ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ, вып. 67, 2005 г.

УДК 539.3

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА И ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г.В. Костин, В.В. Саурин

Москва

Рассматриваются возможные модификации управляющих уравнений линейной теории упругости. С этой целью алгебраическая формулировка закона Гука заменяется на интегральную. Полученная в результате такой замены интегро-дифференциальная краевая задача сводится к вариационной задаче, для которой применимы хорошо разработанные методы численного решения. Предлагаются двусторонние оценки интегральных характеристик деформированного тела. Для демонстрации возможности данного подхода применяется численно-аналитический алгоритм полиномиальных аппроксимаций функций напряжений и перемещений.

1. Введение

К настоящему времени разработано значительное количество методов решения задач линейной теории упругости. Среди этого многообразия основное место занимают подходы, основанные на вариационных принципах механики [1, 2]. Для нахождения приближенных решений задач линейной теории упругости широкое распространение получил метод конечного элемента (МКЭ), сводящий исходную вариационную постановку к конечномерной линейной системе уравнений [3, 4]. Наряду с МКЭ активно разрабатываются и другие походы, такие, например, как метод Петрова–Галеркина [5, 6], разнообразные модификации метода наименьших квадратов [7] и т. д. Это связано с тем, что разработанные схемы МКЭ имеют ряд ограничений. При построении конечномерной аппроксимации напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого тела достаточно трудно получить двустороннюю оценку сходимости численного процесса. Это обстоятельство не позволяет достаточно эффективно контролировать ошибки вычислений, связанные, например, с дискретизацией задачи, погрешностями округления, численным интегрированием и т. п. Разрывы функций компонент тензора напряжений на границах элементов, связанные с применением негладких аппроксимаций перемещений, нарушают уравнения равновесия и приводят к появлению паразитных поверхностных сил. Интегральное задание граничных условий в напряжениях не гарантирует точности их выполнения при конечномерном моделировании.

В данной статье рассматриваются возможные модификации управляющих уравнений линейной теории упругости. С этой целью алгебраическая формулировка закона Гука заменяется на интегральную. Полученная в результате такой замены интегро-дифференциальная краевая задача сводится к вариационной задаче, для которой применимы хорошо разработанные методы численного решения [8, 9].

Предлагаются двусторонние оценки интегральных характеристик деформированного тела. Для демонстрации возможности данного подхода применяется численно-аналитический алгоритм полиномиальных аппроксимаций функций напряжений и перемещений (см. [10, 11]).

2. Формулировка краевой задачи упругости

Рассмотрим упругое тело, занимающее некоторую область Ω ($\mathbf{r} \in \Omega$) с границей γ. Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки тела. Считается, что на части границы γ_u заданы перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, а на части границы γ_σ заданы напряжения $\sigma(\mathbf{r})$, причем $\gamma_u \cap \gamma_\sigma = 0$ и $\gamma_u \cup \gamma_\sigma = \gamma$. НДС тела описывается системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^0_{kl}, \tag{2}$$

$$\varepsilon^0_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \tag{3}$$

Граничные условия запишем в следующем виде:

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{\sigma}_j, \quad x \in \gamma_\sigma, \tag{4}$$

$$u_k = \overline{u}_k, \quad x \in \gamma_u, \tag{5}$$

где σ_{ij}, ε^0_{ij}, u_k, n_j – соответственно компоненты тензора напряжений σ, тензора деформаций ε^0, вектора перемещений $\mathbf{u}$ и единичного вектора нормали к границе $\mathbf{n}$ в некоторой декартовой системе координат $\mathbf{r} = \{x_i\}$; $\overline{\sigma}_j$ и $\overline{u}_k$ – компоненты заданных вектор-функций $\overline{\sigma}$ и $\overline{\mathbf{u}}$ от координат x_i. Константы C_{ijkl} являются компонентами тензора модулей упругости $\mathbf{C}$ ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij}$). В трехмерном случае индексы i, j, k, l принимают значения $1, 2, 3$. В данной работе считается, что объемные силы отсутствуют.

