

УДК 539.3

ШАГОВЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА НАСЫЩЕННОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОРОВЫЕ ОТКЛИКИ*

© 2017 г. Белов А.А., Игумнов Л.А., Петров А.Н.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

belov_a2@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 10.11.2017

Рассмотрена трехфазная математическая модель частично насыщенной пористой среды, основанной на модели Био, с пятью базовыми функциями описания волнового процесса. Представлен шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа на основе теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала. Предложена модификация шагового метода численного обращения преобразования Лапласа, и на примере кусочно-линейной функции проведено исследование эффективности ее использования. Модификация позволила сократить необходимое число точек разбиения для достижения заданной точности. Рассмотрена задача о действии нагрузки на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень. Представлены динамические отклики перемещения и поровых давлений при различных значениях коэффициента насыщенности модели пороупругого материала. Продемонстрирован эффект влияния коэффициента насыщенности на динамические отклики перемещения и поровых давлений. Дано сравнение с результатами исследований других авторов.

Ключевые слова: пористая среда, модель Био, преобразование Лапласа, шаговая схема, призматическое тело, аналитическое решение.

Введение

Пористые материалы широко распространены в природе и технике. Примером могут служить водонасыщенные грунты, горные породы, биологические ткани, пенометаллы и т.д. Механика пористых сред имеет большое значение при решении задач геотехники, геомеханики, инженерной геологии, биомеханики, машиностроения и материаловедения.

Начало активным исследованиям волновых процессов в насыщенных пористых средах положили работы Я.И. Френкеля [1] и М. Био [2, 3]. Предложенный подход в дальнейшем был развит другими авторами для случая частично насыщенных пористых сред, содержащих несколько текучих наполнителей. В статьях Beskos [4], Beskos, Providakis, Woo [5], Beskos, Vgenopoulou, Providakis [6] и Vgenopoulou,

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-01262).

Beskos, Vardoulakis [7] представлена модель, описывающая динамическое поведение трехфазной пористой среды. Публикации Garg, Nayfeh [8], Santos, Corberó, Douglas [9], Santos, Douglas, Corberó, Lovera [10], Tuncay, Corapcioglu [11, 12], Wei, Muraleetharan [13], Lo, Sposito, Majer [14], Lu, Hanyga, Jeng [15] по теории пористых сред с двумя наполнителями принадлежат концептуально к общему подходу, отличаясь в деталях реализации. Общая система уравнений многофазной пористой среды предложена В.Н. Николаевским в [16].

Применение модели насыщенного жидкостью пористого материала при рассмотрении волновых процессов даже с учетом существенных упрощений значительно усложняет вычислительную схему краевой задачи по сравнению с упругой или вязкоупругой постановками. Вклад динамического поведения наполнителя принципиально меняет вид волновых картин, что невозможно прогнозировать только с помощью развитых вычислительных методов. Тем не менее аналитические решения имеют большое значение, так как позволяют выявлять механизмы взаимодействия твердой и жидкой фаз, проводить апостериорную оценку численных результатов, исследовать переходные процессы в пористой среде, подвергнутой динамической нагрузке. Обзор доступных аналитических решений задач о распространении волн в насыщенных пористых средах можно найти в статье Schanz [17]. В статье Li, Schanz [18] представлено аналитическое решение для одномерного частично насыщенного пороупругого стержня.

1. Модель пороупругой среды

Рассматривается частично насыщенный пористый материал, который представляет собой упругий скелет с порами, заполненными жидкостью и газом, при этом исключается испарение жидкости и растворение газа [19]. Кроме того, предполагается, что все три фазы являются сжимаемыми, имеют постоянную температуру, а любые изменения температуры не учитываются.

Для частично насыщенного пористого материала пористость обозначается как

$$\phi = \frac{V_{void}}{V},$$

где V_{void} – объем взаимосвязанных пор в образце объемом V . Закрытые поры рассматриваются как часть упругого скелета. Степень насыщения материала жидкостью S_w и газом S_a определяется как отношение занимаемого наполнителем объема V_w и V_a к общему объему пор, то есть

$$S_w = \frac{V_w}{V_{void}}, \quad S_a = \frac{V_a}{V_{void}}, \quad S_a + S_w = 1.$$

