

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИСКРИВЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТОЙ СТРУКТУРЫ

© 2017 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

*Поступила в редакцию 16.06.2017*

В приближении Кармана сформулирована задача упругопластического деформирования гибких слоисто-волоконистых стержней малой кривизны и нерегулярной структуры. Стержни состоят из двух поясов несущих слоев (полк), соединенных тонкой стенкой. В рамках модели Тимошенко учитывается ослабленное сопротивление стенки сдвигу в ее плоскости. Несущие слои армируются в продольном направлении, а полки усиливаются перекрестно в своей плоскости или продольно. Упругопластическое поведение компонентов композиции описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Для численного интегрирования поставленной задачи использована явная схема «крест». Проведены расчеты динамического изгибного деформирования однородных и композитных, прямолинейных и искривленных плоских стержней двутаврового поперечного сечения под действием нагрузок взрывного типа. Показано, что классическая теория изгиба таких конструкций может оказаться неприемлемой не только для расчета металлокомпозитных, но и однородных металлических слоистых стержней, имеющих унифицированные прокатные профили типа двутавров. Продемонстрировано, что рациональные для прямолинейных стержней структуры армирования стенки могут оказаться неэффективными в случае искривленных стержней. Установлено, что динамическое неупругое поведение искривленных стержней зависит от направления действия внешней поперечной нагрузки взрывного типа.

*Ключевые слова:* слоистые искривленные стержни, армирование, модель Тимошенко, геометрическая нелинейность, изгибное деформирование, теория пластического течения, изотропное упрочнение, динамические нагрузки, схема «крест».

### **Введение**

Композитные конструкции все более широко внедряются в авиа- и судостроении [1–3], причем наиболее часто используемые тонкостенные композитные элементы типа пластин, искривленных панелей и оболочек, как правило, подкрепляются силовым стержневым набором [4, 5], который также может быть выполнен из

композитных материалов. Согласно проведенным ранее исследованиям, рациональными являются тонкостенные элементы конструкций слоисто-волокнутой структуры [5–8], поэтому актуальна проблема адекватного моделирования механического поведения таких элементов [6, 9–15].

Современные инженерные изделия, особенно аэрокосмического назначения, испытывают интенсивное нагружение, при котором материалы деформируются неупруго. Следовательно, на первый план выступает проблема математического моделирования упругопластического деформирования тонкостенных композитных конструкций, в том числе прямолинейных и криволинейных стержневых элементов слоисто-волокнутой структуры. Эта проблема на сегодняшний день находится в зачаточном состоянии. В частности, в [7, 8, 16] рассматривались вопросы статического и динамического неупругого деформирования армированных балок. Особенность этих исследований заключается в том, что они проводились на основе классической теории, в рамках которой не учитываются поперечные сдвиги. Однако в [13] с использованием деформационной теории пластичности продемонстрировано, что при изучении изгибного квазистатического деформирования слоисто-волокнутой балки нерегулярной структуры необходимо учитывать ослабленное сопротивление их стенок поперечным сдвигам. Динамическое упругопластическое (в рамках теории течения) поведение многослойных балок исследовалось в [6, 9], где поперечные сдвиги учитывались на базе гипотезы ломаной линии и в рамках первого варианта теории Тимошенко. В [14] моделировалось упругопластическое деформирование прямолинейных продольно-армированных балок-стенок, причем их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам учитывалось в рамках двух вариантов теории Тимошенко. В [15] изучалось динамическое неупругое поведение прямолинейных гибких балок нерегулярной слоисто-волокнутой структуры, поперечные сдвиги в тонких стенках таких конструкций учитывались в рамках первого варианта теории Тимошенко. При этом в [14, 15] для материалов фаз композиции использовались определяющие соотношения теории пластического течения с изотропным упрочнением.

Настоящая статья посвящена изучению динамического поведения искривленных слоисто-волокнутой стержней нерегулярной структуры с учетом поперечных сдвигов в их стенках, упругопластическое деформирование компонентов композиции которых характеризуется соотношениями теории Прандтля – Рейсса – Хилла [17]. Для численного интегрирования такой задачи используется явная схема «крест».

## 1. Постановка задачи и метод расчета

Рассматриваются прямолинейные или искривленные в плоскости  $Ox_1x_2$  стержни длиной  $L$ , имеющие слоистую нерегулярную структуру (рис. 1). Слои контактируют без отрыва и проскальзывания, изготовлены из однородных конструкционных материалов или квазиоднородно армированы.

На основании известных требований рационального проектирования изгибаемых стержней [5, 8, 13, 15, 18] предполагаем, что такие конструкции состоят из двух поясов несущих слоев (полок), которые соединены стенкой. Условимся называть стенку слоем с номером  $m = 0$ . Полки над стенкой пронумеруем снизу вверх:  $1 \leq m \leq M^{(+)}$ , а полки, расположенные ниже стенки, – сверху вниз:  $-M^{(-)} \leq m \leq -1$  ( $M^{(-)} > 0$ ), где  $m$  – номер слоя,  $M^{(-)}$  и  $M^{(+)}$  – количество полок под и над стенкой. На рис. 2а изображено поперечное сечение пятислойного стержня ( $M^{(\pm)} = 2$ ), причем

стенка и несущие слои с номерами  $m = -1$  и  $m = 2$  армированы. На рис. 2б,в приведены поперечные сечения трехслойных ( $M^{(\pm)} = 1$ ) стержней, причем на рис. 2в несущие слои ( $m = \pm 1$ ) армированы.

