты расчета и эксперимента изменения средней деформации цикла в процессе мягкого циклического нагружения, состоящего из пяти блоков. Экспериментальные результаты показаны светлыми кружками, а результаты расчетов на основе модифицированной модели Бондаря с учетом и без учета микронапряжений третьего типа – сплошными кривыми с номерами 3 и 4. Здесь также приведены результаты расчета на основе модели Шабоса с четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений – кривая 6.

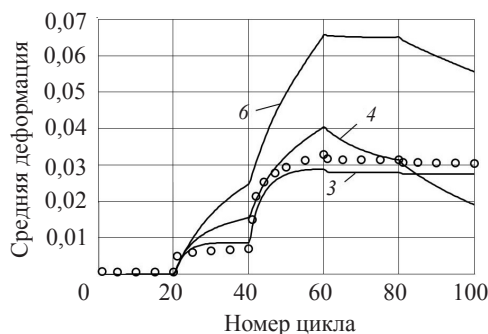


Рис. 3

Приведенные результаты исследований показывают достаточную адекватность модифицированной модели Бондаря (с микронапряжениями третьего типа) для опи-

сания кинетики деформированного состояния в условиях нестационарных несимметричных мягких циклических процессов нагружения.

Заключение

Проведен анализ влияния различных типов микронапряжений на процессы вышагивания (ratcheting) петли упругопластического гистерезиса при мягких циклических режимах нагружения, состоящих из нескольких этапов. Показано, что для подробного моделирования процесса смещения петли необходимо использовать эволюционные уравнения трех типов.

На основании результатов экспериментальных исследований образцов из нержавеющей стали SS304 и 12X18H10T при мягком (контролируемые напряжения) циклическом нагружении проведен сравнительный анализ наиболее применяемых в настоящее время в практических расчетах вариантов теорий пластичности – моделей Коротких, Бондаря и Шабоша.

Показано, что модифицированная модель Бондаря, включающая микронапряжения третьего типа (Оно – Ванга), наиболее адекватно по сравнению с другими моделями описывает кинетику напряженно-деформированного состояния в условиях нестационарных несимметричных циклических процессов нагружения и может быть рекомендована для практических расчетов кинетики напряженно-деформированного состояния конструкций в условиях произвольного воздействия нагрузок.

Список литературы

1. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. *Микронапряжения в конструкционных материалах*. Л.: Машиностроение. Ленинградское отделение, 1990. 221 с.
2. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1981. №5. С. 99–110.
3. Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. М.: Физматлит, 2008. 176 с.
4. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
5. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2014. №2. С. 125–152.
6. Абашев Д.Р., Горохов В.Б., Крохин И.А. Моделирование процессов симметризации петли упругопластического гистерезиса при циклических нагружениях. *Космонавтика и ракетостроение*. 2015. №82. С. 5–11.
7. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций*. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1994. 225 с.
8. Коротких Ю.Г., Угодчиков А.Г. *Уравнения теории термовязкопластичности с комбинированным упрочнением*. М.: Наука, 1981. 180 с.
9. Chaboche J.-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. Iss. 3. P. 247–302.
10. Chaboche J.-L., Lemaitre J. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990. 556 p.
11. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. *Non-linear Mechanics of Materials*. Dordrecht–Heidelberg–London–New York: Springer, 2010. 433 p.
12. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Украинский математический журнал*. 1954. Т. 6. №3. С. 314–325.

13. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Пластичность материалов при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017. №3. С. 53–74.
14. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*. 2002. Vol. 18. P. 873–894.
15. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*. Vol. 22. No 5. P. 858–894.
16. Chaboche J.-L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics. A/Solids*. 1994. Vol. 13. No 4. P. 501–518.
17. Prager W. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1955. Vol. 169. No 1. P. 41–57.
18. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Internal Research Report in Materials at High Temperatures*. 1966. Vol. 24. No 1. P. 1–26. DOI: 10.3184/096034007X207589.
19. Кадашевич Ю.И. О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности. *Исследования по упругости и пластичности*. 1967. №6. С. 39–45.
20. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery. Part I: Formulation and basic features for ratchetting behaviour. *International Journal of Plasticity*. 1993. Vol. 9. No 3. P. 375–390.
21. Kang G.Z., Gao Q., Cai L.X., Yang X.J., Sun Y.F. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures. *Nuclear Engineering and Design*. 2002. Vol. 216. P. 13–26.