В результате искривления поверхности жидкости, вызванного действием сил поверхностного натяжения на границе раздела сред, возникает разность давлений в жидкости p^w и газе p^a , которая называется капиллярным давлением p^c . Капиллярное давление может быть представлено как функция степени насыщения

$$p^c = p^a - p^w = p^d S_e^{-1/\theta}.$$

Величина p^d определяет давление газа, необходимое для вытеснения жидкости из пор. Коэффициент θ , характеризующий распределение размера зерен скелета, обычно принимает значения от 0,2 до 3. Эффективная водонасыщенность S_e определяется следующим образом [19]:

$$S_e = \begin{cases} 0, & S_w \leq S_{rw}, \\ \frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_{rw}}, & S_{rw} < S_w < S_{ra}, \\ 1, & S_w > S_{ra}, \end{cases}$$

где S_{rw} – остаточная водонасыщенность, S_{ra} – остаточная газонасыщенность.

Определяющие соотношения для суммарного напряжения вслед за [20] могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} \alpha (S_w p^w + S_a p^a).$$

Здесь обозначено: σ'_{ij} – эффективное напряжение; $\alpha = 1 - K/K_s$ – коэффициент эффективных напряжений, определяющий зависимость сжимаемости упругого скелета от его объемного модуля K и объемного модуля его зерен K_s . Скелет считается изотропным и однородным с двумя константами упругого материала – объемным модулем K и модулем сдвига G . Исходя из этих предположений, получена формулировка для напряжения

$$\sigma'_{ij} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} u_{k,k} + G (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Кроме того, в допущении о малых градиентах деформации полагаем, что компоненты тензора деформаций твердого тела ε_{ij} и смещения u_i связаны соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Уравнения баланса массы для твердого тела и наполнителей имеют вид

$$\frac{\partial[(1-\phi)\rho_s]}{\partial t} + \operatorname{div} \left[(1-\phi)\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi S_w \rho_w)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\phi S_w \rho_w \frac{\partial (u_i + u_i^w)}{\partial t} \right] = \rho_w I^w, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\phi S_a \rho_a)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\phi S_a \rho_a \frac{\partial (u_i + u_i^a)}{\partial t} \right] = \rho_a I^a, \quad (3)$$

где ρ_s, ρ_w, ρ_a – плотности твердотельного скелета, жидкости и газа соответственно, u_i^w и u_i^a – компоненты смещений наполнителей относительно скелета. Формулировка предполагает, что не происходит растворения газообразного наполнителя в жидкости, а градиенты плотностей, насыщенности и пористости пренебрежимо малы.

Для трехфазного материала можно записать:

$$G u_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3} \right) u_{j,j} - \alpha (S_w p_i^w + S_a p_i^a) + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \phi S_w \rho_w \frac{\partial^2 u_i^w}{\partial t^2} + \phi S_a \rho_a \frac{\partial^2 u_i^a}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\phi S_w \frac{\partial u_i^w}{\partial t} = -\kappa_w \left(p_{,i}^w + \rho_w \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\partial^2 u_i^w}{\partial t^2} \right), \quad (5)$$

$$\phi S_a \frac{\partial u_i^a}{\partial t} = -\kappa_a \left(p_{,i}^a + \rho_a \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 u_i^a}{\partial t^2} \right). \quad (6)$$

Уравнение (4) записано для скелета, уравнения (5), (6) – для жидкости и газа соответственно. Введена объемная сила F_i и усредненная плотность $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi S_w \rho_w + \phi S_a \rho_a$. Перенос наполнителей определяется законом Дарси. Соответствующие фазовые проницаемости определяются как $\kappa_w = K_{rw}k/\eta_w$ и $\kappa_a = K_{ra}k/\eta_a$, где K_{rw} и K_{ra} – относительные фазовые проницаемости, k – внутренняя проницаемость материала, η_w и η_a – вязкости наполнителей. Относительная фазовая проницаемость определяется как отношение фазовой проницаемости к абсолютной. Используем вслед за [21] следующие экспериментально установленные зависимости для относительных проницаемостей в случае газо-водяной смеси в порках:

$$K_{rw} = S_e^{(2+3\phi)/\theta}, \quad K_{ra} = (1 - S_e)^2 [1 - S_e^{(2+\theta)/\theta}].$$

Система уравнений (1)–(6) полностью описывает поведение частично насыщенного поропругого континуума. Выберем в качестве базовых функций давление в порах p^a и перемещение скелета u_i .

