

УДК 539.3

## О ДВИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УДАРНИКА В СРЕДАХ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПРОЧНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ\*

© 2017 г.

Баничук Н.В.<sup>1,2</sup>, Отгонбаяр С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Московская обл., Долгопрудный, Российская Федерация

banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 31.10.2017

Рассматриваются вопросы движения жестких тел в деформируемой среде. В предположении, что внедряющиеся тела (ударники) имеют осесимметричную форму, изучается их движение и оценивается глубина проникания в сплошную среду. Процесс высокоскоростного внедрения жесткого тела в деформируемую среду моделируется с использованием двухчленного представления силы сопротивления движению. В предположении, что тело полностью погружено в среду в начальный момент движения и движется в среде до полной остановки, получено соотношение, позволяющее определить глубину проникания тела в среду. Исследованы случаи движения в однородной среде и случаи движения в среде с неоднородными прочностными и динамическими характеристиками. Исследуется случай, когда прочностные характеристики среды изменяются по линейному закону. При этом рассматриваются среды как с возрастанием, так и с убыванием прочностных свойств. Представлены зависимости глубины проникания ударника от параметра, характеризующего изменение прочностных свойств среды.

*Ключевые слова:* высокоскоростное проникание, осесимметричные ударники, неоднородные среды.

### Введение

Вопросы движения жестких тел в деформируемых сплошных средах относятся к фундаментальным проблемам механики деформируемого твердого тела. Эти проблемы имеют большое теоретическое и прикладное значение, им посвящено большое число теоретических и экспериментальных исследований (см., например, [1–20]). При этом существенную роль играют как моделирование процесса движения проникающего тела (ударника) [1, 2, 15–17], так и изучение физических и геометрических определяющих факторов, характеризующих динамику взаимодействия твердого тела и деформируемой среды [3–6, 9]. Особое значение приобретают задачи оп-

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-00775а).

тимизации формы ударников, проникающих на максимальную глубину в твердые среды (упругие, хрупкие, вязкие и пластические) [10, 17–20], а также обратные задачи проектирования структурно неоднородных сред, и в частности кусочно-однородных пластинчатых структур, оказывающих максимальное сопротивление внедрению ударников [11–14, 20].

Актуальны исследования влияния параметров деформируемой среды на скорость движения проникающих твердых тел и на глубину их проникания. В настоящей статье наряду с изучением движения ударника в однородной среде с постоянными прочностными и динамическими характеристиками рассматриваются некоторые задачи движения ударника в средах с неоднородными прочностными свойствами. Подробно изучается случай линейно изменяющихся прочностных свойств среды и исследуется влияние этого изменения на глубину проникания тела в среду.

### Основные соотношения

Прямолинейное движение абсолютно жесткого ударника осесимметричной формы с массой  $M$  в деформируемой среде вдоль оси  $Ox$  описывается уравнением

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -D. \quad (1)$$

Переходя к новой независимой переменной  $x$  с помощью преобразования

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (2)$$

получим уравнение динамики в виде

$$Mv \frac{dv}{dx} = -D, \quad (3)$$

где  $v$  – скорость движения ударника,  $D$  – сила сопротивления деформируемой среды, определяемая выражением [3]:

$$D = \pi R^2 \sigma_* \left\{ a_0 + a_2 (kv)^2 \left[ 1 - \frac{2}{R^2} I_2 \right] \right\} = A_0 + A_2 v^2 \left[ 1 - \frac{2}{R^2} I_2 \right]. \quad (4)$$

Здесь  $A_0(x)$ ,  $A_2(x)$  – собирательные параметры, характеризующие прочностные и динамические свойства неоднородной в направлении  $Ox$  деформируемой среды:

$$A_0 = \pi R^2 \sigma_* a_0, \quad A_2 = \pi R^2 \sigma_* k^2 a_2, \quad I_2 = \int_0^l \frac{r(s)r_s(s)}{1+r_s^2(s)} ds, \quad r_s = \frac{dr}{ds}. \quad (5)$$

Форма осесимметричного ударника длиной  $l$  задается функцией  $r(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ;  $R = r(l)$  – радиус хвостовой части (мидель) ударника (рис. 1);  $\sigma_*$  – одноосная прочность на сжатие;  $k^2 = \rho/\sigma_*$ ;  $\rho$  – плотность материала среды;  $a_0$ ,  $a_2$  – параметры модели [2, 3]. Предполагается, что зависимости величин  $\sigma_*$ ,  $\rho$ ,  $a_0$ ,  $a_2$  от  $x$  заданы.