Система (1)–(5) представляет собой уравнения Эйлера и граничные условия вариационной задачи (принцип минимума потенциальной энергии [1]):

$$\Pi = \int_\Omega A(\mathbf{u})d\Omega - \int_{\gamma_\sigma} (\overline{\sigma}, \mathbf{u})d\gamma_\sigma \to \min_{\mathbf{u}}, \tag{6}$$

где A – плотность энергии деформации, которая определяется как свертка двух тензоров второго ранга σ и ε^0:

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon^0. \tag{7}$$

Известно, что соотношения (1)–(3) описывают НДС в любой внутренней точке упругого тела, занимающего область Ω. При этом считается, что напряжения во внутренних точках тела должны непрерывно переходить в напряжения на границе, то есть должны быть справедливы соотношения (4). Таким же образом перемещения внутренних точек непрерывно переходят в граничные значения, описываемые равенством (5). Заметим, что неявно предполагается непрерывность перехода компонент тензора модулей упругости $\mathbf{C}$, определенного для внутренних точек, на границу тела γ [1]. С другой стороны, необходимо принять во внимание, что граничные условия (4), (5) не могут быть заданы без учета тех физических факторов, которые порождают эти условия. Например, некоторая часть границы может быть поверхностью раздела двух или нескольких сред (как упругих, так и неупругих). В этом случае любая граничная точка принадлежит как рассматриваемому телу, так и телам, которые порождают эти граничные условия, то есть тензор модулей упругости на данной границе, вообще говоря, не определен.

Для того чтобы ввести в задачу линейной теории упругости неопределенность компонент тензора модулей упругости $\mathbf{C}$, на границе тела предлагается следующая интегральная формулировка закона Гука:

$$\int_{\Omega}(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})\cdot(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})d\Omega=0. \tag{8}$$

Из этого равенства следует, что компоненты тензоров σ и $\mathbf{C}\varepsilon^0$ равны между собой в области Ω везде, за исключением, быть может, точек, составляющих множество меры ноль (например, на некоторой части границы области Ω).

Обобщить закон Гука можно и другими способами, к примеру, вводя интегральные нормы невязки закона Гука в виде

$$\int_{\Omega}\left[(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})\cdot(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})d\Omega\right]^{p}=0, \tag{9}$$

где p – произвольное положительное число ($p\geq 1/2$). Однако эти соотношения при значении параметра $p\neq 1$ приводят к необходимости решения нелинейных задач. Определяя закон Гука согласно соотношению (8), из (1)–(5) получаем интегро-дифференциальную задачу:

$$\nabla\sigma=0, \tag{10}$$

$$\int_{\Omega}(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})\cdot(\sigma-\mathbf{C}\varepsilon^{0})d\Omega=0, \tag{11}$$

$$\varepsilon^{0}_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k}), \tag{12}$$

$$\sigma\mathbf{n}\big|_{\gamma_\sigma}=\overline{\sigma}, \tag{13}$$

$$\mathbf{u}\big|_{\gamma_u}=\overline{\mathbf{u}}. \tag{14}$$

В дальнейшем для удобства записи введем два новых тензора σ^0 и ε, связанных с тензорами ε^0 и σ линейными соотношениями:

$$\sigma^{0}=\mathbf{C}\varepsilon^{0}, \tag{15}$$

$$\sigma=\mathbf{C}\varepsilon. \tag{16}$$

Используя тензоры ε^0, σ^0, ε, σ, интегральное соотношение (11) можно переписать следующими способами:

$$\int_{\Omega}(\sigma-\sigma^{0})\cdot(\sigma-\sigma^{0})d\Omega=0, \tag{17}$$

$$\int_{\Omega}(\sigma-\sigma^{0})\cdot\mathbf{C}(\varepsilon-\varepsilon^{0})d\Omega=0, \tag{18}$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}(\varepsilon - \varepsilon^0) \cdot \mathbf{C}(\varepsilon - \varepsilon^0) d\Omega = 0. \tag{19}$$

Так как тензоры ε^0 и ε линейно связаны соответственно с тензорами σ^0 и σ, приведенное интегральное равенство (17) для σ^0 и σ имеет аналог и для ε^0 и ε. Можно показать, что если соотношение (17) верно, то выполняются также равенства:

$$\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon^0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^0) d\Omega = 0, \tag{20}$$

$$\int_{\Omega} (\sigma - \sigma^0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^0) d\Omega = 0. \tag{21}$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (21) имеет размерность плотности энергии, а также, что подынтегральные функции в равенствах (17) и (20) заведомо, как полные квадраты, неотрицательны. Следовательно, и соответствующие интегралы неотрицательны для произвольных значений функций $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{u}$:

$$\Phi_1 = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^0) \cdot (\sigma - \sigma^0) d\Omega \ge 0, \tag{22}$$

$$\Phi_2 = \int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon^0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^0) d\Omega \ge 0. \tag{23}$$