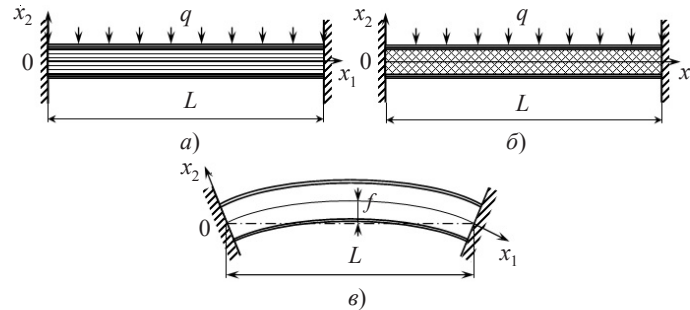


Рис. 1. Слоистые стержни нерегулярной структуры с жестко закрепленными концами:  
 а – прямолинейный с продольным армированием стенки; б – прямолинейный с перекрестным армированием стенки; в – искривленный с неармированной стенкой

Свяжем со стержнем ортогональную систему координат  $x_i$  так, чтобы координата  $x_1$  была продольной, координата  $x_2$  направлена по высоте (см. рис. 1 и рис. 2а), а цилиндрическая поверхность  $x_1x_3$  ( $x_2 = 0$ ) совпадала со срединной поверхностью стенки ( $m = 0$ ). Поперечное сечение стержня симметрично относительно плоскости  $0x_1x_2$  (см. рис. 2), в которой рассматривается его изгибное деформирование. Предполагается, что  $H \ll L \ll R$ , где  $H$  – высота поперечного сечения стержня (см. рис. 2а);  $R$  – радиус кривизны отсчетной поверхности (на рис. 1в не изображен), то есть исследуются искривленные в плоскости  $0x_1x_2$  стержни малой кривизны, в силу чего стрела подъема  $f$  (см. рис. 1в) не должна превышать  $L/5$ . В этом случае метрику в плоскости  $0x_1x_2$  можно приблизительно отождествить с метрикой в прямоугольной декартовой системе координат (см. рис. 1а,б).

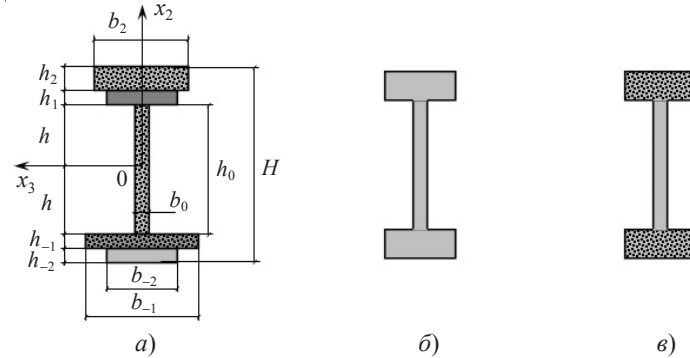


Рис. 2. Поперечные сечения слоистой балки:  
 а – произвольной пятислойной структуры с армированными внешними слоями и стенкой; б – двутавровой однородной; в – двутавровой с армированными полками

С целью упрощения изложения ограничимся случаем [13, 15], когда поперечное сечение  $m$ -го слоя – прямоугольники с размерами  $b_m, h_m, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$  (см. рис. 2а), где  $b_m, h_m$  – ширина и толщина слоя; при  $m = 0$  под  $h_0 = 2h$  понимаем высоту стенки, а под  $b_0$  – ее толщину. Кроме того, предполагаем, что толщина полок много меньше высоты стенки, а ширина полок (несущих слоев) существенно больше толщины стенки:

$$h_m \ll h_0, \quad b_0 \ll b_m, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad m \neq 0;$$

ширина полок не слишком большая и сопоставима с высотой стенки:

$$b_m \approx h_0 = 2h, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad m \neq 0,$$

то есть рассматриваемые слоистые конструкции не относятся к классу тонкостенных стержней, для которых справедливы неравенства  $b_m \gg h_0$ ,  $-M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$ ,  $m \neq 0$  [19]. Указанным условиям отвечают, например, прокатные двутавровые и тавровые профили [18].

Изгиб стержней в плоскости  $0x_1x_3$  и кручение не рассматриваются, то есть решение исследуемой задачи не зависит от координаты  $x_3$ .

Учет ослабленного сопротивления стенки слоистого стержня поперечному сдвигу будем осуществлять в рамках теории Тимошенко [19], поэтому для аппроксимации перемещений  $u_i$  и сдвиговой деформации  $\varepsilon_{12}$  используем формулы [15, 19]:

$$u_1(\mathbf{x}, t) = u(x_1, t) - x_2\theta(x_1, t), \quad u_2(\mathbf{x}, t) = w(x_1, t), \quad (1)$$

$$2\varepsilon_{12}(\mathbf{x}, t) \equiv 2\varepsilon_{12}(x_1, t) = \partial_1 w(x_1, t) - \theta(x_1, t), \quad \mathbf{x} \in \{x_1, x_1\}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0,$$

где  $w$  – прогиб;  $u$  – перемещение точек отсчетной поверхности ( $x_2 = 0$ ) в направлении  $x_1$ ;  $\theta$  – угол ротации плоского поперечного сечения вокруг оси  $x_3$ ;  $t$  – время;  $\partial_1$  – оператор частного дифференцирования по продольной координате  $x_1$ .