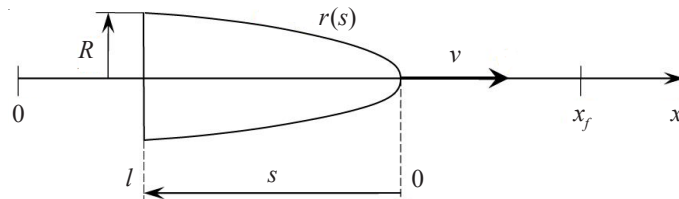


Рис. 1

С учетом соотношений (3)–(5) будем иметь

$$\frac{dv^2}{dx^2} + \varphi(x)v^2 + \psi(x) = 0, \quad (6)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{2A_2(x)}{M} \left( 1 - \frac{2}{R^2} I_2 \right), \quad \psi(x) = \frac{2}{M} A_0(x). \quad (7)$$

Введем новую переменную

$$y(x) = v^2(x) \quad (8)$$

и будем рассматривать движение на отрезке

$$0 \leq x \leq x_f \quad (9)$$

с условием

$$y(0) = v_0^2. \quad (10)$$

Интегрируя уравнение динамики

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y + \psi(x) = 0 \quad (11)$$

с условием (10), получим

$$y = \exp \left( - \int_0^x \varphi(\xi) d\xi \right) \left\{ - \int_0^x \left[ \psi(\zeta) \exp \left( \int_0^\zeta \varphi(\xi) d\xi \right) \right] d\zeta + v_0^2 \right\}. \quad (12)$$

Окончание движения происходит при достижении нулевой скорости (условие остановки)

$$y(x_f) = v^2(x_f) = 0. \quad (13)$$

Из условия (13) определяется глубина проникания  $x_f$  с помощью соотношения

$$\int_0^{x_f} \left[ \psi(x) \exp \left( \int_0^x \varphi(\xi) d\xi \right) \right] dx = v_0^2. \quad (14)$$

На основании полученных общих соотношений (7), (12) и (14) исследованы различные частные случаи сопротивления деформируемой среды.

### Движение ударника в однородной среде

Рассмотрим случай однородной сопротивляющейся среды, когда прочностная и динамическая составляющие сопротивления являются постоянными величинами, то есть не зависят от координаты  $x$ :

$$A_0 = \text{const}, \quad A_2 = \text{const}, \quad (15)$$

В этом случае

$$\varphi = \frac{2A_2}{M} \left( 1 - \frac{2}{R^2} I_2 \right) = B_2, \quad (16)$$

$$\psi = \frac{2}{M} A_0 = B_0, \quad (17)$$

где  $B_0$  и  $B_2$  – заданные постоянные. При этом

$$\int_0^x \varphi d\xi = xB_2, \quad (18)$$

$$\int_0^x \left[ \psi \exp \left( \int_0^\xi \varphi d\xi \right) \right] d\xi = \frac{B_0}{B_2} (\exp(xB_2) - 1). \quad (19)$$

Как следует из соотношений (12), (18) и (19), движение ударника при  $0 \leq x \leq x_f$  описывается формулой

$$y(x) = \exp(-xB_2) \left[ \frac{B_0}{B_2} (1 - \exp(xB_2)) + v_0^2 \right]. \quad (20)$$

Глубина  $x_f$  проникания ударника в деформируемую среду определяется из соотношения (14), которое в случае однородной среды имеет вид

$$\exp(x_f B_2) = 1 + \frac{B_2}{B_0} v_0^2. \quad (21)$$

Следовательно, глубина  $x_f$  проникания в однородную деформируемую среду определяется выражением

$$x_f = \frac{1}{B_2} \ln \left( 1 + \frac{B_2}{B_0} v_0^2 \right). \quad (22)$$

### **Движение ударника в среде с неоднородными прочностными свойствами**

Рассмотрим случай, когда неоднородное сопротивление среды обусловлено ее неоднородными прочностными свойствами, а динамические характеристики являются постоянными, то есть

$$A_0 = A_0(x), \quad A_2 = \text{const}. \quad (23)$$

В этом случае

$$\psi = \psi(x) = \frac{2}{M} A_0(x) = B_0(x), \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{2A_2}{M} \left( 1 - \frac{2}{R^2} I_2 \right) = B_2, \quad (25)$$

где  $B_2$  – постоянная, зависящая от динамических характеристик среды и геометрических параметров ударника, а  $B_0(x)$  – функция, описывающая распределение прочностных свойств деформируемого материала вдоль координаты  $x$ .

