УДК 539.3

ПОЛЯРНО-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ*

Земсков А.В.[1,2], **Тарлаковский Д.В.**[1,2]

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*
[2]*НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

azemskov1975@mail.ru

Поступила в редакцию 07.12.2017

Рассматривается полярно-симметричная задача об определении напряженно-деформированного состояния ортотропной плоскости, находящейся под влиянием нестационарных объемных упругодиффузионных возмущений. В качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в полярной системе координат.

Решение задачи ищется в интегральной форме и представляется в виде сверток функций Грина с функциями, задающими объемные возмущения. Для нахождения функций Грина применяется преобразование Лапласа по времени и преобразование Ганкеля по радиальной координате. Обращение преобразования Лапласа осуществляется аналитически с помощью вычетов. Обращение трансформант Ганкеля осуществляется численно с помощью квадратурных формул. Найдены функции влияния, позволяющие определить поля перемещений и приращения концентраций компонентов среды по заданным объемным возмущениям. Для демонстрации работы алгоритма выполнен расчетный пример, иллюстрирующий эффект связанности механического и диффузионных полей.

Ключевые слова: упругая диффузия, преобразование Лапласа, преобразование Ганкеля, функции Грина, полярно-симметричные задачи, нестационарные задачи.

Введение

В зависимости от геометрии области бывает целесообразно рассматривать задачи механики в криволинейных системах координат. При этом независимо от выбора системы координат решение начально-краевой задачи удобно искать с помощью преобразования Лапласа и разложений по собственным функциям. Это позволяет свести исходную систему уравнений движения и массопереноса к системе линейных алгебраических уравнений. Решение в трансформантах Лапласа будет рациональной функцией, что позволяет перейти к оригиналам с помощью вычетов.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-08-00663а).

Основной проблемой здесь является нахождение системы собственных функций, которые являются решениями соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Наиболее просто эта задача решается в декартовой системе координат. При определенных граничных условиях в качестве таковых функций могут выступать синус и косинус [1]. Для криволинейных систем координат также имеются частные решения [2–4], вид которых зависит как от выбора граничных условий, так и от геометрии области.

Будем рассматривать полярно-симметричную задачу для ортотропной плоскости, где в качестве собственных функций могут использоваться функции Бесселя 1-го рода. При этом упругая среда является N-компонентным твердым раствором, в котором под действием нестационарных объемных возмущений могут возникать связанные упругие и диффузионные поля.

1. Постановка задачи

Уравнения, описывающие связанные упругодиффузионные процессы в N-компонентной среде, в произвольном криволинейном базисе $\mathbf{e}_i$ имеют вид [5–13]:

$$\rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j\left(C^{ijkl}\nabla_l u_k\right) - \sum_{r=1}^{N}\nabla_j\left(\alpha^{(r)ij}\eta^{(r)}\right) + \rho F^i,$$
$$\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial t} = \nabla_i\left(D^{(q)ij}\nabla_j\eta^{(q)}\right) - \frac{m^{(q)}n_0^{(q)}}{\rho RT_0}\nabla_i\left[D^{(q)ij}\nabla_j\left(\alpha^{(q)kl}\nabla_l u_k\right)\right] + F^{(q)} \quad \left(q=\overline{1,N}\right), \tag{1}$$

где индексы $i,j,k,l=\overline{1,3}$; t – время; u^i – компоненты вектора перемещений; ∇_j – ковариантная производная по криволинейной координате x^j; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации вещества; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и текущая концентрация q-го вещества в составе N-компонентной среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества в составе N-компонентной среды; $\mathbf{C} = C^{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$ – тензор упругих постоянных; ρ – плотность среды; $\boldsymbol{\alpha}^{(q)} = \alpha^{(q)ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – упругодиффузионный тензор, характеризующий деформации за счет диффузии; $\mathbf{D}^{(q)} = D^{(q)ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $F = F^i\mathbf{e}_i$ – удельная плотность объемных сил; $F^{(q)}$ – объемная плотность источников массопереноса.