Геометрическую нелинейность задачи будем учитывать в приближении Кармана, то есть деформации предполагаются малыми, а повороты поперечных сечений – значительными. В силу этого с учетом (1) продольная деформация в искривленном стержне определяется так [19]:

$$\varepsilon_{11}(\mathbf{x}, t) = \partial_1 u(x_1, t) - x_2 \partial_1 \theta(x_1, t) + \frac{w(x_1, t)}{R(x_1)} + \frac{1}{2} (\partial_1 w(x_1, t))^2, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Каждый  $m$ -й слой может быть армирован  $K^{(m)}$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k^{(m)}$  ( $1 \leq k \leq K^{(m)}$ ), относительное объемное содержание материала связующего  $\omega_0^{(m)}$  в пределах репрезентативной ячейки композиции вычисляется по формуле [20]:

$$\omega_0^{(m)} = 1 - \sum_{k=1}^{K^{(m)}} \omega_k^{(m)}, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}. \quad (3)$$

Уругопластическое поведение материалов фаз композиции описывается соотношениями Прандтля – Рейсса – Хилла [17]. Согласно традиционным способам армирования [7, 8], предполагаем, что несущие слои усилены только в продольном направлении  $x_1$ . Следовательно, в рамках теории Тимошенко можно считать, что в полках реализуется одноосное напряженное состояние и определяющее уравнение в них имеет вид [14, 15]:

$$\dot{\sigma}_{11}^{(m)} = a_{11}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(m)}, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad m \neq 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_{11}^{(m)}$ ,  $\varepsilon_{11}^{(m)}$  – осредненные осевые напряжение и деформация в композиции  $m$ -го слоя ( $\varepsilon_{11}^{(m)}$  вычисляется по формуле (2));  $a_{11}^{(m)}$  – приведенная продольная эффективная «жесткость» композиции  $m$ -го несущего слоя (подробное ее определение приведено в [14, 15]); точка означает дифференцирование по времени  $t$ .

Стенка слоистого стержня может быть перекрестно усилена в плоскости  $0x_1x_2$ , причем направления армирования  $k$ -м семейством волокон характеризуются углом  $\varphi_k$ , отсчитываемым от продольного направления  $x_1$  (рис. 3). При этом в стенке ( $m=0$ ) реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, и определяющие соотношения можно записать так [14, 15]:

$$\dot{\sigma}_{11}^{(0)} = a_{11}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(0)} + a_{12}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{12}^{(0)}, \quad \dot{\sigma}_{12}^{(0)} = a_{21}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(0)} + a_{22}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{12}^{(0)}, \quad |x_2| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (5)$$

где  $\sigma_{12}^{(0)}$  – осредненное касательное напряжение в композиции стенки;  $a_{ij}^{(0)}$  – приведенные эффективные характеристики «жесткости» композиции стенки, способ вычисления которых приведен в [14, 15].

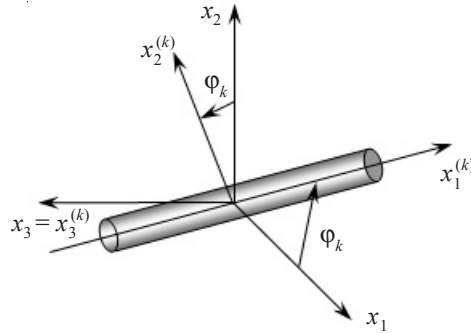


Рис. 3. Система координат, связанная с арматурой  $k$ -го семейства в стенке

К кинематическим (1), (2) и определяющим (4), (5) соотношениям следует добавить уравнения динамического равновесия гибкого искривленного стержня, которые в случае приближения Кармана принимают вид [19]:

$$\begin{aligned} R_1 \ddot{u} &= \partial_1 (F_{11} - F_{12} \theta) + R^{-1} F_{12} - p(x_1, t) \partial_1 w, \\ R_1 \ddot{w} &= \partial_1 (F_{12} + F_{11} \partial_1 w) - R^{-1} F_{11} + p(x_1, t), \\ R_2 \ddot{\theta} &= F_{12} - \partial_1 M_{11}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где с учетом (3)–(5)

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, t) &= \iint_S \sigma_{11} dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{11}^{(m)} dS, \quad F_{12}(x_1, t) = \iint_{S_0} \sigma_{12}^{(0)} dS = b_0 \int_{-h}^h \sigma_{12}^{(0)} dx_2, \\ M_{11}(x_1, t) &= \iint_S \sigma_{11} x_2 dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{11}^{(m)} x_2 dS, \quad R_1 = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \rho^{(m)} dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \rho^{(m)} S_m, \\ R_2 &= \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \rho^{(m)} x_2 dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \rho^{(m)} S_m x_2^{(m)}, \quad \rho^{(m)} = \sum_{k=0}^{K^{(m)}} \rho_k^{(m)} \omega_k^{(m)}, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$p$  – распределенная погонная внешняя нагрузка, действующая по нормали к деформированной оси стержня (на рис. 1 изображен случай  $p = -q = \text{const}$ );  $F_{11}$ ,  $F_{12}$  – продольная и перерезывающая силы;  $M_{11}$  – изгибающий момент;  $S$  – площадь поперечного сечения стержня;  $S_m = b_m h_m$  – площадь поперечного сечения  $m$ -го слоя;  $\rho_k^{(m)}$  – объемная плотность материала  $k$ -й фазы композиции  $m$ -го слоя;  $x_2^{(m)}$  – ордината центра тяжести поперечного сечения  $m$ -го слоя.