Предложенная интегральная формулировка закона Гука (17) позволяет привести интегро-дифференциальную задачу линейной теории упругости (10)–(14) к вариационной. Действительно, если решение системы (10)–(14) σ^* и $\mathbf{u}^*$ существует, то функционалы Φ_1 и Φ_2 достигают на этом решении своего минимума:

$$\Phi_1(\sigma^*, \mathbf{u}^*) = \min_{\sigma, \mathbf{u}} \Phi_1(\sigma, \mathbf{u}) = 0, \tag{24}$$

$$\Phi_2(\sigma^*, \mathbf{u}^*) = \min_{\sigma, \mathbf{u}} \Phi_2(\sigma, \mathbf{u}) = 0. \tag{25}$$

В соответствии с (21) введем в рассмотрение следующий функционал:

$$\Phi_3 = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^0) d\Omega. \tag{26}$$

Если подынтегральная функция неотрицательна

$$(\sigma - \sigma^0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^0) = \sigma \cdot \mathbf{C}^{-1}\sigma + \varepsilon^0 \cdot \mathbf{C}\varepsilon^0 - \sigma \cdot \varepsilon^0 - \mathbf{C}^{-1}\sigma \cdot \mathbf{C}\varepsilon^0 \ge 0, \tag{27}$$

то и функционал $\Phi_3 \ge 0$.

Неравенство (27) просто доказывается для изотропных и ортотропных материалов. Доказательство для произвольного упругого анизотропного тела требует специального рассмотрения.Следовательно, интегро-дифференциальная задача (10)–(14) может быть сведена к задачам минимизации функционалов Φ_i, $i = 1, 2, 3$, с ограничениями (10), (12)–(14).

В случае, если точно решить поставленные вариационные задачи не удается, используют приближенные методы, которые для такого типа задач часто предполагают конечномерную аппроксимацию искомого решения и сведение задачи условной минимизации квадратичных функционалов Φ_i, $i = 1, 2, 3$, к задаче математического программирования. Эти методы достаточно хорошо разработаны и изучены [8, 9]. Одним из наиболее важных вопросов приближенного решения рассматриваемых задач является построение эффективных оценок сходимости численного алгоритма.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $\Phi_3(\sigma, \mathbf{u})$ (см. (26)). Преобразуем неравенство (27) к виду

$$\frac{1}{4}(\sigma \cdot \varepsilon + \sigma^0 \cdot \varepsilon^0) \geq \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon^0. \tag{28}$$

Заметим, что в правой части этого неравенства стоит выражение для плотности упругой энергии $A = 1/2\sigma{\cdot}\varepsilon^0$. Если $\sigma{\cdot}\varepsilon \geq \sigma^0{\cdot}\varepsilon^0$, то верно следующее соотношение:

$$2\sigma \cdot \varepsilon \geq \sigma \cdot \varepsilon + \sigma^0 \cdot \varepsilon^0 \geq 2\sigma \cdot \varepsilon^0.$$

И наоборот, если $\sigma^0{\cdot}\varepsilon^0 \geq \sigma{\cdot}\varepsilon$, то

$$2\sigma^0 \cdot \varepsilon^0 \geq \sigma \cdot \varepsilon + \sigma^0 \cdot \varepsilon^0 \geq 2\sigma \cdot \varepsilon^0.$$

Тогда для точного решения данной вариационной задачи соответствующая квадратичная форма $A^* = A(\sigma^*, \mathbf{u}^*)$ подчиняется ограничениям:

$$A_{\min} \leq A^* \leq A_{\max}, \tag{29}$$

где

$$A_{\min} = \min\left\{\frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon, \frac{1}{2}\sigma^0 \cdot \varepsilon^0, \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon^0\right\},$$

$$A_{\max} = \max\left\{\frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon, \frac{1}{2}\sigma^0 \cdot \varepsilon^0\right\}.$$

То есть для плотности энергии A^* верна оценка сверху в (29). Нетрудно убедиться в том, что ограничение снизу справедливо. Из (29) следует интегральная оценка запасенной телом упругой энергии

$$W_{\min} \leq W^* \leq W_{\max}, \tag{30}$$

где

$$W^* = \int_\Omega A^* d\Omega, \quad W_{\min} = \int_\Omega A_{\min} d\Omega, \quad W_{\max} = \int_\Omega A_{\max} d\Omega.$$