Будем далее рассматривать одномерные полярно-симметричные процессы. В этом случае вектор массовых сил и объемная плотность источников массопереноса будут иметь вид:

$$\mathbf{u} = \{u_r(r), 0, 0\}, \quad \eta^{(j)} = \eta^{(j)}(r), \quad \mathbf{F} = \{F_r(r), 0, 0\}, \quad F^{(q)} = F^{(q)}(r), \tag{2}$$

где r – радиальная координата, u_r и $F_r(r)$ – физические компоненты векторов перемещений и массовых сил.

Вычисляя ковариантные производные в (1) с учетом (2), получим

$$\nabla_j\left(C^{1jkl}\nabla_k u_l\right) = C_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{11}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{11}}{r^2}u_r,$$
$$\nabla_j\left(C^{2jkl}\nabla_k u_l\right) = \frac{C_{16}}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3C_{16}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{C_{16}}{r^3}u_r,$$
$$\nabla_j\left(C^{3jkl}\nabla_k u_l\right) = C_{15}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{15}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{15}}{r^2}u_r,$$

$$\nabla_i\left[D^{(q)ij}\nabla_j\left(\alpha^{(q)kl}\nabla_k u_l\right)\right]=D_1^{(q)}\alpha_1^{(q)}\left(\frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r^3}u_r\right),$$

$$\nabla_j\left(\alpha^{(q)1j}\eta^{(q)}\right)=\alpha_1^{(q)}\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial r},\quad \nabla_j\left(\alpha^{(q)2j}\eta^{(q)}\right)=\frac{\alpha_6^{(q)}}{r}\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial r}+\frac{2\alpha_6^{(q)}}{r^2}\eta^{(q)},$$

$$\nabla_j\left(\alpha^{(q)3j}\eta^{(q)}\right)=\alpha_5^{(q)}\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial r}+\frac{\alpha_5^{(q)}}{r}\eta^{(q)},\quad \nabla_i\left(D^{(q)ij}\nabla_j\eta^{(q)}\right)=D_1^{(q)}\frac{\partial^2\eta^{(q)}}{\partial r^2}+\frac{D_1^{(q)}}{r}\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial r}.$$

Здесь C_{ij}, $\alpha_i^{(q)}$ и $D_i^{(q)}$ – физические компоненты тензоров $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(q)}$ и $\mathbf{D}^{(q)}$, записанные в нотации Фойгта.

В одномерной постановке должны выполняться условия

$$\nabla_j\left(C^{mjkl}\nabla_k u_l\right)=0,\quad \nabla_j\left(\alpha^{(q)mj}\eta^{(q)}\right)=0\quad (m=2,3).$$

Для этого необходимо положить

$$C_{15}=C_{16}=0,\quad \alpha_5^{(q)}=\alpha_6^{(q)}=0.$$

Тогда уравнения (1) в полярной системе координат в одномерном случае запишутся так:

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=C_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\frac{\partial\eta^{(j)}}{\partial r}+\rho F_r,$$

$$\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial t}=-\Lambda_{11}^{(q)}\left(\frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r^3}\right)+D_1^{(q)}\left(\frac{\partial^2\eta^{(q)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial r}\right)+F^{(q)},\quad (3)$$

$$\Lambda_{11}^{(q)}=\frac{m^{(q)}n_0^{(q)}D_1^{(q)}\alpha_1^{(q)}}{\rho R T_0}.$$

При выводе одномерных уравнений использованы результаты работы [14], касающиеся свойств цилиндрической симметрии.

Физические компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}=\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ и вектора диффузионного потока $\mathbf{J}^{(q)}=J^{(q)i}\mathbf{e}_i$ в этом случае будут иметь вид (H_i – коэффициенты Ламе, φ и z – угловая и осевая координаты цилиндрической системы координат) [5–13]:

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon_{11}}{H_1^2}=\nabla_1 u_1=\frac{\partial u_1}{\partial r}-\Gamma_{11}^k u_k=\frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{\varepsilon_{22}}{H_2^2}=\frac{1}{r^2}\nabla_2 u_2=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}-\Gamma_{22}^k u_k\right)=\frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\varepsilon_{z\varphi}=\varepsilon_{zr}=\varepsilon_z=0;$$

$$\sigma_r=c_{11}\varepsilon_r+c_{12}\varepsilon_\varphi-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)},\quad \sigma_\varphi=c_{12}\varepsilon_r+c_{11}\varepsilon_\varphi-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)},\quad (4)$$

$$\sigma_z=c_{13}\varepsilon_r+c_{13}\varepsilon_\varphi-\sum_{j=1}^{N}\alpha_3^{(j)}\eta^{(j)},\quad \tau_{\varphi z}=\tau_{rz}=\tau_{r\varphi}=0;$$

$$J_r^{(q)}=\frac{J^{(q)1}}{H_1}=\frac{1}{H_1}\left[\frac{D^{(q)11}n_0^{(q)}m^{(q)}}{\rho R T_0}\nabla_1\left(\alpha^{(q)kl}\nabla_l u_k\right)-D^{(q)11}\nabla_1\eta^{(q)}\right]=$$

$$= \Lambda_{11}^{(q)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - D_1^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r}.$$

Из равенств (3) и (4) следует, что в полярно-симметричной постановке задачи механодиффузии материал среды без ограничения общности можно считать ортотропным.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным величинам (при одинаковом начертании они обозначаются символом «*», который далее опускается) по формулам:

$$r^* = \frac{r}{L}, \quad u = \frac{u_r}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_1^{(q)}}{C_{11}},$$
$$D_q = \frac{D_1^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{\Lambda_{11}^{(q)}}{CL}, \quad F_1 = \frac{F_r L}{C_{11}}, \quad F_{q+1} = \frac{F^{(q)} L}{C},$$

L – характерный линейный масштаб задачи.

В результате получим (штрих обозначает производную по переменной r, точка – производную по безразмерному времени τ)

$$\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta'_q + F_1,$$
$$\dot{\eta}_q = -\Lambda_q \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left(\eta''_q + \frac{\eta'_q}{r} \right) + F_{q+1}. \tag{5}$$

Замыкают постановку задачи начальные условия, которые будем считать нулевыми.

2. Алгоритм решения

Решение задачи ищется в интегральной форме. Функции Грина рассматриваемой задачи $G_{nm}(r,\tau)$, $n,m = \overline{1, N+1}$, являются решениями следующих задач Коши:

$$G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r-\xi)\delta(\tau) = \ddot{G}_{1m},$$
$$-\Lambda_q \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) +$$
$$+ \delta_{q+1,m} \delta(r-\xi)\delta(\tau) = \dot{G}_{q+1,m}, \tag{6}$$
$$G_{1m}\big|_{\tau=0} = \dot{G}_{1m}\big|_{\tau=0} = G_{q+1,m}\big|_{\tau=0} = 0,$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta(x)$ – дельта-функция.

Тогда решение задачи (5) с нулевыми начальными условиями записывается так (звездочки означают свертку по времени τ и радиусу r):

$$u = \sum_{m=1}^{N+1} G_{1m}(r,\tau) ** f_m(r,\tau), \quad \eta_q = \sum_{m=1}^{N+1} G_{q+1,m}(r,\tau) ** f_m(r,\tau). \tag{7}$$

Для нахождения функций Грина воспользуемся преобразованиями Лапласа и Ганкеля. Используя полученные в работах [15–17] соотношения

$$H_k[f'] = -pH_{k-1}[f] - (1-k) H_k\left[\frac{f}{r}\right], \quad H_k\left[f'' + \frac{f'}{r} - \frac{k^2}{r^2} f\right] = -p^2 H_k[f],$$

$$H_k\left[f''+\frac{f'}{r}\right]=-p^2H_k[f]+k^2H_k\left[\frac{f}{r^2}\right],\quad H_0\left[f'''+\frac{2f''}{r}-\frac{f'}{r^2}+\frac{f}{r^3}\right]=-p^3H_1[f],$$