Для дальнейшего исследования применяется интегральное преобразование Лапласа. Пусть функция от времени $f(t) = 0$ для $t < 0$. Ее преобразование по Лапласу и обращение определены следующим образом:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \alpha + i\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds \quad (\text{формула Римана–Меллина}),$$

где s – комплексный параметр преобразования; α – вещественное число, большее, чем вещественные части всех особенностей $\hat{f}(s)$. Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (5), (6) и исключая относительные смещения u_i^w и u_i^a , получаем:

$$\hat{q}_i^w = s \hat{u}_i^w = -\frac{\beta}{\phi \rho_w s} (\hat{p}_{,i}^w + \rho_w s^2 \hat{u}_i), \quad \hat{q}_i^a = s \hat{u}_i^a = -\frac{\gamma}{\phi \rho_a s} (\hat{p}_{,i}^a + \rho_a s^2 \hat{u}_i), \quad (7)$$

где \hat{q}_i^w, \hat{q}_i^a – потоки наполнителей. В (7) введены обозначения:

$$\beta = \frac{\kappa_w \phi \rho_w s}{\phi S_w + \kappa_w \rho_w s}, \quad \gamma = \frac{\kappa_a \phi \rho_a s}{\phi S_a + \kappa_a \rho_a s}.$$

Подстановка (7) в уравнения (1)–(4) позволяет получить формулировку:

$$G \hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3} \right) \hat{u}_{j,ij} - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2 \hat{u}_i - (\alpha - \beta) S_w \hat{p}_{,i}^w -$$

$$- (\alpha - \gamma) S_a \hat{p}_{,i}^a = -\hat{F}_i, \quad (8)$$

$$- (\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_{i,i} - \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\phi}{K_w} S_w - S_u \right) s \hat{p}^w + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \hat{p}_{,ii}^w -$$

$$- (\zeta S_{aa} S_w + S_u) s \hat{p}^a = -\hat{I}^w, \quad (9)$$

$$- (\alpha - \gamma) S_a s \hat{u}_{i,i} - (\zeta S_{ww} S_a + S_u) s \hat{p}^w - \left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\phi}{K_a} S_a - S_u \right) s \hat{p}^a +$$

$$+ \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \hat{p}_{,ii}^a = -\hat{I}^a, \quad (10)$$

где

$$\zeta = \frac{\alpha - \phi}{K_s}, \quad S_{ww} = S_w - \theta(S_w - S_{rw}), \quad S_{aa} = S_a + \theta(S_w - S_{rw}),$$

$$S_u = -\frac{\theta(S_{ra} - S_{rw})}{p^d} \left(\frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_{rw}} \right)^{(\theta+1)/\theta}.$$

Уравнения (8)–(10) могут быть записаны в операторной форме:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{F}_i \\ -\hat{I}^w \\ -\hat{I}^a \end{bmatrix}$$

с несамосопряженным оператором

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1 \delta_{ij} + A_2 \partial_i \partial_j & A_3 \partial_i & A_4 \partial_i \\ A_5 \partial_j & A_6 & A_7 \\ A_8 \partial_j & A_9 & A_{10} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = G \nabla^2 - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2, \quad A_2 = K + \frac{G}{3},$$

$$A_3 = -(\alpha - \beta) S_w, \quad A_4 = -(\alpha - \gamma) S_a, \quad A_5 = -(\alpha - \beta) S_w s,$$

$$A_6 = -\left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\phi}{K_w} S_w - S_u \right) s + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \nabla^2,$$

$$A_7 = -(\zeta S_{aa} S_w + S_u) s, \quad A_8 = -(\alpha - \gamma) S_a s,$$

$$A_9 = -(\zeta S_{ww} S_a + S_u) s, \quad A_{10} = -\left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\phi}{K_a} S_a - S_u \right) s + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \nabla^2.$$

2. Шаговая схема численного обращения преобразования Лапласа

Рассмотрим метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала, – шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа.

Запишем интеграл:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Интеграл (11) порождает задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt} x(t) = s \cdot x(t) + C, \quad x(0) = 0.$$

Интеграл (11) заменяется квадратурной суммой, весовые множители которой определяются с помощью изображения по Лапласу \hat{f} и линейного многшагового метода [22–25]. Дальнейшее изложение идет с учетом результатов этих работ. Традиционный шаговый метод интегрирования оригинала состоит в том, что интеграл (11) вычисляется с помощью соотношения:

$$y(0) = 0, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N,$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{i\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

Δt – шаг по времени; $\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$; $n = \overline{0, N}$ – номер шага по времени; R – параметр метода.