3. Приближенное решение задачи упругости

Рассмотрим один из возможных алгоритмов приближенного решения задач условной минимизации функционалов Φ_i, $i = 1, 2, 3$, для двумерной задачи линейной теории упругости, основанный на полиномиальной аппроксимации неизвестных функций компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, y)$ и вектора перемещений $u_i(x, y)$ $(i, j = 1, 2)$. Ограничим рассмотрение случаем, когда заданная область Ω представляет собой выпуклое тело с кусочно-линейной границей γ. На каждой стороне многоугольника Ω в полиномиальной форме задаются граничные условия или на перемещения, или на напряжения. Предполагается, что объемные силы отсутствуют. Неизвестные функции компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектора перемещений **u** аппроксимируются полиномиальными функциями следующего вида:

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \sum_{k=0}^{n_\sigma} \sum_{l=0}^{k} \sigma_{ij}^{kl} x^l y^{k-l}, \quad i, j = 1, 2, \tag{31}$$

$$\widetilde{u}_i = \sum_{k=0}^{n_u} \sum_{l=0}^{k} u_i^{kl} x^l y^{k-l}, \quad i, j = 1, 2, \tag{32}$$

где σ_{ij}^{kl} и u_i^{kl} – некоторые неизвестные коэффициенты, а n_σ и n_u – заданные степени соответствующих аппроксимирующих полных полиномов $\widetilde{\sigma}_{ij}$, $\widetilde{u}_i$.

Такое представление функций напряжений и перемещений позволяет для выпуклого многоугольника Ω точно удовлетворить полиномиальным граничным условиям (13), (14) и уравнениям равновесия (10) при соответствующем выборе размерностей полиномов n_σ и n_u.

Для того чтобы удовлетворить уравнениям равновесия (10), которые в двумерном случае имеют вид:

$$\frac{\partial \widetilde{\sigma}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{22}}{\partial y} = 0, \tag{33}$$

должны выполняться следующие соотношения для коэффициентов σ_{ij}^{kl}:

$$\begin{gathered} l\sigma_{11}^{kl} + (k - l + 1)\sigma_{12}^{k,l-1} = 0, \\ l\sigma_{12}^{kl} + (k - l + 1)\sigma_{22}^{k,l-1} = 0, \\ l \le k \le n_\sigma, \quad 1 \le l \le k. \end{gathered} \tag{34}$$

Заметим, что при заданной размерности n_σ полиномов $\widetilde{\sigma}_{ij}$ число N_σ неизвестных констант σ_{ij}^{kl} определяется по формуле

$$N_\sigma = \frac{3}{2}(n_\sigma + 1)(n_\sigma + 2). \tag{35}$$

При этом после разрешения системы уравнений (34) число оставшихся неопределенных констант σ_{ij}^{kl} уменьшается до $\overline{N}_\sigma$, где

$$\overline{N}_\sigma = \frac{1}{2}(n_\sigma + 1)(n_\sigma + 6), \tag{36}$$

которые используются для удовлетворения граничным условиям на напряжения (13).

Отметим, что минимальное значение n_σ степени полиномов $\widetilde{\sigma}_{ij}$, необходимое для удовлетворения краевым условиям $\overline{\sigma}$, зависит от числа сторон M_σ многоугольника Ω, на которых задаются граничные условия на напряжения, и максимальной степени m_σ полиномов, определяющих эти граничные условия. Справедливы следующие гарантированные оценки числа n_σ:

$$n_\sigma \ge m_\sigma, \quad \overline{N}_\sigma \ge 2M_\sigma(n_\sigma + 1). \tag{37}$$