применим к уравнениям (6) преобразование Лапласа, затем к первому уравнению (6) – преобразование Ганкеля 1-го порядка, а ко второму уравнению – преобразование Ганкеля нулевого порядка. Получим [17]:

$$\begin{aligned}&(p^2+s^2)G_{1m}^{H_1L}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j pG_{j+1,m}^{H_0L}=\delta_{1m}\xi J_1(p\xi),\\&-\Lambda_q p^3G_{1m}^{H_1L}+\left(D_q\,p^2+s\right)G_{q+1,m}^{H_0L}=\delta_{q+1,m}\xi J_0(p\xi).\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь

$$\begin{Bmatrix}G_{1m}^{H_1L}\\G_{q+1,m}^{H_0L}\end{Bmatrix}=\int_0^\infty r\begin{Bmatrix}J_1(pr)\\J_0(pr)\end{Bmatrix}dr\int_0^\infty\begin{Bmatrix}G_{1m}(r,\tau)\\G_{q+1,m}(r,\tau)\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{-s\tau}d\tau,$$

где s – параметр преобразования Лапласа; p – параметр преобразования Ганкеля; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядка.

Решение системы (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}G_{11}^{H_1L}(p,\xi,s)\\G_{q+1,1}^{H_0L}(p,\xi,s)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_{11}(p,s)\\P_{q+1,1}(p,s)\end{Bmatrix}\frac{\xi J_1(p\xi)}{P(p,s)},\\&\begin{Bmatrix}G_{1,q+1}^{H_1L}(p,\xi,s)\\G_{q+1,l+1}^{H_0L}(p,\xi,s)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_{1,q+1}(p,s)\\P_{q+1,l+1}(p,s)\end{Bmatrix}\frac{\xi J_0(p\xi)}{P(p,\xi)},\\&G_{q+1,q+1}^{H_0L}(p,\xi,s)=\left[\frac{1}{s+D_qp^2}+\frac{P_{q+1,q+1}(p,s)}{Q_q(p,s)}\right]\xi J_0(p\xi),\quad l=\overline{1,N},\quad l\neq q,\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$P(p,s)=(s^2+p^2)\Pi-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\Lambda_j p^4\Pi_j,\quad Q_q(p,s)=P(p,s)\left(s+D_qp^2\right);\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&P_{11}(p,s)=\Pi,\quad P_{1,q+1}(p,s)=\alpha_q p\Pi_q,\quad P_{q+1,1}(p,s)=\Lambda_q p^3\Pi_q,\\&P_{q+1,q+1}(p,s)=\alpha_q\Lambda_q p^4\Pi_q,\quad P_{q+1,l+1}(p,s)=\alpha_l\Lambda_q p^4\Pi_{lq},\quad l=\overline{1,N},l\neq q,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\Pi=\prod_{j=1}^{N}\left(s+D_jp^2\right),\quad \Pi_j=\prod_{r=1,r\neq j}^{N}\left(s+D_rp^2\right),\quad \Pi_{lq}=\prod_{j=1,j\neq\{l,q\}}^{N}\left(s+D_jp^2\right).\tag{12}$$

В формулах (10)–(12) при $N=1$ следует положить $\Pi_j=1$, $\Pi_{lq}=0$, а при $N=2$ – соответственно $\Pi_{lq}=1$.

Многочлены $P(p,s)$ и $Q(p,s)$ имеют ту же структуру, что и аналогичные многочлены в [1]. Потому оригиналы функций Грина (9) по Лапласу будут иметь вид $\left(m=\overline{1,N+1},r\neq q+1\right)$:

$$\begin{Bmatrix}G_{11}^{H_1}(p,\xi,\tau)\\G_{q+1,1}^{H_0}(p,\xi,\tau)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\widetilde{G}_{11}(p,\tau)\\\widetilde{G}_{q+1,1}(p,\tau)\end{Bmatrix}\xi J_1(p\xi),\ \begin{Bmatrix}G_{1,q+1}^{H_1}(p,\xi,\tau)\\G_{q+1,l+1}^{H_0}(p,\xi,\tau)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\widetilde{G}_{1,q+1}(p,\tau)\\\widetilde{G}_{q+1,l+1}(p,\tau)\end{Bmatrix}\xi J_0(p\xi),$$