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи необходимо использовать граничные и начальные условия, которые в рамках теории Тимошенко общеизвестны [9, 14, 15, 19].

Численное решение рассматриваемой начально-краевой задачи осуществляется на основе явной схемы «крест», которая подробно описана в [14, 15].

## 2. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретных примеров исследуем динамическое изгибное поведение трехслойных стержней с жестко закрепленными концами, изображенных на рис. 1 и имеющих длину  $L = 2$  м. Стержни могут быть как прямолинейными (см. рис. 1а,б), так и искривленными (см. рис. 1в) с постоянной кривизной ( $R = \text{const}$ ). В последнем случае радиус кривизны отсчетной поверхности  $R$  связан со стрелой подъема  $f$  соотношением

$$R = \frac{(L/2)^2 + f^2}{2f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{L}{5}, \quad L \ll R. \quad (8)$$

Для изогнутых стержней в расчетах примем  $f = 30$  см, поэтому, согласно (8), при  $L = 2$  м такие трехслойные стержни действительно имеют малую кривизну.

Слои стержней изготовлены из низкопрочного алюминиевого сплава АДМ или являются композитом, состоящим из этого сплава (в качестве связующего), усиленного волокнами бора или стальной проволокой У8А.

Механическое упругопластическое поведение материалов фаз композиции при активном нагружении описывается билинейной диаграммой растяжения – сжатия [17]:

$$\sigma_k^{(m)} = \begin{cases} E_k^{(m)} \varepsilon_k^{(m)}, & |\varepsilon_k^{(m)}| \leq \varepsilon_{s,k}^{(m)} \leq \sigma_{s,k}^{(m)} / E_k^{(m)}, \\ \text{sign}(\varepsilon_k^{(m)}) \sigma_{s,k}^{(m)} + E_{s,k}^{(m)} (\varepsilon_k^{(m)} - \text{sign}(\varepsilon_k^{(m)}) \varepsilon_{s,k}^{(m)}), & |\varepsilon_k^{(m)}| > \varepsilon_{s,k}^{(m)}, \end{cases} \quad (9)$$

$$0 \leq k \leq K^{(m)}, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)},$$

где  $\sigma_k^{(m)}$ ,  $\varepsilon_k^{(m)}$  – осевые напряжение и деформация  $k$ -го компонента композиции в  $m$ -м слое;  $E_k^{(m)}$ ,  $E_{s,k}^{(m)}$  – модули Юнга и линейного упрочнения того же материала;  $\sigma_{s,k}^{(m)}$ ,  $\varepsilon_{s,k}^{(m)}$  – предел текучести и соответствующая ему деформация того же материала.

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции рассматриваемых слоистых стержней приведены в таблице 1, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $a$  – скорость звука ( $a = \sqrt{E/\rho}$ ). Волокна бора являются упруго-хрупкими [20], поэтому значение модуля упрочнения  $E_s$  для них не указано.

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции [20]

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_s$ , ГПа	$a$ , м/с
Алюминиевый сплав АДМ	2710	0,3	30	71	0,143	5119
Стальная проволока У8А	7800	0,31	3968	210	6,973	5188
Волокна бора (В)	2550	0,23	3200	410	–	12680

На стержни действует динамическая нагрузка (см. (6)), вызванная приходом воздушной взрывной волны [21]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} \frac{t}{t_{\max}}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\alpha = -\frac{\ln 0,01}{t_{\min} - t_{\max}} > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (11)$$

$t_{\max}$  – момент времени, в который внешняя нагрузка  $p(t)$  достигает по модулю максимального значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  – момент времени, при котором нагрузка  $p(t)$  по модулю становится пренебрежимо малой по сравнению с  $|p_{\max}|$  (формула (11) соответствует случаю  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). На основании экспериментальных данных из [21] в расчетах принято  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс.

Поперечные сечения слоев исследуемых трехслойных ( $M^{(\pm)} = 1$ ) стержней (см. рис. 2б,в) имеют размеры

$$h_0 = 183,2 \text{ мм}, \quad b_0 = 5,2 \text{ мм}, \quad h_1 = h_{-1} = 8,4 \text{ мм}, \quad b_1 = b_{-1} = 100 \text{ мм}, \quad (12)$$

соответствующие характерным размерам поперечного сечения двутаврового прокатного профиля №20 [18].

Для проведения численных расчетов в продольном направлении стержней  $x_1$  вводилась равномерная сетка с шагом  $\Delta x_1 = L/200 = 1$  см, а шаг по времени  $\tau$  выбирался равным 0,2 мкс. При такой дискретизации задачи необходимое условие устойчивости схемы «крест» [6, 9] ( $\Delta x_1/\tau > a$ ) выполняется со значительным запасом для всех материалов фаз композиции, приведенных в таблице 1, а значит, необходимое условие устойчивости выполняется и для однородных и композитных стержней, изготовленных из этих материалов [14, 15].

На рис. 4 и 5 изображены зависимости  $w_*(t) = w(L/2, t)$ , то есть осцилляции центральных сечений стержней ( $x_1 = L/2$ ) в поперечном направлении  $x_2$  (см. рис. 1). Кривые 1, 2 и 1' на этих рисунках рассчитаны для искривленных стержней со стрелой подъема  $f = 30$  см (см. (8)), а линии 3 – для прямолинейных трехслойных стержней ( $f = 0$ ). Кривые 1 и 1' получены при  $p_{\max} = -2,5$  МН/м (см. (10)) и определены по теории Тимошенко и классической теории соответственно.