Аналогично получаются оценки для степени n_u полиномов $\widetilde{u}_i$:

$$n_u \geq m_u, \quad N_u \geq 2M_u(n_u+1), \tag{38}$$

где M_u – число сторон, на которых заданы граничные условия на перемещения; m_u – максимальная степень полиномов, задающих граничные условия на перемещения; N_u – число коэффициентов $\widetilde{u}_i$, определяемых по формуле

$$N_u = (n_u+1)(n_u+2). \tag{39}$$

Если в качестве подынтегральных функций берутся их конечномерные аппроксимации полиномами $\widetilde{\sigma}_{ij}$ и $\widetilde{u}_i$, удовлетворяющими уравнениям равновесия и краевым условиям, то задачи минимизации функционалов $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\mathbf{u}})$, $i = 1, 2, 3$, имеют вид:

$$\widetilde{\Phi}_1 = \int_\Omega (\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}^0) \cdot (\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}^0) d\Omega \to \min_{\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathbf{u}}}, \tag{40}$$

$$\widetilde{\Phi}_2 = \int_\Omega (\widetilde{\varepsilon} - \widetilde{\varepsilon}^0) \cdot (\widetilde{\varepsilon} - \widetilde{\varepsilon}^0) d\Omega \to \min_{\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathbf{u}}}, \tag{41}$$

$$\widetilde{\Phi}_3 = \int_\Omega (\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}^0) \cdot (\widetilde{\varepsilon} - \widetilde{\varepsilon}^0) d\Omega \to \min_{\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathbf{u}}}. \tag{42}$$

После интегрирования по области Ω задачи (40)–(42) сводятся к минимизации соответствующих квадратичных форм

$$\widetilde{\Phi}_i = \mathbf{w}^T \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{w} + 2\mathbf{b}^{(i)} \mathbf{w} \to \min_{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^N}. \tag{43}$$

Здесь $\mathbf{w}$ – n-мерный вектор независимых проектных параметров, полученный из N оставшихся неизвестных коэффициентов σ_{ij}^{kl} и u_i^{kl} в (31), (32); $\mathbf{K}^{(i)} \in \mathrm{R}^{N \times N}$ – симметричная положительная матрица; $\mathbf{b}^{(i)} \in \mathrm{R}^N$ – вектор, обусловленный граничными условиями. Векторы $\mathbf{w}^{(i)*}$, доставляющие минимум соответствующим функционалам $\widetilde{\Phi}_i$ в (40)–(42), определяются как решения следующих линейных систем уравнений (в дальнейшем задачи 1, 2, 3):

$$\mathbf{K}^{(i)} \mathbf{w} + \mathbf{b}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{44}$$

4. Численный пример

Рассмотрим задачу поперечного изгиба прямоугольной защемленной пластины (изгиб консоли). Считается, что изотропная пластина длиной l и высотой b нагружена распределенной силой $p(y)$, приложенной к стороне с координатой $x = l$, и защемлена на стороне $x = 0$. Остальные стороны пластины считаются свободными от нагрузок. На данном примере исследуются вопросы сходимости и точности предложенного подхода к решению задач линейной теории упругости.

При численном моделировании были выбраны следующие безразмерные параметры: $l = 10$, $b = 1$, модуль Юнга $E = 1$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Граничные условия заданы в виде:

$$\sigma_{22}\big|_{y=0} = \sigma_{22}\big|_{y=1} = \sigma_{12}\big|_{y=0} = \sigma_{12}\big|_{y=1} = \sigma_{11}\big|_{x=10} = 0, \tag{45}$$

$$\sigma_{12}\big|_{x=10} = 6(y - y^2), \quad P = \int_0^1 \sigma_{12}\big|_{x=10} dy = 1, \tag{46}$$

$$u_1\big|_{x=0} = u_2\big|_{x=0} = 0. \tag{47}$$

Неизвестные функции σ_{ij} и u_i аппроксимируются полиномами, определенными в (31), (32). При этом считается, что $n_u = n_\sigma + 1$. После удовлетворения краевым условиям (45)–(47) и уравнениям равновесия, для нахождения приближенных значений $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\tilde{\mathbf{u}}$ решаются задачи минимизации функционалов $\tilde{\Phi}_i$, $i = 1, 2, 3$, определенных в (40)–(41), для различных степеней полиномов n_σ.

Полученные результаты сравниваются с результатами приближенного решения классической вариационной задачи теории упругости (6), (7) (задача 4), в которой функции перемещений u_i аппроксимируются полными полиномами степени n_W.