При этом

$$\int_0^x \varphi d\xi = xB_2, \quad (26)$$

$$\int_0^x \left[ \psi \exp \left( \int_0^\xi \varphi d\xi \right) \right] d\xi = \int_0^x B_0(\xi) \exp(\xi B_2) d\xi. \quad (27)$$

Учитывая соотношения (25), (26) и представление (12), определим зависимость скорости движения от координаты  $x$ :

$$y(x) = v^2(x) = \exp(-xB_2) \left[ - \int_0^x B_0(\xi) \exp(\xi B_2) d\xi + v_0^2 \right] \quad (28)$$

и величину глубины проникания в деформируемую среду из соотношения

$$\int_0^{x_f} B_0(x) \exp(xB_2) dx = v_0^2. \quad (29)$$

Рассмотрим движение ударника в среде с линейным распределением прочностных свойств

$$B_0(x) = \alpha + \beta x, \quad 0 \leq x \leq x_f, \quad (30)$$

где  $\alpha, \beta$  – заданные постоянные. В результате подстановки выражения (30) в (29) имеем

$$\int_0^{x_f} B_0(x) \exp(xB_2) dx = \frac{\alpha}{B_2} \exp(B_2 x_f) \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_f - \frac{\beta}{\alpha B_2} \right) - \frac{\alpha}{B_2} \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha B_2} \right). \quad (31)$$

Учитывая это выражение и вводя обозначения

$$\frac{\alpha}{B_2} = K, \quad 1 - \frac{\beta}{\alpha B_2} = S, \quad (32)$$

с использованием (29) приходим к трансцендентному уравнению, служащему для определения глубины  $x_f$  проникания ударника в деформируемую среду:

$$K \left[ \exp(B_2 x_f) \left( S + \frac{\beta}{\alpha} x_f \right) - S \right] = v_0^2. \quad (33)$$

На рис. 2 сплошной линией показана зависимость безразмерной глубины проникания ударника  $x_F = x_f/l$  от безразмерного параметра  $\gamma = \beta l/\alpha$ . Расчет проводился для следующих значений параметров:  $v_0 = 300$  м/с,  $R = 0,005$  м,  $l = 0,02$  м,  $\sigma_* = 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 3000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = a_2 = 1$ ,  $M = 0,005$  кг.

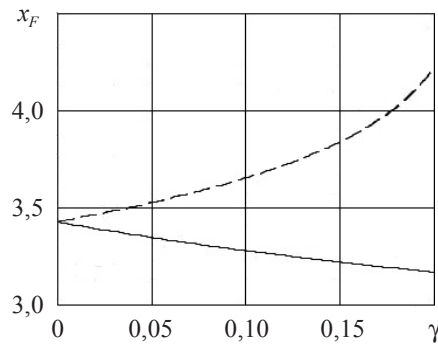


Рис. 2

Для сравнения рассмотрим среду, прочностные свойства которой снижаются вдоль оси  $Ox$  по линейному закону

$$B_0(x) = \alpha - \beta x, \quad 0 \leq x \leq x_f. \quad (34)$$

Подставляя зависимость (34) в выражение (29), будем иметь

$$\int_0^{x_f} B_0(x) \exp(xB_2) dx = \frac{\alpha}{B_2} \exp(B_2 x_f) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} x_f + \frac{\beta}{\alpha B_2}\right) - \frac{\alpha}{B_2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha B_2}\right). \quad (35)$$

С учетом (32) и обозначения

$$T = 1 + \frac{\beta}{\alpha B_2} \quad (36)$$

уравнение (29) запишется в виде:

$$K \left[ \exp(B_2 x_f) \left(T - \frac{\beta}{\alpha} x_f\right) - T \right] = v_0^2. \quad (37)$$

Для данного случая зависимость величины  $x_f$  от параметра  $\gamma$  представлена на рис. 2 штриховой линией.