Традиционный метод использует метод трапеций с постоянным шагом для вычисления такого интеграла. Рассмотрим формулу построения ω_n на основе переменного шага:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \left(\hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_k})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi_k} + \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_{k+1}})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi_{k+1}} \right) \cdot \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2},$$

L – число узлов по углу φ .

Для случаев, когда $\hat{f}(\gamma(R \cdot e^{i\varphi})/\Delta t)e^{in\varphi}$ – сильно осциллирующая функция, предложено использовать комбинированную формулу, использующую специфику интегрирования таких функций.

Модификация на основе линейной аппроксимации функции $\hat{f}(\gamma(R \cdot e^{in\varphi})/\Delta t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in(\varphi_k + \varphi_{k+1})/2} \times \\ &\times \left[D_1(w) \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_k})}{\Delta t}\right) + D_2(w) \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_{k+1}})}{\Delta t}\right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$w = -n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}, \quad D_{1,2}(w) = \begin{cases} \frac{\sin w}{w} \pm (w \cos w - \sin w) \frac{i}{w^2} & \text{при } |w| > w_2, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w_2. \end{cases}$$

Модификация на основе квадратичной аппроксимации функции $\hat{f}(\gamma(R \cdot e^{in\varphi})/\Delta t)$ записывается в виде:

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in(\varphi_k + \varphi_{k+1})/2} \times \\ &\times \left[D_1(w) \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_k})}{\Delta t}\right) + D_2(w) \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_{k+1/2}})}{\Delta t}\right) + D_3(w) \hat{f}\left(\frac{\gamma(R \cdot e^{in\varphi_{k+1}})}{\Delta t}\right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D_1 = \begin{cases} \frac{2ie^{iw} + we^{iw} + 3we^{-iw} - 2ie^{-iw} + 2w^2e^{-iw}}{2w^3} & \text{при } |w| > w_3, \\ \frac{e^{-iw}}{2} & \text{при } |w| \leq w_3, \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} \frac{2(-ie^{iw} - we^{iw} + ie^{-iw} - pe^{-iw})}{w^3} & \text{при } |w| > w_3, \\ 1 & \text{при } |w| \leq w_3, \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} -\frac{(-3we^{iw} - 2ie^{iw} + 2w^2ie^{-iw} + 2ie^{-iw} - we^{-iw})}{2w^3} & \text{при } |w| > w_3, \\ \frac{e^{iw}}{2} & \text{при } |w| \leq w_3. \end{cases}$$

Возможности построенных модификаций метода квадратур сверток продемонстрированы на численных примерах. На рис. 1 представлены оригиналы искомых функций для следующих параметров схемы: $N = 500$, $\Delta t = 0,01$ с, $L = 501$. Цифрой 1 обозначена кривая, построенная по традиционной формуле метода квадратур сверток, цифрами 2 и 3 – кривые, построенные по результатам применения модификации метода с линейным и квадратичным интерполированием функции $\hat{f}(\gamma(R \cdot e^{i\varphi})/\Delta t)$. Применение метода квадратур сверток с переменным шагом при линейной интерполяции подынтегральной функции не позволяет решить проблему устойчивости численного построения искомой функции на выбранном временном интервале без измельчения расчетной сетки. На рис. 2 показано возникновение численных осцилляций при $N = 500$, $\Delta t = 0,01$ с и равномерном разбиении на каждом из интервалов $\varphi: [0, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$ соответственно при $L = 125$, $L = 21$, $L = 125$.

