

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ, МАТЕРИАЛ КОТОРОГО ОБЛАДАЕТ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА\*

© 2017 г. Ерофеев В.И.<sup>1,2</sup>, Кажаяев В.В.<sup>1,2</sup>, Семерикова Н.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород,  
Российская Федерация

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.09.2017

Рассматривается стержень, изготовленный из материала, обладающего отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетический материал). Такие материалы были впервые синтезированы в конце 20-го века и с тех пор активно изучаются. В линейной и нелинейной постановках рассмотрена задача о распространении продольной стержневой волны. Показано, что если для обычных материалов скорость продольных волн в стержне больше скорости сдвиговых волн и дисперсия является нормальной, то есть значение фазовой скорости волны превосходит значение ее групповой скорости, то в стержнях из ауксетических материалов наблюдается качественно иное (аномальное) поведение линейных волн: значение групповой скорости в широком частотном диапазоне превосходит значение фазовой скорости. Учет геометрической и физической упругой нелинейностей, в свою очередь, приводит к возможности формирования в стержне стационарных волн деформации существенно несинусоидального профиля – солитонов и их периодических аналогов. Определены зависимости, связывающие скорости, волновые числа и амплитуды нелинейных волн.

*Ключевые слова:* отрицательный коэффициент Пуассона, стержень, волна, дисперсия, нелинейность.

*Посвящается памяти  
Роберта Вениаминовича Гольдштейна*

### Введение

Материал с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетический материал или ауксетик) впервые был получен в 1987 году и представлял собой полимерную пену [1]. С этого времени начались активные теоретические и экспериментальные исследования физико-механических свойств ауксетических материалов. Обзору результатов, полученных на начало нынешнего века, посвящена публикация [2].

---

\* Выполнено при поддержке РФФ (проект № 14-19-01637).

Отрицательное значение коэффициента Пуассона может быть реализовано за счет анизотропии упругих свойств материала [3–13], наличия вращающихся жестких звеньев [14, 15], полидисперсности [16], фрактальной структуры [17], приложения отрицательного гидростатического давления [18, 19].

В настоящее время активно разрабатываются модели и конструкции ауксетических стержней [20–22], используемых в качестве элементов нового класса композитов [21, 23–26], синтезируются и изучаются ауксетические полимерные пенопласты [1, 27, 28] и ауксетические кристаллические материалы [3–9, 21].

Значительное внимание уделяется изучению закономерностей распространения упругих волн, в первую очередь ультразвукового диапазона, в ауксетиках [21, 29–38], поскольку такие исследования будут способствовать разработке методов акустического неразрушающего контроля новых материалов.

Целью настоящей статьи является исследование распространения продольных волн в стержне из материала с отрицательным коэффициентом Пуассона.

### 1. Линейная математическая модель. Дисперсионные свойства

Наряду с инженерными (классическими) моделями в динамике стержней существуют так называемые уточненные или неклассические модели [39, 40]. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или свободны от некоторых гипотез, принятых в инженерных теориях и ограничивающих область их применимости.

Классическую теорию Бернулли, принятую при описании продольных колебаний стержня, обобщает модель Бишопа, учитывающая дополнительно кинетическую энергию поперечных движений частиц стержня и потенциальную энергию сдвиговых деформаций:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho v^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 \mu I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – продольное перемещение,  $\rho$  – плотность,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $I_0$  – полярный момент инерции,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – модуль сдвига,  $v$  – коэффициент Пуассона.

Продольные волны, описываемые уравнением (1), обладают дисперсией, при этом частота  $\omega$  и волновое число  $k$  гармонической волны  $u = u_0 \exp(i(\omega t - kx))$  связаны соотношением:

$$\omega = k \sqrt{\frac{c_0^2 + c_\tau^2 v^2 R^2 k^2}{1 + v^2 R^2 k^2}}, \quad (2)$$

$R$  – полярный радиус инерции.

График зависимости (2) определяет дисперсионную кривую на плоскости  $(\omega, k)$ . Эта кривая при малых волновых числах  $k$  имеет асимптоту  $\omega = c_0 k = \sqrt{E/\rho} k$ , а при больших  $k$  асимптотически приближается к прямой  $\omega = c_\tau k = \sqrt{\mu/\rho} k$ . Таким образом, при малых частотах волны в стержне модели Бишопа распространяются со скоростями, близкими к стержневой скорости  $c_0$ , а при больших частотах их скорости близки к скорости сдвиговых волн в бесконечной среде  $c_\tau$ . Отношение этих скоростей может быть выражено через коэффициент Пуассона:

$$\frac{c_0}{c_\tau} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\mu(1+\nu)}{\mu}} = \sqrt{2(1+\nu)}. \quad (3)$$

Для обычных материалов при положительных значениях коэффициента Пуассона скорость продольной волны в стержне  $c_0$  больше скорости сдвиговых волн  $c_\tau$ . В этом случае дисперсия продольных волн является нормальной, то есть значение фазовой скорости волны  $V_\phi$  превосходит значение ее групповой скорости  $V_{гр}$ :

$$V_\phi > V_{гр}, \quad (4)$$

где  $V_\phi = \omega/k$ ,  $V_{гр} = d\omega/dk$  вычисляются с помощью соотношения (2). Качественный вид дисперсионной кривой (2) приведен на рис. 1.