В последнем случае расчет выполнялся по численной схеме, построенной в [16], с учетом соотношений (7) за исключением выражения для перерезывающей силы  $F_{12}$ . Кривые 2 определены при  $p_{\max} = 2,5$  МН/м, а линии 3 – при  $p_{\max} = 1,3$  МН/м.

Сравнение зависимостей  $w_*(t)$ , рассчитанных по теории Тимошенко и классической теории, для прямолинейных стержней проводилось в [15], поэтому соответствующие кривые на рис. 4 и 5 не изображены. Кроме того, чтобы не загромождать эти рисунки, на них не приведены графики  $w_*(t)$ , полученные по классической теории для искривленных стержней при  $p_{\max} = 2,5$  МН/м.

На рис. 4а изображены зависимости  $w_*(t)$ , определенные для трехслойных однородных стержней из алюминиевого сплава АДМ. Сравнение кривых 1 и 1' на этом рисунке показывает, что классическая теория почти вдвое занижает значение максимального по модулю прогиба искривленного стержня при  $p_{\max} = -2,5$  МН/м. Примерно настолько же классическая теория занижает ту же величину и при  $p_{\max} = 2,5$  МН/м, а также и в случае прямолинейного трехслойного стержня [15]. Следовательно, классическая теория оказывается совершенно неприемлемой для расчета динамического упругопластического изгибного деформирования даже однородных

прямолинейных и искривленных стержней нерегулярной слоистой структуры, в том числе имеющих поперечные сечения в виде унифицированных прокатных профилей типа двутавров (см. (12)).

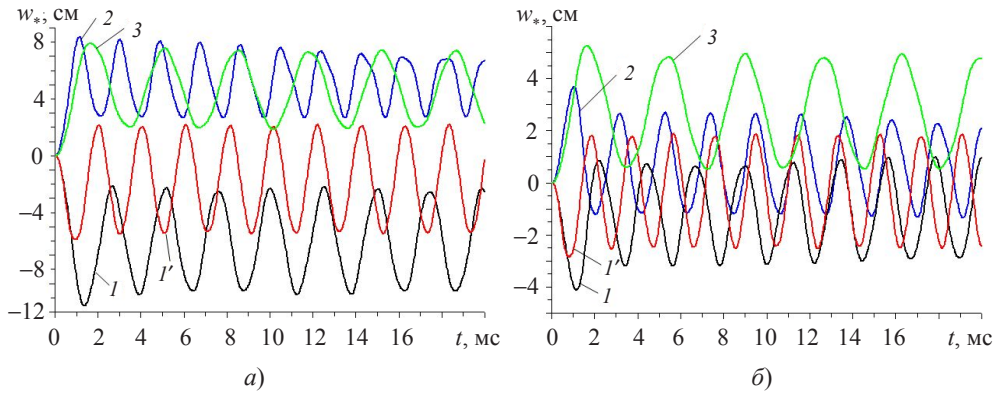


Рис. 4. Осцилляции центральных сечений трехслойных стержней:  
*a* – однородных; *б* – с армированными полками

Традиционно считается, что при изгибе слоистых стержней в первую очередь необходимо усиливать их несущие слои [7, 8], поэтому на рис. 4*б* изображены зависимости  $w_*(t)$ , рассчитанные в случае армирования полок алюминиевых стержней стальной проволокой У8А ( $K^{(\pm 1)} = 1, K^{(0)} = 0$ ). Оба несущих слоя усилены с одинаковой плотностью армирования  $\omega_1^{(\pm 1)} = 0,5$ , при этом относительное объемное содержание связующего материала в полках определяется по формуле (3).

Сопоставление кривых с одинаковыми номерами на рис. 4*а* и *б* свидетельствует о том, что армирование полок трехслойных стержней действительно приводит к существенному (более чем в два раза для изогнутых конструкций) уменьшению их податливости.

Дальнейшее уменьшение динамической податливости таких композитных стержней возможно только за счет армирования их стенок (при сохранении геометрии слоев и плотностей армирования полок). Полагаем, что обе полки алюминиевых трехслойных стержней армированы стальной проволокой У8А с прежней плотностью  $\omega_1^{(\pm 1)} = 0,5$ , а их стенки могут быть армированы по-разному. На рис. 5*а* приведены зависимости  $w_*(t)$ , рассчитанные для стержней, стенки которых усилены одним ( $K^{(0)} = 1$ ) семейством проволоки У8А, уложенным в продольном направлении  $x_1$  ( $\varphi_1 = 0$ ; см. рис. 1*а* и рис. 3) с плотностью армирования  $\omega_1^{(0)} = 0,5$ , а на рис. 5*б* изображены те же зависимости, определенные для случая, когда стенка армирована перекрестно двумя ( $K^{(0)} = 2$ ) семействами той же проволоки с плотностями  $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 0,25$  по направлениям  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$  (см. рис. 1*б* и рис. 3) – ортогональное угловое армирование. Следовательно, на рис. 5*а,б* приведены результаты расчетов для трехслойных композитных стержней, расход арматуры в которых одинаков. Отметим, что именно перекрестное угловое армирование стенок трехслойных стержней (см. рис. 1*б*) традиционно рекомендуется для устранения их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу [18].

Сопоставление кривых *I* и *I'* на рис. 5 и рис. 4*б* показывает, что не только для однородных трехслойных стержней (см. рис. 4*а*), но и для композитных искривленных стержней классическая теория может оказаться совершенно неприемлемой для



получения адекватных результатов расчетов динамического упругопластического их поведения даже в случае перекрестного армирования их стенок (см. рис. 5б).