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{G}_{1m}(p,\tau) \\ \widetilde{G}_{q+1,r}(p,\tau) \end{Bmatrix} = \mathrm{e}^{\gamma\tau}\left(\begin{Bmatrix} A_{1m}^{(1)} \\ A_{q+1,r}^{(1)} \end{Bmatrix} \cos\beta\tau - \begin{Bmatrix} A_{1m}^{(2)} \\ A_{q+1,r}^{(2)} \end{Bmatrix} \sin\beta\tau \right) + \sum_{j=1}^{N} \begin{Bmatrix} A_{1m}^{(j+2)} \\ A_{q+1,r}^{(j+2)} \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{s_{j+2}\tau},$$

$$\widetilde{G}_{q+1,q+1}(p,\tau) = \mathrm{e}^{\gamma\tau}\left(A_{q+1,q+1}^{(1)}\cos\beta\tau - A_{q+1,q+1}^{(2)}\sin\beta\tau \right) + \sum_{j=1}^{N} A_{q+1,q+1}^{(j+2)}\mathrm{e}^{s_{j+2}\tau} + A_{q+1,q+1}^{(N+3)}\mathrm{e}^{-D_q p^2\tau},$$

где s_1 и $s_2 = \bar{s}_1$ – комплексно сопряженные, а s_{j+2}, $j = \overline{1, N}$, – действительные нули многочлена $P(p, s)$ по параметру s. При этом $\beta = \mathrm{Re}\, s_1 < 0$, $\gamma = \mathrm{Im}\, s_1$, $s_{j+2} < 0$. Коэффициенты $A_{ij}^{(n)}$ определяются так:

$$A_{1m}^{(1)} = 2\,\mathrm{Re}\frac{P_{1m}(p,s_1)}{P'(p,s_1)}, \quad A_{1m}^{(2)} = 2\,\mathrm{Im}\frac{P_{1m}(p,s_1)}{P'(p,s_1)}, \quad A_{1m}^{(j+2)} = \frac{P_{1m}(p,s_{j+2})}{P'(p,s_{j+2})},$$

$$A_{q+1,l}^{(1)} = 2\,\mathrm{Re}\frac{P_{q+1,l}(p,s_1)}{P'(p,s_1)}, \quad A_{q+1,l}^{(2)} = 2\,\mathrm{Im}\frac{P_{q+1,l}(p,s_1)}{P'(p,s_1)}, \quad A_{q+1,l}^{(j+2)} = \frac{P_{q+1,l}(p,s_{j+2})}{P'(p,s_{j+2})},$$

$$A_{q+1,q+1}^{(1)} = 2\,\mathrm{Re}\frac{P_{q+1,q+1}(p,s_1)}{Q_q'(p,s_1)}, \quad A_{q+1,q+1}^{(2)} = 2\,\mathrm{Im}\frac{P_{q+1,q+1}(p,s_1)}{Q_q'(p,s_1)},$$

$$A_{q+1,q+1}^{(j+2)} = \frac{P_{q+1,q+1}(p,s_{j+2})}{Q_q'(p,s_{j+2})}, \quad A_{q+1,q+1}^{(N+3)} = \frac{P_{q+1,q+1}(p,-D_q p^2)}{Q_q'(p,-D_q p^2)}.$$

Производные P', Q_q' берутся по переменной s.

Обратное преобразование Ганкеля определяется по формулам:

$$\begin{Bmatrix} G_{11}(r,\xi,\tau) \\ G_{1,q+1}(r,\xi,\tau) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \widetilde{G}_{11}(p,\tau)J_1(p\xi) \\ \widetilde{G}_{1,q+1}(p,\tau)J_0(p\xi) \end{Bmatrix} \xi p J_1(pr)dp,$$

$$\begin{Bmatrix} G_{q+1,1}(r,\xi,\tau) \\ G_{q+1,k+1}(r,\xi,\tau) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \widetilde{G}_{q+1,1}(p,\tau)J_1(p\xi) \\ \widetilde{G}_{q+1,k+1}(p,\tau)J_0(p\xi) \end{Bmatrix} \xi p J_0(pr)dp.$$

Для нахождения решений u и η_q вычислим сначала в (7) свертку по времени. Имеем:

$$G_{1m} ** f_m = \int_0^\infty S_{1m}(p,\tau)pJ_1(pr)dp,$$

$$G_{q+1,m} ** f_1 = \int_0^\infty S_{q+1,m}(p,\tau)pJ_0(pr)dp \quad \left(m = \overline{1, N+1}\right), \tag{13}$$