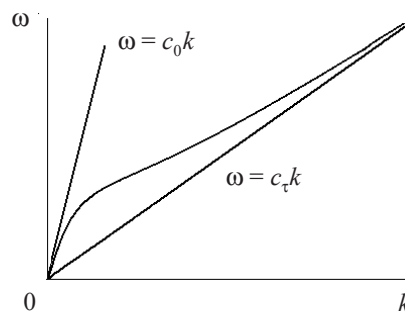


Рис. 1

Заметим, что различие между скоростями  $c_0$  и  $c_\tau$  уменьшается по мере того, как коэффициент Пуассона становится отрицательным. Еще при  $-0,5 < \nu < 0$  дисперсия продольных волн остается нормальной, хотя изменение скорости с ростом частоты становится менее заметным. При  $\nu = -0,5$  продольные волны в стержне не обладают дисперсией, а при  $-1 < \nu < -0,5$  дисперсия становится аномальной, то есть

$$V_\phi < V_{гр}. \quad (5)$$

В последнем случае скорость сдвиговых волн в бесконечной среде  $c_\tau$  превосходит стержневую скорость  $c_0$ . Вид дисперсионной кривой приведен на рис. 2.

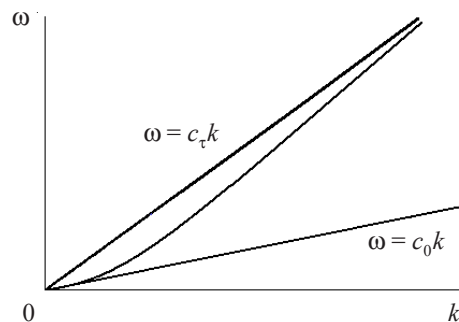


Рис. 2

Таким образом, в стержнях из ауксетических материалов отрицательный коэффициент Пуассона приводит к качественно иному (аномальному) дисперсионному поведению линейных волн.

## 2. Нелинейная математическая модель. Стационарные волны деформации

Учтем в стержне геометрическую и физическую нелинейности. Уравнение нелинейных продольных волн имеет вид [40]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + \frac{6\alpha}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2 R^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь коэффициент  $\alpha$  определяет вклад геометрической и физической нелинейностей:

$$\alpha = \frac{E}{2} + \frac{v_1}{6}(1 - 6v) + v_2(1 - 2v) + \frac{4}{3}v_3,$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – константы упругости третьего порядка.

Введем в уравнении (6) безразмерные переменные  $t' = c_0 t/R, x' = x/R, u' = \alpha u/R$  и в дальнейшем штрихи над безразмерными переменными опустим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( 1 + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (7)$$

Безразмерный параметр  $\beta$  определяет стержень с «жестким» ( $\beta = 1$ ) или «мягким» ( $\beta = -1$ ) характером нелинейности. Для материалов с положительным коэффициентом Пуассона справедливо утверждение, что для металлических стержней или стержней, изготовленных из сплавов, нелинейность является «мягкой», а для композитных стержней возможен «жесткий» тип нелинейности.

Какие-либо закономерности, аналогичные этим, для материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона пока не установлены. В дальнейшем рассмотрим оба характера нелинейного поведения.

Безразмерный параметр  $c$ , входящий в уравнение (7), равен отношению скоростей  $c = c_\tau/c_0$  и, как следует из выражения (3), при положительных значениях коэффициента Пуассона всегда  $c < 1$ . При отрицательном коэффициенте Пуассона возможны различные случаи, когда стержневая скорость  $c_0$  превосходит скорость сдвиговых волн  $c_\tau$  ( $c < 1$  при  $-0,5 < v < 0$ ) или, наоборот,  $c_\tau$  превосходит  $c_0$  ( $c > 1$  при  $-1 < v < -0,5$ ). Вырожденный случай, когда обе скорости совпадают, дает  $c = 1$  при  $v = -0,5$ .

На распространение продольных волн, описываемых уравнением (7), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в волне новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы [41].

Решения уравнения (7) ищем в классе стационарных волн деформации  $U(\xi) = \partial u / \partial \xi$ , где  $\xi = x - Vt$  – «бегущая» координата,  $V = \text{const}$  – скорость стационарной волны. Уравнение (7) сводится к дифференциальному уравнению в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + m_1 U + m_2 U^2 = 0, \quad (8)$$

где

$$m_1 = \frac{V^2 - 1}{c^2 - V^2}, \quad m_2 = \frac{\beta}{2(V^2 - c^2)}.$$

В зависимости от соотношения скорости нелинейной волны  $V$ , единицы и параметра  $c$  (что в размерных переменных соответствует скоростям  $c_0$  и  $c_\tau$ ) поведение решений этого уравнения будет качественно различным. При этом физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Будем рассматривать только эти случаи.