### Некоторые замечания и выводы

Рассмотрена задача о движении абсолютно жесткого осесимметричного тела (ударника), проникающего в неоднородную деформируемую среду. Глубина проникания ударника оценивается в предположении, что тело в начальный момент полностью вошло в среду (вся поверхность ударника контактирует со средой) и остается в ней в процессе движения вплоть до остановки. В аналитической форме выведены основные выражения, позволяющие непосредственно оценивать глубину проникания ударника в сплошную среду в зависимости от основных параметров решаемых задач. Изучено движение ударника в среде с неоднородными прочностными свойствами, и в частности, подробно исследован случай линейного распределения прочностных свойств среды.

В рамках предложенного подхода можно исследовать влияние на движение жесткого проникающего ударника неоднородных инерционных свойств рассматриваемой деформируемой среды и совместное влияние неоднородного распределения прочностных и инерционных характеристик.

#### Список литературы

1. Backman M.E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *International Journal of Engineering Science*. 1978. Vol. 16. No 1. P. 1–99.
2. Goldsmith W. Non-ideal projectile impact on targets. *International Journal of Impact Engineering* 1999. Vol. 22. No 2–3. P. 95–395.
3. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Коваленко В.В. Определение динамических характеристик грунтов методом внедрения. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1980. №3. С.105–110.
4. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1982. №5. С. 181–185.
5. Hill R. Cavitation and influence of headshape in attack of think targets by non-deformable projectiles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1980. Vol. 28. No 5–6. P. 249–263.
6. Бивин Ю.К. Кавитация при вертикальном входе жестких тел в упруго-пластическую среду. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1997. №1. С.93–101
7. *Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях*. Под ред. Н.Л. Злагина, Г.И. Мишина. М.: Наука, 1974. 344 с.
8. Forrestal M.J., Lee L.M., Jenrette B.D. Laboratory-scale penetration experiments into geological targets up to impact velocities of 2.1 km/s. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1986. Vol. 53. Iss. 2. P. 317–320.

9. Бивин Ю.К. Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. №1. С. 154–160.
10. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Optimal 3D impactors penetrating into layered targets. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 27. No 3. P. 161–166.
11. Аптуков В.Н. Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1985. №3. С. 149–152.
12. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника. *Механика композитных материалов*. 1986. №2. С. 252–257.
13. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. *Оптимальное проектирование слоистых конструкций*. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
14. Алехин В.В., Уржумцев Ю.С. *Оптимизация слоистых систем*. Якутск: Изд-во ЯФ СО РАН, 2002. 177 с.
15. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и задачи идентификации свойств грунтовых сред*. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
16. Аптуков В.Н., Мурзакаев А.В., Фонарев А.В. *Прикладная теория проникания*. М.: Наука, 1992. 103 с.
17. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied High-speed Plate Penetration Dynamics*. Dordrecht, Netherland: Springer. 2006. 357 p.
18. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 47–58.
19. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах. *Докл. РАН*. 2013. Т. 449. №2. С. 156.
20. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. *Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание*. М.: Физматлит, 2016. 176 с.

#### References

1. Backman M.E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *International Journal of Engineering Science*. 1978. Vol. 16. No 1. P. 1–99.
2. Goldsmith W. Non-ideal projectile impact on targets. *International Journal of Impact Engineering* 1999. Vol. 22. No 2–3. P. 95–395.
3. Bivin Yu.K., Viktorov V.V., Kovalenko V.V. Opredelenie dinamiceskikh kharakteristik gruntov metodom vnedreniia [Determination of dynamic soil characteristics by the method of dynamic introduction]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1980. No 3. P. 105–110 (In Russian).
4. Bivin Yu.K., Kolesnikov V.A., Flitman L.M. Opredelenie mekhanicheskikh svoistv sredy metodom dinamicheskogo vnedreniia [Determination of mechanical properties of medium by the method of dynamic introduction]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1982. No 5. P. 181–185 (In Russian).
5. Hill R. Cavitation and influence of headshape in attack of think targets by non-deformable projectiles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1980. Vol. 28. No 5–6. P. 249–263.
6. Bivin Yu.K. Kavitatsiia pri vertikal'nom vkhode zhestkikh tel v uprugo-plasticheskuiu sredu [Cavitation with vertical input rigid bodies in elastic-plastic environment]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1997. No 1. P.93–101 (In Russian).
7. *Ballisticheskie ustanovki i ikh primeneniye v eksperimentalnykh issledovaniakh [Ballistic Installation and their Use in Experimental Studies]*. Under the editorship of N.L. Zlatin, G.I. Mishin. Moscow. Nauka Publ. 1974. 344 p. (In Russian).
8. Forrestal M.J., Lee L.M., Jenrette B.D. Laboratory-scale penetration experiments into geological targets up to impact velocities of 2.1 km/s. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1986. Vol. 53. Iss. 2. P. 317–320.
9. Bivin Yu.K. Penetration of rigid bodies into loose and layered media. *Mechanics of Solids*. 2008. No 1. P. 131–136.

10. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Optimal 3D impactors penetrating into layered targets. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 27. No 3. P. 161–166.
11. Aptukov V.N. Optimal'naya struktura neodnorodnoi plastiny s nepreryv-nym raspredeleniem svoystv po tolshchine [Optimal design of an inhomogeneous plate with continuous distribution of properties along thickness]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1985. No 3. P. 149–152 (In Russian).
12. Aptukov V.N., Belousov V.L., Kanibolotskii M.A. Optimization of the structure of a layered slab with the penetration of a rigid striker. *Mechanics of Composite Materials*. 1986. Vol. 22. Iss. 2. P. 179–181.
13. Kanibolotskii M.A., Urzhumtsev Iu.S. *Optimalnoe proektirovanie sloistykh konstrukttsii [Optimal Design of Layered Structures]*. Novosibirsk. Nauka Publ. 1989. P. 176 p. (In Russian).
14. Alekhin V.V., Urzhumtsev Yu.S. *Optimizatsiia sloistykh sistem [Optimization of Layered Systems]*. Yakutsk. YaF SO RAN Publ. 2002. 177 p. (In Russian).
15. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udara i pronikaniia osesimmetrichnykh tel i zadachi identifikatsii svoystv gruntovykh sred [Mathematical Modeling of Unsteady Processes of Impact and Penetration of Axisymmetric Bodies and Objectives Identification of the Properties of Groundwater Environments]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2011. 208 p. (In Russian).
16. Aptukov V.N., Murzakaev A.V., Fonarev A.V. *Prikladnaya teoriya pronikaniya [Applied Theory of Penetration]*. Moscow. Nauka Publ. 1992. 103 p. (In Russian).
17. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied High-speed Plate Penetration Dynamics*. Dordrecht, Netherland. Springer. 2006. 357 p.
18. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimizatsiya formy zhestkogo tela, vnedryayushegosya v sploshnyuyu sredu [Shape optimization of rigid body, penetrating into continuous medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2007. Iss. 69. P. 47–58 (In Russian).
19. Bazhenov V.G., Kotov V.I., Linnik E.Yu. Models of calculation of axisymmetrical solids with the lowest drag during motion in soils. *Doklady Physics*. 2013. Vol. 58. No 3. P. 100–103.
20. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. *Optimizatsiya: Kontaktnye zadachi i vysokoskorostnoe pronikanie [Optimization: Contact Problems and High-speed Penetration]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 176 p. (In Russian).

#### ON AXISYMMETRIC IMPACTOR MOVING IN MEDIA WITH LINEARLY CHANGED STRENGTH CHARACTERISTICS

**Banichuk N.V.<sup>1,2</sup>, Otgonbayar S.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (State University),  
Moscow region, Dolgoprudny, Russian Federation*

The questions of rigid body motion in deformable media are considered. Under assumption that the penetrating bodies (impactors) are axisymmetric, their motion is investigated and the depth of penetration into continuous medium is evaluated. The process of high-speed penetration of rigid body into deformable medium is modelled by using the two-member representation for the resistance force. Under assumption that the body contacts fully with medium in the initial moment of the motion and moves in this medium up to stopping, the relation was obtained, which allows determine the depth of penetration. The case of penetration into homogeneous media is investigated as for as the case of motion in the medium with nonhomogeneous strength and dynamical characteristics. It is investigated the case when the strength characteristics of the medium are changed linearly. Media with increasing and decreasing strength properties are considered. The dependencies of the depth of penetration on the parameter characterizing the strength properties of the medium are presented.

*Keywords:* high-speed penetration, axisymmetric strikers, nonhomogeneous media.