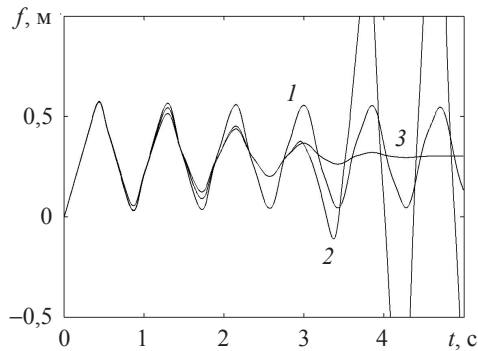


Рис. 1

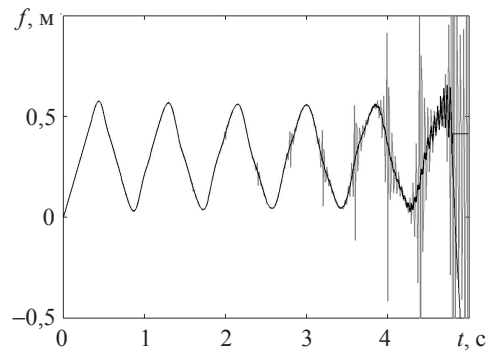


Рис. 2

Применение комбинированных формул (12), (13) позволяет получить искомый результат при том же разбиении интервалов (гладкая кривая на рис. 2). Кривые по формулам (12) и (13) неразличимы. В численных экспериментах полагалось, что в формуле (12) $w_2 = 3$, а в формуле (13) $w_2 = 6$.

Построение модификаций метода квадратур сверток на основе комбинированных формул (12), (13) позволило преодолеть такие ограничения традиционного подхода, как выбор числа шагов N по времени, совпадающего с числом узлов L по углу φ . Использование модификаций позволяет сократить необходимое число точек разбиения для достижения заданной точности. В рассмотренном примере удалось понизить число точек в 2 раза, а при уменьшении шага по времени число точек еще более сократится, так как информативная часть функции \hat{f} при уменьшении шага по времени будет уплотняться к точкам 0 и 2π (приведен пример с уменьшением количества точек в 3 раза).

3. Аналитическое решение

Рассмотрим задачу о действии нагрузки в виде функции Хевисайда по времени на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень длиной l . Схема задачи представлена на рис. 3.

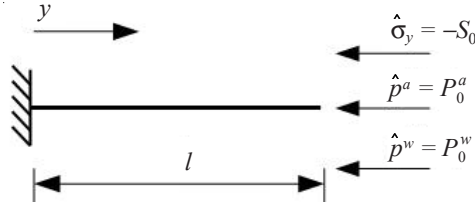


Рис. 3

Система дифференциальных уравнений одномерного распространения пороупругих волн в изображениях имеет вид:

$$\left(K + \frac{G}{3}\right)\hat{u}_{y,yy} - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2 \hat{u}_y - (\alpha - \beta) S_w \hat{p}_{,y}^w + (\alpha - \gamma) S_a \hat{p}_{,y}^a = 0, \quad (14)$$

$$-(\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_{y,y} - (\zeta S_{aa} S_w + S_u) s \hat{p}^a + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \hat{p}_{,yy}^w - \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\phi}{K_w} S_w - S_u\right) s \hat{p}^w = 0, \quad (15)$$

$$-(\alpha - \gamma) S_a s \hat{u}_{y,y} - (\zeta S_{ww} + S_u) s \hat{p}^w + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \hat{p}_{,yy}^a - \left(\zeta S_{aa} + \frac{\phi}{K_a} S_a - S_u\right) s \hat{p}^a = 0. \quad (16)$$

Система уравнений (14)–(16) дополняется граничными условиями, записанными в изображениях по Лапласу:

$$\hat{u}_y|_{y=0} = 0, \quad \hat{\sigma}_y|_{y=l} = 0, \quad \hat{p}^w|_{y=l} = P_0, \quad \hat{q}^w|_{y=l} = 0, \quad \hat{p}^a|_{y=l} = 0, \quad \hat{q}^a|_{y=l} = 0.$$

Экспоненциальная подстановка

$$\hat{u}(y) = U e^{\lambda s y}, \quad \hat{p}^w = U^w e^{\lambda s y}, \quad \hat{p}^a = U^a e^{\lambda s y}$$

позволяет записать аналитическое решение в виде:

$$\hat{u}_y = \frac{P_0}{Ms} \sum_{i=1}^3 t_i \frac{e^{\lambda_i s (y-l)} - e^{-\lambda_i s (y+l)}}{1 + e^{-2\lambda_i s l}}, \quad (17)$$

$$\hat{p}^w = \frac{P_0}{M} \sum_{i=1}^3 a_i t_i \frac{e^{\lambda_i s (y-l)} + e^{-\lambda_i s (y+l)}}{1 + e^{-2\lambda_i s l}}, \quad (18)$$

$$\hat{p}^a = \frac{P_0}{M} \sum_{i=1}^3 b_i t_i \frac{e^{\lambda_i s (y-l)} + e^{-\lambda_i s (y+l)}}{1 + e^{-2\lambda_i s l}}. \quad (19)$$

Коэффициенты, входящие в формулы (17)–(19), приведены в статье [18].