Эта задача также сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^{(4)}\mathbf{w} + \mathbf{b}^{(4)} = 0, \\ \mathbf{K}^{(4)} \in \mathrm{R}^{N_W \times N_W}, \quad \mathbf{w}, \mathbf{b}^{(4)} \in \mathrm{R}^{N_W}, \end{gathered} \tag{48}$$

где N_W – число проектных параметров. При заданных параметрах пластины величина прогиба на свободном конце, вычисленная с помощью балочной теории, $u_2^0 = 4000$. Максимальная относительная ошибка при максимальной размерности $N \approx 400$ для всех четырех задач по сравнению с прогибом u_2^0 составляет примерно $\delta_{u_2}^{i0} \approx 1{,}5\%$, где

$$\delta_{u_2}^{ij}(N) = \frac{u_2^{(i)}(N) - u_2^{(j)}(N)}{u_2^{(j)}(N)} \cdot 100\%, \quad i, j = 0,..,4. \tag{49}$$

Отметим, что для всех N задача 2 дает оценку сверху для величины прогиба $u_2(10, 0)$. При этом функция $u_2^{(2)}(N)$ начинает монотонно убывать при $N > N_0 = 227$. Вследствие монотонного возрастания функций $u_2^{(i)}(N)$, $i = 1, 3, 4$, в качестве оценки снизу можно выбрать, например, функцию $u_2^{(3)}(N)$.

Так же, как и для прогиба $u_2(10,0)$, задача 2 дает монотонно убывающую оценку сверху, а задачи 1, 3 соответственно монотонно возрастающую оценку снизу для значения запасенной упругой энергии W.

Отметим, что оценки сверху и снизу для энергии W можно получить также из решения только одной задачи (например, третьей). Функция $W_\sigma = 1/2\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon \, d\Omega$ монотонно убывает и является оценкой сверху для энергии W, а функция $W_u = 1/2\int_\Omega \sigma^0 \cdot \varepsilon^0 d\Omega$ монотонно возрастает и является оценкой снизу для W с увеличением N.

Важной характеристикой сходимости приближенного решения задач 1, 2, 3 является скорость стремления к нулю соответствующих значений функционалов Φ_1, Φ_2, Φ_3 как функций, зависящих от N.

В таблице для $N = 350$ ($n_\sigma = 15$) помещены значения функционалов Φ_i и относительные погрешности, определяемые следующими выражениями для соответствующих задач:

$$\delta_1 = \frac{\Phi_1}{\int\limits_\Omega \sigma \cdot \sigma^0 d\Omega} \cdot 100\%,$$

$$\delta_2 = \frac{\Phi_2}{\int\limits_\Omega \varepsilon \cdot \varepsilon^0 d\Omega} \cdot 100\%,$$

$$\delta_3 = \frac{\Phi_3}{\int\limits_\Omega \sigma \cdot \varepsilon^0 d\Omega} \cdot 100\%.$$

Таблица

№	1	2	3
Φ_i	3,88	5,80	4,74
δ_i	0,097	0,129	0,117

Имеется равномерное монотонное убывание значений функционалов Φ_1, Φ_2, Φ_3 как функций от числа независимых переменных N при решении задач 1, 2, 3.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02–01–00157, 02–01–00252, 03–01–96586, 05–01–00563, 05–08–18094), программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (1627.2003.1) и фонда NWO (047.014.007).

Литература

1. *Васидзу*, *К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

2. *Сьярле*, *Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

3. *Зенкевич*, *О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

4. *Бате*, *К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

5. *Kwon*, *K.C.* The least squares method for solving linear elastic problems/ K.C. Kwon [et al.] // Computational mechanics. – 2003. – V. 30. – P. 196–211.

6. *Atluri*, *S.N.* A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics / S.N. Atluri, T. Zhu // Computational mechanics. – 1998. – V. 22. – P. 117–127.

7. *Belytschko*, *T.* Element-free Galerkin method / T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu // International Journal of Numerical Methods in Engineering. – 1994. – V. 37. – P. 229–256.

8. *Баничук*, *Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 302 с.

9. *Хог*, *Э.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции / Э. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1983. – 480 с.

10. *Kostin*, *G.V.* Analytical Derivation of Basis Functions for Argyris Triangle / G.V. Kostin, V.V. Saurin // ZAMM. – 2001. – V. 81. – Sup. 4. – P. 871–872.

11. *Kostin*, *G.V.* Analysis of Triangle Membrane Vibration by FEM and Ritz Method with Smooth Piecewise Polynomial Basis Functions / G.V. Kostin, V.V. Saurin // ZAMM. – 2001. – V. 81. – Sup. 4. – P. 873–874.

[24.02.2005]