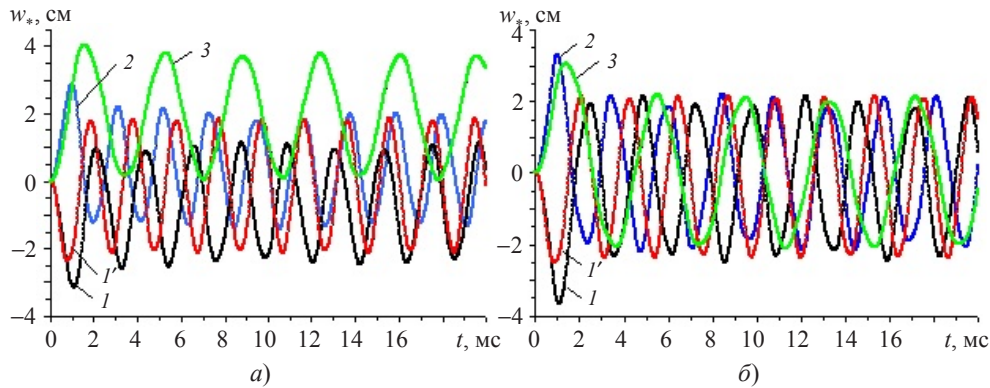


Рис. 5. Осцилляции центральных сечений трехслойных стержней с армированными полками и при: продольном *a*, перекрестном *б* армировании стенки

Сравнение максимальных по модулю значений зависимостей  $w_*(t)$ , соответствующих кривым 3 и 1, 2 на рис. 4 и 5, свидетельствует о том, что они примерно одинаковы, однако линии 3 рассчитаны при  $p_{\max} = 1,3$  МН/м, а кривые 1 и 2 – при  $|p_{\max}| = 2,5$  МН/м, то есть при внешней нагрузке почти вдвое большей по модулю. Следовательно, даже малое искривление однородных и композитных слоистых стержней приводит к существенному уменьшению их податливости в поперечном направлении.

Если изменить направление нагрузки, приложенной к прямолинейному слоистому стержню (см. рис. 1*a, б*), то его динамический отклик качественно не изменится. Так, при  $p_{\max} = -1,3$  МН/м для прямолинейных стержней при рассматриваемых структурах их армирования и геометрии зависимости  $w_*(t)$  будут представлять собой зеркальное отображение (относительно горизонтальной оси  $w_* = 0$ ) кривых 3, изображенных на рис. 4 и 5. Сравнение же кривых 1 и 2 на этих рисунках свидетельствует о том, что в случае искривленных стержней динамический отклик таких конструкций зависит от того, какой знак имеет поперечная нагрузка  $p(t)$ . Это сказывается как на частоте, так и на амплитуде колебаний и вызвано накоплением остаточных пластических деформаций и остаточных прогибов разных знаков.

На рис. 5 и рис. 4*б* отчетливо наблюдается, что значение  $|w_*|$ , соответствующее первому локальному экстремуму (при  $t > 0$ ) на кривых 1 и 2, существенно больше, чем в последующих локальных экстремумах. Это является следствием того, что после прохождения первого локального экстремума зависимости  $w_*(t)$  в стенках композитных стержней возникает вторичная пластичность противоположного знака, что приводит к заметной диссипации механической энергии таких конструкций.

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рис. 5 и рис. 4*б* показывает, что армирование стенки трехслойных стержней действительно приводит к некоторому уменьшению их динамической податливости. Однако эффект от такого типа армирования проявляется в значительно меньшей степени, чем ранее это наблюдалось при армировании полок (ср. кривые 1–3 на рис. 4*a* и *б*).

Сопоставление максимальных по модулю значений  $w_*(t)$  для кривых 3, изображенных на рис. 5*a* и *б*, демонстрирует, что для прямолинейных трехслойных стержней перекрестное угловое армирование стенки (см. рис. 1*б*) действительно оказы-

вается более эффективным с точки зрения уменьшения их податливости в поперечном направлении, чем армирование стенки в продольном направлении (см. рис. 1а), как это традиционно и принято считать [18]. Однако сравнение аналогичных величин для кривых 1 и 2, изображенных на тех же рисунках, свидетельствует об обратном: для искривленных стержней более эффективным является продольное армирование стенки. Дополнительные расчеты показали, что эта особенность в еще более яркой форме проявляется при армировании слоистых стержней волокнами бора, жесткость которых вдвое больше, чем у стальной проволоки У8А (см. (9) и таблицу 1). Следовательно, рациональные для прямолинейных слоистых стержней структуры армирования могут оказаться неэффективными для искривленных стержней, поэтому необходимо независимо ставить задачи рационального и оптимального армирования для прямолинейных и искривленных слоистых стержней.