При расчетах использованы следующие значения параметров краевой задачи: $l = 10$ м, $P_0 = 1$ Н/м². В качестве пористого материала стержня выбран водонасыщенный песок с параметрами $K = 1,02 \cdot 10^9$ Н/м², $G = 1,44 \cdot 10^9$ Н/м², $\phi = 0,23$, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $\rho_w = 997$ кг/м³, $\rho_a = 1,10$ кг/м³, $K_s = 3,55 \cdot 10^{10}$ Н/м², $K_w = 2,25 \cdot 10^9$ Н/м², $K_a = 1,10 \cdot 10^5$ Н/м², $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-12}$ м², $\eta_w = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Н·с/м², $\eta_a = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м². Решение во времени получено при значениях $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $N = L = 2000$, $R = 0,997$.

На рис. 4–6 представлены динамические отклики перемещений на свободном и поровых давлений на закрепленном концах.

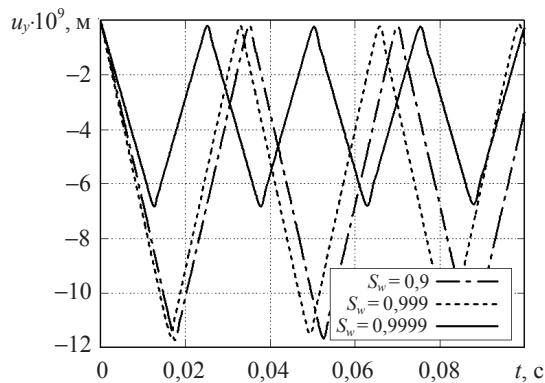


Рис. 4

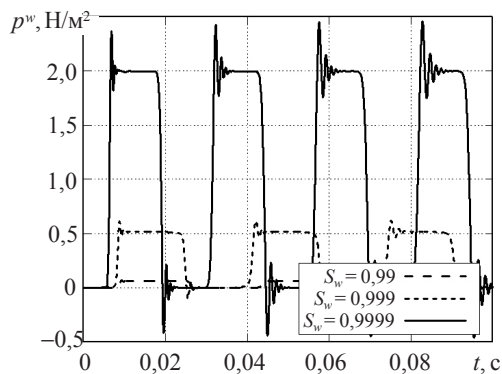


Рис. 5

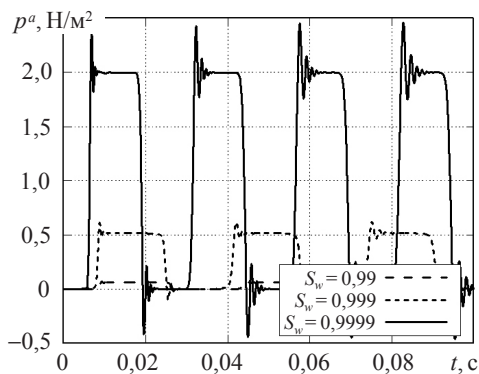


Рис. 6

С ростом коэффициента насыщенности с 0,9 до 0,9999 наблюдается уменьшение амплитуды перемещений и увеличение скорости продольной волны (см. рис. 4). На динамических откликах поровых давлений, наоборот, наблюдается увеличение амплитуды (см. рис. 5, 6). Результаты расчетов качественно согласуются с результатами, представленными в работах [18, 26].

Заключение

Приведено аналитическое решение задачи о действии динамической нагрузки на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень. Представлены результаты расчетов, полученные с применением шагового метода численного обращения преобразования Лапласа. Продемонстрирован эффект влияния коэффициента насыщенности на динамические отклики перемещения и поровых давлений. Дано сравнение с результатами исследований других авторов.

Список литературы

1. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *Journal of Physics*. 1944. Vol. 8. P. 230–241.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. P. 168–178.