References

1. Novozhilov V.V., Kadashevich Yu.I. *Mikronapryazheniya v konstruktsionnykh materialakh* [*Microstresses in Structural Materials*]. Leningrad. Mashinostroenie Publ. 1990. 221 p. (In Russian).
2. Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V. Teoriya plastichnosti i polzuchesti metallov, uchityvayushchaya mikronapryazheniya [Theory of plasticity and creep of metals, taking into account microstresses]. *Mechanics of Solids*. 1981. Vol. 5. P. 99–110 (In Russian).
3. Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost. Proportionalnye i neproportionalnye nagruzheniya* [*Plasticity. Proportional and Non-proportional Loading*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 176 p. (In Russian).
4. Bondar V.S. *Neuprugost. Varianty teorii* [*Inelasticity. Variants of the Theory*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 144 p. (In Russian).
5. Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniya i nakopleniya povrezhdeniy pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Mathematical modeling of deformation and damage accumulation under cyclic loading]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [*PNRPU Mechanics Bulletin*]. 2014. No 2. P. 125–152 (In Russian).
6. Abashev D.R., Gorokhov V.B., Krokhnin I.A. Modelirovanie protsessov simmetrizatsii petli uprugoplasticheskogo gisterezisa pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [Modeling of symmetrization of the elastic-plastic hysteresis loops under cyclic loadings]. *Kosmonavtika i raketostroenie* [*Cosmonautics and Rocket Engineering*]. 2015. No 82. P. 5–11 (In Russian).
7. Kazakov D.A., Kapustin S.A., Korotkikh Yu.G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya materialov i konstruktsiy* [*Modeling of Deformation and Fracture Processes of Materials and Structures*]. N.Novgorod. NNGU Publ. 1994. 225 p. (In Russian).
8. Korotkikh Yu.G., Ugodchikov A.G. *Uraveniya teorii termov'yazkoplastichnosti s kombinirovannym uprochneniem* [*Equations of the Theory of Thermoviscoplasticity with Combined Hardening*]. Moscow. Nauka Publ. 1981. 180 p. (In Russian).
9. Chaboche J.-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. Iss. 3. P. 247–302.
10. Chaboche J.-L., Lemaitre J. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press. 1990. 556 p.
11. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. *Non-linear Mechanics of Materials*. Dordrecht–Heidelberg–London–New York. Springer. 2010. 433 p.

12. Ishlinskii A.Yu. Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynym uprochneniem [General theory of plasticity with linear strengthening]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [*Ukrainian Mathematical Journal*]. 1954. Vol. 6. No 3. P. 314–325 (In Russian).
13. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Plastichnost materialov pri proporsionalnykh i neproporsionalnykh tsiklicheskiykh nagruzheniyakh [Plasticity of materials under proportional and nonproportional cyclic loading]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [*PNRPU Mechanics Bulletin*]. 2017. No 3. P. 53–74 (In Russian).
14. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *International Journal of Plasticity*. 2002. Vol. 18. P. 873–894.
15. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratcheting experiments of SS304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*. Vol. 22. No 5. P. 858–894.
16. Chaboche J.-L. Modeling of ratcheting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics. A/Solids*. 1994. Vol. 13. No 4. P. 501–518.
17. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1955. Vol. 169. No 1. P. 41–57.
18. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Internal Research Report in Materials at High Temperatures*. 1966. Vol. 24. No 1. P. 1–26. DOI: 10.3184/096034007X207589.
19. Kadashevich Yu.I. O razlichnykh variantakh tenzorno-lineynykh sootnosheniy v teorii plastichnosti [On different versions of tensor-linear relations in the theory of plasticity]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [*Studies of Elasticity and Plasticity*]. 1967. No 6. C. 39–45 (In Russian).
20. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery. Part I: Formulation and basic features for ratcheting behaviour. *International Journal of Plasticity*. 1993. Vol. 9. No 3. P. 375–390.
21. Kang G.Z., Gao Q., Cai L.X., Yang X.J., Sun Y.F. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures. *Nuclear Engineering and Design*. 2002. Vol. 216. P. 13–26.

THEORIES OF PLASTICITY UNDER CYCLIC LOADINGS

Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.U.

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

Versions of the theories of plasticity currently used in applied engineering design – Korotkikh, Bondar and Chaboche models – are considered. The effect of various types of micro-stresses on the behavior of the hysteresis loop under uniaxial soft asymmetric cyclic loading consisting of several blocks is analyzed. It is shown that, for detailed modeling of the ratcheting of the hysteresis loop arising under such loading conditions, all three types of micro-stresses must be used. This conclusion is corroborated by the results of the experimental studies of samples made of stainless steels SS304 and 12Ch18N10T under soft loading, where both direct and reverse ratcheting was observed. It is shown that the modified Bondar model accounting for Ohno – Wang micro-stresses (the third type) is the most adequate one in describing the ratcheting processes of the elastoplastic hysteresis loop, including the reverse ones.

Keywords: plasticity, cyclic loading, micro-stresses, ratcheting of the loop.