где

$$\begin{Bmatrix} S_{11}(p,\tau) \\ S_{q+1,1}(p,\tau) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \xi J_1(p\xi)d\xi \int_0^\tau \begin{Bmatrix} \widetilde{G}_{11}(p,t) \\ \widetilde{G}_{q+1,1}(p,t) \end{Bmatrix} f_1(\xi,\tau-t)dt,$$

$$\begin{Bmatrix} S_{1,q+1}(p,\tau) \\ S_{q+1,k+1}(p,\tau) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \xi J_0(p\xi)d\xi \int_0^\tau \begin{Bmatrix} \widetilde{G}_{1,q+1}(p,t) \\ \widetilde{G}_{q+1,k+1}(p,t) \end{Bmatrix} f_{q+1}(\xi,\tau-t)dt. \tag{14}$$

Функции $S_{mn}(p, \tau)$ могут быть найдены аналитически с помощью таблиц интегралов [18]. Оставшиеся интегралы в (13) вычисляются с помощью алгоритма, описанного, например, в статьях [1, 19, 20].

3. Расчетный пример

В качестве примера рассмотрим однокомпонентную ($N = 1$) плоскость из материала с механическими характеристиками [21]: $C_{1111} = 1{,}26 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $T_0 = 800$ К, $\rho = 2700$ кг/м^3, $D_1^{(1)} = 7{,}73 \cdot 10^{-14}$ м^2/с, $\alpha_1^{(1)} = 4{,}2$ Дж/моль, $L = 1$ м.

Положим для расчета в (5)

$$f_1(r,\tau) = \mathrm{e}^{-\varepsilon r} H(\tau), \quad f_2(r,\tau) = 0, \quad \operatorname{Re} \varepsilon > 0.$$

Тогда свертки по времени (7) дают следующие выражения для функций $S_{nm}(p, \tau)$ в (14):

$$S_{11}(p,\tau) = \frac{p}{(\varepsilon^2 + p^2)^{3/2}} \left[A_{11}^{(1)} I_1(\gamma,\beta,\tau) - A_{11}^{(2)} I_2(\gamma,\beta,\tau) + A_{11}^{(3)} I_3(s_3,\tau) \right],$$

$$S_{21}(p,\tau) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + p^2)^{3/2}} \left[A_{21}^{(1)} I_1(\gamma,\beta,\tau) - A_{21}^{(2)} I_2(\gamma,\beta,\tau) + A_{21}^{(3)} I_3(s_3,\tau) \right],$$

где $I_m, m = \overline{1,3},$ определяются по формулам

$$I_1(\gamma,\beta,\tau) = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} [\mathrm{e}^{\gamma\tau}(\beta \sin\beta\tau + \gamma\cos\beta\tau) - \gamma],$$

$$I_2(\gamma,\beta,\tau) = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} [\mathrm{e}^{\gamma\tau}(\gamma \sin\beta\tau - \beta\cos\beta\tau) + \beta], \quad I_3(s,\tau) = \frac{\mathrm{e}^{s\tau} - 1}{s}.$$

Результаты вычислений сверток (13) представлены на рис. 1 и 2. Зависимость $u(r, \tau)$ на рис. 1 при $r = 10$ показана сплошной линией, при $r = 30$ – пунктирной линией, при $r = 50$ – штриховой линией. Зависимость $\eta(r, \tau)$ на рис. 2 при $r = 1$ показана сплошной линией, при $r = 3$ – пунктирной линией, при $r = 5$ – штриховой линией.