3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. P. 179–191.
4. Beskos D. E. Dynamics of saturated rocks. I: Equations of motion. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. 1989. Vol. 115. No 5. P. 982–995.
5. Beskos D.E., Providakis C.P., Woo H.S. Dynamics of saturated rocks. III: Rayleigh waves. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. 1989. Vol. 115. No 5. P. 1017–1034.
6. Beskos D.E., Vgenopoulou I., Providakis C.P. Dynamics of saturated rocks. II: Body waves. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. 1989. Vol. 115. No 5. P. 996–1016.
7. Vgenopoulou I., Beskos D.E., Vardoulakis I. High frequency wave propagation in nearly saturated porous media. *Acta Mechanica*. 1990. Vol. 85. Iss. 1–2. P. 115–123.
8. Garg S.K., Nayfeh A.H. Compressional wave propagation in liquid and/or gas saturated elastic porous media. *Journal of Applied Physics*. 1986. Vol. 60. P. 3045–3055. DOI: 10.1063/1.337760.
9. Santos J.E., Corberó J.M., Douglas J.Jr. Static and dynamic behavior of a porous solid saturated by a two-phase fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. Vol. 87. P. 1428–1438. DOI: 10.1121/1.399439.
10. Santos J.E., Douglas J.Jr., Corberó J., Lovera O.A. A model for wave propagation in a porous medium saturated by a two-phase fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. Vol. 87. P. 1439–1448. DOI: 10.1121/1.399440.
11. Tuncay K., Corapcioglu M.Y. Body waves in poroelastic media saturated by two immiscible fluids. *Journal of Geophysical Research*. 1996. Vol. 101. P. 25149–25159. DOI: 10.1029/96JB02297.
12. Tuncay K., Corapcioglu M.Y. Wave propagation in poroelastic media saturated by two fluids. *Journal of Applied Mechanics*. 1997. Vol. 64. P. 313–320. DOI: 10.1115/1.2787309.
13. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids. I. Linear poroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. P. 1807–1833. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00068-X.
14. Lo W.-C., Sposito G., Majer E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids. *Water Resources Research*. 2005. Vol. 41. P. 140–160. DOI: 10.1029/2004WR003162.
15. Lu J.-F., Hanyga A., Jeng D.-S. A mixture-theory-based dynamic model for a porous medium saturated by two immiscible fluids. *Journal of Applied Geophysics*. 2007. Vol. 62. P. 89–106. DOI: 10.1016/j.jappgeo.2006.08.002.
16. Nikolaevskij V.N. *Mechanics of Porous and Fractured Media*. Singapore: World Scientific, 1990. 472 p.
17. Schanz M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62(3). 15 p.
18. Li P., Schanz M. Wave propagation in a 1-d partially saturated poroelastic column. *Geophysical Journal International*. 2011. Vol. 184. P. 1341–1353.
19. Li P. Boundary element method for wave propagation in partially saturated poroelastic continua. *Computation in Engineering and Science*. Verlag der Technischen Universität Graz, 2012. Vol. 15. 131 p.
20. Bishop A.W., Blight G.E. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Geotechnique*. 1963. Vol. 13. P. 177–197.
21. Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydraulic Papers*. Colorado State Univ., 1964. 30 p.
22. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. *Numerische Mathematik I*. 1988. Vol. 52(2). P. 129–145.
23. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. *Numerische Mathematik II*. 1988. Vol. 52(4). P. 413–425.
24. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua*. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
25. Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Сабаева Т.А. Решение задачи о действии давления внутри полости в поропругом полупространстве. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76. №2. С. 97–105.

26. Igumnov L.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. One-dimensional wave propagation in a three phase poroelastic column. *Key Engineering Materials* 2016. No 685. P. 276–279.