В силу ограниченности объема статьи здесь не приведены результаты расчетов стержней из АДМ-В-композиции. Зависимости  $w_*(t)$  в этом случае оказались не столь наглядными, как для АДМ-У8А-стержней. В частности, по соответствующим кривым  $w_*(t)$  не столь отчетливо удастся проследить величину остаточного прогиба, вызванного пластическими деформациями материалов фаз композиции, как это имеет место на рис. 4 и 5. Вызвано это тем, что в расчетах, которым соответствуют рис. 4 и 5, интенсивность деформаций в материалах компонентов композиции достигала 3–5%, что вполне допустимо для АДМ-У8А-композиции, так как величина остаточной деформации после разрыва для сплава АДМ  $\delta_0 = 35\%$ , а для проволоки из стали марки У8А  $\delta_1 = 8,2\%$  [20]. В случае использования упруго-хрупких волокон бора деформации такого уровня для них недопустимы ( $\delta_1 = 0,5\%$  [20]), так как арматура будет разрушаться. К сожалению, на сегодняшний день отсутствуют структурные модели механики волокнистых композитов, учитывающие накопление повреждений и разрушение материалов фаз композиции. При уровнях динамических нагрузок, когда волокна бора не разрушаются, зависимости  $w_*(t)$  мало отличаются от случая чисто упругого поведения слоистых стержней из АДМ-В-композиции, поэтому соответствующие расчетные кривые и не приведены в настоящей статье.

### **Заключение**

Результаты расчетов упругопластического деформирования однородных и армированных прямолинейных и искривленных стержней нерегулярной слоистой структуры показали, что классическая теория приводит к совершенно неприемлемым результатам как для однородных, так и композитных стержней, динамически нагруженных в поперечном направлении. Для получения правильного представления о неупругом изгибном поведении композитных стержней слоисто-волокнистой структуры необходимо использовать теорию Тимошенко, учитывающую ослабленное сопротивление стенок таких стержней поперечному сдвигу.

При рациональном и оптимальном проектировании композитных стержней слоисто-волокнистой структуры необходимо усиливать не только несущие слои, но и стенки. При этом рациональные для прямолинейных стержней структуры армирования стенки могут оказаться нерациональными для искривленных конструкций. Классическая теория всегда предсказывает, что наилучшим является продольное армирование стенок, поэтому не рекомендуется ее использовать и при решении обратных задач целевого управления структурами армирования слоистых стержней нерегулярной структуры.

### Список литературы

1. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Composites. Part A*. 2001. **32**. P. 901–910.
2. Pajapakse Y.D.S., Hui D. Marine Composites: Foreword. *Composites. Part B – Engineering*. **32**. 2004. P. 447–450.
3. Михайлин Ю.А. *Конструкционные полимерные композиционные материалы*. 2-е изд. СПб.: Научные основы и технологии, 2010. 822 с.
4. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 336 с.
5. Мищенко А., Немировский Ю. *Структурно-неоднородные профилированные стержневые системы. Методы рационального и оптимального проектирования*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. 322 с.
6. Абросимов Н.А., Елесин А.В. Обоснование применимости макронеоднородных моделей в задачах динамики многослойных композитных балок. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1987. Вып. 35. С. 69–74.
7. Purkiss J.A., Wilson P.J., Blagojević P. Determination of the load-carrying capacity of steel fibre reinforced concrete beams. *Composite Struct.* 1997. Vol. 38. No 1–4. P. 111–117.
8. Немировский Ю.В., Батурин А.А. Метод расчета деформативности и прочности однотавровых и двутавровых железобетонных стержней. *Изв. вузов. Строительство*. 2015. №10. С. 82–93.
9. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
10. Pavlovski D., Szumigala M. Theoretical and numerical study of the flexural behaviour of BFRP RC beams. *Engng. Trans.* 2016. Vol. 64. No 2. P. 213–223.
11. Khan F., Kim Y.J. Time-dependent and residual behavior of pultruded GFRP beams subjected to sustained intensities and cold temperature. *Cold Regions Sci. and Technol.* 2012. Vol. 74–75. P. 43–51.
12. Ascione L., Berardi V.P., Giordano A., Spadea S. Buckling failure modes of FRP thin-walled beams. *Composites. Part B – Engineering*. 2013. Vol. 47. P. 357–364.
13. Янковский А.П. Исследование особенностей неупругого деформирования композитных балок слоисто-волокнутой структуры при термосиловом нагружении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №2. С. 131–144.
14. Янковский А.П. Моделирование упругопластической динамики продольно-армированных балок-стенки на основе явного по времени метода центральных разностей. *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 1. С. 54–77.
15. Янковский А.П. Моделирование динамического упругопластического поведения балок нерегулярной слоисто-волокнутой структуры. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2017. №1 (38). С. 45–56.
16. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты. *Вычислительные технологии*. 2004. Т. 9. №4. С. 77–95.
17. Зубчанинов В.Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
18. Ахметзянов М.Х., Грес П.В., Лазарев И.Б. *Сопrotивление материалов*. М.: Высшая школа, 2007. 334 с.
19. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. *Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы*. Т. 1. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2007. 670 с.
20. *Композиционные материалы. Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
21. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.