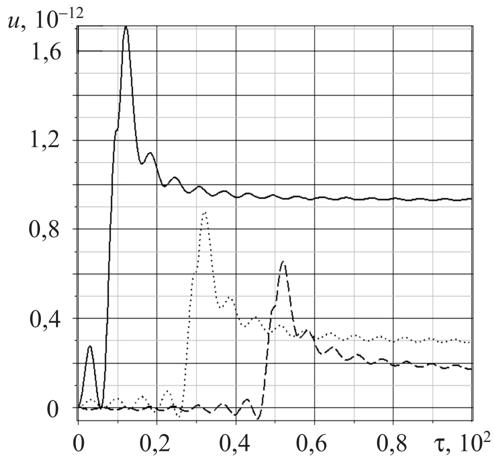

Рис. 1. Зависимость перемещений от времени

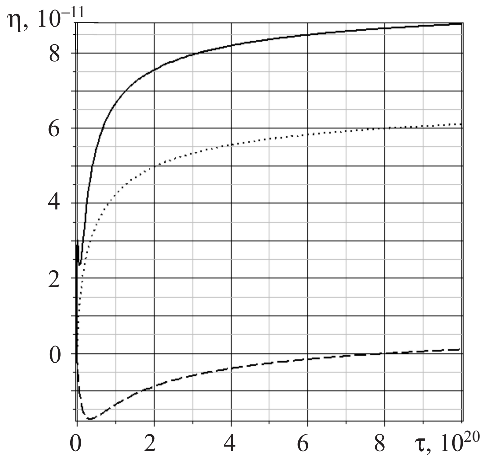

Рис. 2. Зависимость приращения концентрации от времени

Для вычисления интегралов в (13) использовано $N_p = 500$ точек разбиения. Дальнейшее увеличение количества точек не приводит к видимому изменению результатов.

Заключение

Представлен алгоритм решения полярно-симметричной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропной плоскости. Найдены функции влияния, позволяющие определять поля перемещений и приращения концентраций компонентов среды по заданным объемным возмущениям. Для демонстрации работы алгоритма рассмотрен пример, иллюстрирующий эффект связанности механического и диффузионных полей. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей от времени в различных точках плоскости.

Список литературы

1. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2015. Vol. 36. No 4. P. 503–509.

2. Снеддон И. *Преобразование Фурье*. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 667 с.

3. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.

4. Трантер К. Дж. *Интегральные преобразования в математической физике.* М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.

5. Князева А.Г. *Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях*. Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.

6. Atwa S.Y., Egypt Z. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium. *Journal of Materials and Chemical Engineering*. 2013. Vol. 1. Iss. 2. P. 55–74.

7. Kumar R., Chawla V. A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research.* 2014. Vol. 7. No 7. P. 68–78.

8. Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D. 2D problem of generalized magneto-thermo-elastic diffusion with temperature-dependent elastic moduli. *Journal of Physics*. 2013. Vol. 2. No 3. P. 4–11.

9. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2006. Vol. 2006. P. 1–15.

10. Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mechanica.* 2013. Vol. 224. P. 3057–3069.

11. El-Sayed A.M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Mathematics and Mechanics of Solids.* 2016. Vol. 21. No 9. P. 1045–1060.

12. Бугаев Н.М., Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Приближенное решение одномерной задачи связанной термоупругой диффузии для полупространства. *Проблеми обчислювальної механіки і мицності конструкцій: збірник наукових праць*. Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара. Дніпропетровськ: Ліра, 2011. Вип. 16. С. 60–68.

13. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. *Encyclopedia of Thermal Stress*. Vol. 2. Dordrecht – Heidelberg – New York – London: Springer, 2014. P. 1064–1071.

14. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.

15. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.

16. Piessens R. *The Hankel Transform.* Boca Raton: CRC Press LLC, 2000. 30 p.

17. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. Vol. 158. No 1. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012101.

18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981. 797 с.

19. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффу-

зии для изотропной однокомпонентной полуплоскости. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2015. Т. 157. №4. С. 103–111.

20. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2014. №2. С. 31–38.

21. *Физические величины: Справочник.* Под ред. И.С. Григорьева, И.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

References

1. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2015. Vol. 36. No 4. P. 503–509.

2. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951. 542 c.

3. Slepian L.I., Iakovlev Yu.S. *Integralnye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhanik*i [*Integral Transformations in Nonstationary Problems of Mechanics*]. Leningrad. Sudostroenie Publ. 1980. 344 p. (In Russian).

4. Tranter C.J. *Integral Transforms in Mathematical Physics.* London. Methuen & Co LTD. 1966. 126 p.

5. Knyazeva A.G. *Vvedenie v termodinamiku neobratimykh protsessov. Lektsii o modelyakh* [*Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. Lectures on Models*]. Tomsk. Ivan Fedorov Publ. 2014. 172 p. (In Russian).