References

1. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *Journal of Physics*. 1944. Vol. 8. P. 230–241.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. P. 168–178.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. P. 179–191.
4. Beskos D. E. Dynamics of saturated rocks. I: Equations of motion. *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*. 1989. Vol. 115. No 5. P. 982–995.
5. Beskos D.E., Providakis C.P., Woo H.S. Dynamics of saturated rocks. III: Rayleigh waves. *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*. 1989. Vol. 115. No 5. P. 1017–1034.
6. Beskos D.E., Vgenopoulou I., Providakis C.P. Dynamics of saturated rocks. II. Body waves. *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*. 1989. Vol. 115. No 5. P. 996–1016.
7. Vgenopoulou I., Beskos D.E., Vardoulakis I. High frequency wave propagation in nearly saturated porous media. *Acta Mechanica*. 1990. Vol. 85, Iss. 1–2. P. 115–123.
8. Garg S.K., Nayfeh A.H. Compressional wave propagation in liquid and/or gas saturated elastic porous media. *Journal of Applied Physics*. 1986. Vol. 60. P. 3045–3055. DOI: 10.1063/1.337760.
9. Santos J.E., Corberó J.M., Douglas J.Jr. Static and dynamic behavior of a porous solid saturated by a two-phase fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. Vol. 87. P. 1428–1438. DOI: 10.1121/1.399439.
10. Santos J.E., Douglas J.Jr., Corberó J., Lovera O.A. A model for wave propagation in a porous medium saturated by a two-phase fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1990. Vol. 87. P. 1439–1448. DOI: 10.1121/1.399440.
11. Tuncay K., Corapcioglu M.Y. Body waves in poroelastic media saturated by two immiscible fluids. *Journal of Geophysical Research*. 1996. Vol. 101. P. 25149–25159. DOI: 10.1029/96JB02297.
12. Tuncay K., Corapcioglu M.Y. Wave propagation in poroelastic media saturated by two fluids. *Journal of Applied Mechanics*. 1997. Vol. 64. P. 313–320. DOI: 10.1115/1.2787309.
13. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids. I. Linear poroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. P. 1807–1833. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00068-X.
14. Lo W.-C., Sposito G., Majer E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids. *Water Resources Research*. 2005. Vol. 41. P. 140–160. DOI: 10.1029/2004WR003162.
15. Lu J.-F., Hanyga A., Jeng D.-S. A mixture-theory-based dynamic model for a porous medium saturated by two immiscible fluids. *Journal of Applied Geophysics*. 2007. Vol. 62. P. 89–106. DOI: 10.1016/j.jappgeo.2006.08.002.
16. Nikolaevskij V.N. *Mechanics of Porous and Fractured Media*. Singapore: World Scientific. 1990. 472 p.
17. Schanz M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62(3). 15 p.
18. Li P., Schanz M. Wave propagation in a 1-d partially saturated poroelastic column. *Geophysical Journal International*. 2011. Vol. 184. P. 1341–1353.
19. Li P. Boundary element method for wave propagation in partially saturated poroelastic continua. *Computation in Engineering and Science*. Verlag der Technischen Universität Graz. 2012. Vol. 15. 131 p.
20. Bishop A.W., Blight G.E. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Geotechnique*. 1963. Vol. 13. P. 177–197.
21. Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydraulic Papers*. Colorado State Univ. 1964. 30 p.
22. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. *Numerische Mathematik I*. 1988. Vol. 52(2). P. 129–145.

23. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. *Numerische Mathematik II*. 1988. Vol. 52(4). P. 413–425.

24. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua*. Berlin: Springer. 2001. 170 p.

25. Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N., Sabaeva T.A. Reshenie zadachi o deystvii davleniya vnutri polosti v porouprugom poluprostranstve [Analyzing the problem of pressure acting inside a cavity in a poroelastic and poroviscoelastic solids]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2014. Vol. 76. No 2. P. 97–105 (In Russian).

26. Igumnov L.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. One-dimensional wave propagation in a three phase poroelastic column. *Key Engineering Materials*. 2016. No 685. P. 276–279.

THE STEPPED ANALYSIS OF THE EFFECT OF THE SATURATION COEFFICIENT ON DYNAMIC PORE RESPONSES

Belov A.A., Igumnov L.A., Petrov A.N.

*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

A three-phase mathematical model of a partially saturated porous medium, based on Biot's model, with five basic functions for describing wave processes is considered. Based on the theorem of operational computation of integrating the original, a stepped method of numerical inversion of Laplace transform is presented. A modification of the stepped method of numerical inversion of Laplace transform is introduced, and its effectivity is analyzed, using the example of a piecewise-linear function. The modification made it possible to reduce the number of points necessary for achieving a required accuracy. The problem of a load acting on a one-dimensional partially saturated poroelastic bar is analyzed. Dynamic responses of displacements and pore pressures for different values of the saturation coefficient of the model of a poroelastic material are presented. The effect of the saturation coefficient on the dynamic responses of displacement and pore pressures is demonstrated. The results are compared with the data published by other authors.

Keywords: porous medium, Biot's model, Laplace transform, stepped scheme, prismatic body, analytical solution.