### References

1. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Composites. Part A*. 2001. **32**. P. 901–910.
2. Pajapakse Y.D.S., Hui D. Marine Composites: Foreword. *Composites. Part B – Engineering*. **32**. 2004. P. 447–450.
3. Mikhailin Yu.A. *Konstruktivnye polimernye kompozitsionnye materialy. 2-e izd.* [Constructional Polymeric Composite Materials. 2 edit.]. St. Petersburg. Scientific bases and technologies Publ. 2010. 822 p. (In Russian).
4. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoychivost uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi* [Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Shells of Non-uniform Structure: Models, Methods, Algorithms, the Insufficiently Studied and new Problems]. Moscow. LIBROKOM Publ. 2012. 336 p. (In Russian).
5. Mishchenko A., Nemirovskii Yu. *Strukturno-neodnorodnyye profilirovannyye sterzhnevyye sistemy. Metody ratsionalnogo i optimalnogo proektirovaniya* [Structural-non-uniform Profiling Rod Systems. Methods of Rational and Optimum Designing]. Saarbrücken. Palmarium Academic Publishing. 2016. 322 p. (In Russian).
6. Abrosimov N.A., Elesin A.V. Obosnovanie primenimosti makroneodnorodnykh modelej v zadachakh dinamiki mnogosloinykh kompozitnykh balok [Substantiation of applicability of macroneon-uniform models in problems of dynamics multilayered ccomposites beams]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti* [Applied Problems of Strength and Plasticity]. 1987. Iss. 35. P. 69–74 (In Russian).
7. Purkiss J.A., Wilson P.J., Blagojević P. Determination of the load-carrying capacity of steel fibre reinforced concrete beams. *Composite Struct.* 1997. Vol. 38. No 1–4. P. 111–117.
8. Nemirovskii Yu.V., Baturin A.A. Metod raschjeta deformativnosti i prochnosti odnotavrovnykh i dvutavrovnykh zhelezobetonnykh sterzhnei [Method of calculation of deformability and strength of the one-tee and two-tee concrete cores]. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2015. No 10. P. 82–93 (In Russian).
9. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).
10. Pavlovski D., Szumigala M. Theoretical and numerical study of the flexural behaviour of FRP RC beams. *Engng. Trans.* 2016. Vol. 64. No 2. P. 213–223.
11. Khan F., Kim Y.J. Time-dependent and residual behavior of pultruded GFRP beams subjected to sustained intensities and cold temperature. *Cold Regions Sci. and Technol.* 2012. Vol. 74-75. P. 43–51.
12. Ascione L., Berardi V.P., Giordano A., Spadea S. Buckling failure modes of FRP thin-walled beams. *Composites. Part B – Engineering*. 2013. Vol. 47. P. 357–364.
13. Yankovskii A.P. Issledovanie osobennosti neuprugogo deformirovaniya kompozitnykh balok sloisto-voloknistoi struktury pri termosilovom nagruzenii [Investigation of properties of inelastic deformation of composite beams of laminated-fibrous structures under thermal-force loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2016. Vol. 78. No 2. P. 131–144 (In Russian).
14. Yankovskii A.P. Modelirovanie uprugoplasticheskoi dinamiki prodolno-armirovannykh balok-stenok na osnove yavnogo po vremeni metoda tsentralnykh raznostei [Modeling of the elastoplastic dynamics of longitudinally reinforced wall beams based on a time-explicit central difference method]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2017. Vol. 81. No 1. P. 54–77 (In Russian).
15. Yankovskii A.P. Modelirovanie dinamicheskogo uprugoplasticheskogo povedeniya balok neregularnoi sloisto-voloknistoi struktury [Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of beams of irregular layered-fibrous structures]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials]. 2017. No 1 (38). P. 45–56 (In Russian).
16. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Integrirovaniye zadachi dinamicheskogo uprugoplasticheskogo izgiba armirovannykh sterzhney peremennogo poperechnogo secheniya obob-

shchyonnymi metodami Runge – Kutty [Integration of problem on elasto-plastic dynamic bending of reinforced cores of sections with a variable cross-section using generalized Runge – Kutta methods]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computing Technologies]. 2004. Vol. 9. No 4. P. 77–95 (In Russian).

17. Zubchaninov V.G. *Mekhanika processov plasticheskikh sred* [Mechanics of Processes of Plastic Mediums]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2010. 352 p. (In Russian).

18. Akhmetzianov M.Kh., Gress P.V., Lazarev I.B. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of Materials]. Moscow. Higher School Publ. 2007. 333 p. (In Russian).

19. Perel'muter A.V., Slivker V.I. *Ustoichivost ravnovesia konstrukcij i rodstvnyye problemy. T. 1* [Stability of Balance of Designs and Related Problems. Vol. 1]. Moscow. SKAD SOFT Publ. 2007. 670 p. (In Russian).

20. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite Materials. Reference Book]. Ed. by D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).

21. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.

## INVESTIGATION OF DYNAMIC ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF CURVED RODS OF IRREGULAR LAMINATED-FIBROUS STRUCTURE

**Yankovskii A.P.**

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russian Federation*

In the Karman approximation the problem of elastic-plastic deformation of flexible laminated-fibrous rods of the small curvature and irregular structure is formulated. The rods consist of two belt-bearing layers (flanges) connected by a thin wall. In the framework of the Timoshenko model the weakened resistance of the wall to shear in its plane is taken into account. Bearing layers are reinforced in the longitudinal direction, and flanges longitudinally or cross-reinforced in its plane. The elastoplastic behavior of components of the composition is described by the equations of the theory of plasticity with isotropic hardening. For the numerical integration of the considered problem the explicit “cross” scheme was used. The calculations are carried out for the dynamic bending deformation of homogeneous and composite, straight and curved flat bars beam of double-T cross section under the action of loads of explosive type. It is shown that the classical theory of bending of these structures can be unacceptable not only for the analysis of metal-composite but homogeneous layered metal rods with unified rolling-sections of double-T type. It is demonstrated that the rational structure of reinforcement of walls for straight rods can be ineffective in the case of curved rods. It is obtained that the dynamic inelastic behavior of curved rods depends on the direction of action of external lateral loads of explosive type.

*Keywords:* layered curved rods, reinforcement, Timoshenko model, geometric nonlinearity, bending deformation, theory of plastic flow, isotropic hardening, dynamic loads, “cross” scheme.