6. Atwa S.Y., Egypt Z. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium. *Journal of Materials and Chemical Engineering*. 2013. Vol. 1. Iss. 2. P. 55–74.

7. Kumar R., Chawla V. A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research.* 2014. Vol. 7. No 7. P. 68–78.

8. Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D. 2D problem of generalized magneto-thermo-elastic diffusion with temperature-dependent elastic moduli. *Journal of Physics*. 2013. Vol. 2. No 3. P. 4–11.

9. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2006. Vol. 2006. P. 1–15.

10. Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mechanica.* 2013. Vol. 224. P. 3057–3069.

11. El-Sayed A.M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 21. No 9. P. 1045–1060.

12. Bugaev N.M., Gachkevich A.R., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Priblizhennoe reshenie odnomernoy zadachi svyazannoy termouprugoy diffuzii dlya poluprostranstva [Approximate solution of one-dimensional problem of the related thermoelastic diffusion for half-space]. *Problemi obchslyuvalnoi mekhaniki i mitsnosti konstruktsiy: zbirnik naukovikh prats* [*Problems Computational Mechanics and Strength of Structures: Collection of Scientific Papers*]. Oles Honchar Dnipro National University. Dnepropetrovsk. Lira Publ. 2011. Iss. 16. P. 60–68 (In Russian).

13. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. *Encyclopedia of Thermal Stress*. Vol. 2. Dordrecht – Heidelberg – New York – London: Springer. 2014. P. 1064–1071.

14. Lehnitskii S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [*Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 416 p. (In Russian).

15. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L. Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [*Waves in Continuous Media*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

16. Piessens R. *The Hankel Transform.* Boca Raton: CRC Press LLC. 2000. 30 p.

17. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineerin*g. 2016. Vol. 158. No 1. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012101.

18. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye*

funktsii [*Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions*]. Moscow. Nauka Publ. 1981. 797 p. (In Russian).

19. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha uprugoy diffuzii dlya izotropnoy odnokomponentnoy poluploskosti [Two-dimensional unsteady-state problem of elasticity with diffusion for isotropic one-component half-plane]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* [*Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*]. 2015. Vol. 157. No 4. P. 103–111 (In Russian).

20. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Dvukhkomponentnoe uprugo diffuzionnoe poluprostranstvo pod deystviem nestatsionarnykh vozmushcheniy [Two-component diffusion elastic half-space under the action of non-stationary distrurbances]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [*Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*]. 2014. Vol. 2. P. 31–38 (In Russian).

21. *Fizicheskie velichiny. Spravochnik.* Pod redaktsiey I.S. Grigoryeva, I.Z. Meylikhova [*Physical Quantities. Reference*]. Eds. I.S. Grigoriev, I.Z. Meilikhov. Moscow. Energoatomizdat Publ. 1991. 1232 p. (In Russian).

POLAR-SYMMETRIC PROBLEM OF ELASTIC DIFFUSION FOR A MULTICOMPONENT MEDIUM

Zemskov A.V.[1,2]**, Tarlakovskii D.V.**[1,2]

[1]*Moscow Aviation Institute* (*National Research University*)*, Moscow, Russian Federation*
[2]*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

The paper considers a polar-symmetric problem of finding a stress-strain state of a orthotropic plane influenced by unsteady volume elastodiffusion perturbations. The mathematical model is based on a coupled equation system of elastic diffusion in a polar coordinate system.
The solution of the problem is sought in an integral form and presented through the convolutions of Green's functions with functions of body forces. Laplace on time and Hankel on radial coordinate transforms are used to find the Green's functions. The inverse Laplace transform is done analytically by residues. The inverse Hankel transform is done numerically by quadrature formulas. Green's functions have been found, which make it possible to determine displacement fields and increments of the components concentrations of a medium for given volumetric perturbations. The effectiveness of the algorithm is demonstrated, using the example illustrating the effect of the coupled mechanic and diffusion fields. The computational results are presented in the form of time histories of the sought fields in various points of the plane.

Keywords: elastic diffusion, Laplace transform, Hankel transform, Green's functions, polar-symmetric problems, unsteady problems.