«Мягкая» нелинейность. Рассмотрим стержень с «мягкой» нелинейностью, характерной для металлов и сплавов. Если коэффициент Пуассона материала стержня положительный или отрицательный из диапазона значений  $\nu \in (-0,5; 0)$  (то есть  $c < 1$ ), то в стержне распространяется периодическая волна со скоростью  $c < V < 1$ . (В размерных переменных скорости нелинейных волн  $c_\tau < V < c_0$ .) Аналитически такая волна описывается решением уравнения (8):

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left( 1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4} \right) - A \operatorname{sn}^2(k\xi, s), \quad (9)$$

где  $A$  – амплитуда волны,  $k$  – волновое число,  $\operatorname{sn}$  – эллиптический синус (эллиптическая функция Якоби),  $s$  – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы волны  $U(\xi)$  по сравнению с синусоидальной волной.

Качественный вид периодической волны (9) при разных значениях  $s$  представлен на рис. 3.

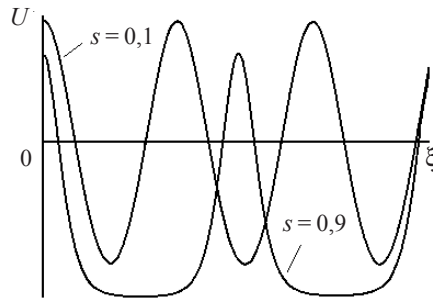


Рис. 3

Амплитуда волны  $A$  связана с ее скоростью  $V$  и модулем  $s$  соотношением

$$A = 3(V^2 - 1) \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}. \quad (10)$$

Эти зависимости приведены на рис. 4.

В свою очередь, скорость волны  $V$  с волновым числом  $k$  и модулем  $s$  связаны соотношением:

$$V = \sqrt{\frac{1 + 4c^2 \sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}{1 + 4\sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}}, \quad (11)$$

которое можно назвать нелинейным законом дисперсии [42, 43]. Зависимости (11) при различных значениях  $s$  приведены на рис. 5. Очевидно, что при  $s \rightarrow 0$  получаем дисперсионную кривую для линейных волн.

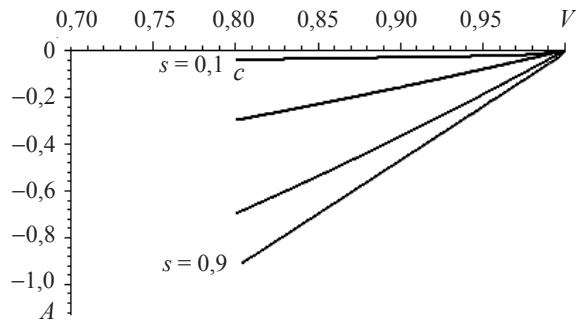


Рис. 4

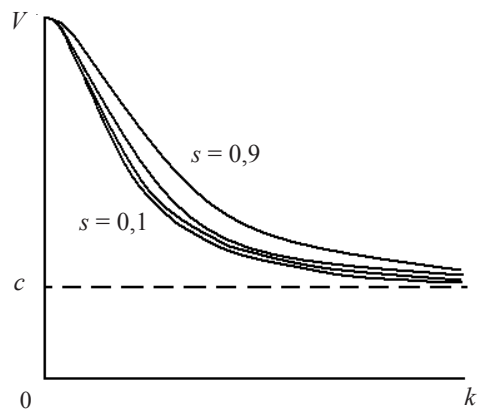


Рис. 5

В диапазоне скоростей  $V < c$  и  $V > 1$ , где нет линейных волн, в нелинейном случае существуют уединенные солитоноподобные волны.

Волна, распространяющаяся со скоростью  $V < c$ , описывается решением уравнения (8):

$$U(\xi) = \frac{A}{\text{ch}^2((x-Vt)/\Delta)}, \quad (12)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина солитона,  $\text{ch}$  – гиперболический косинус. Волна (12) имеет колоколообразную форму (рис. 6).

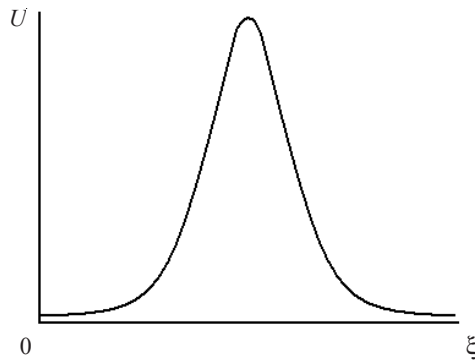


Рис. 6

Амплитуда  $A$ , ширина волны  $\Delta$  связаны с ее скоростью  $V$  соотношениями:

$$A = 3(1 - V^2), \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{c^2 - V^2}{1 - V^2}}. \quad (13)$$

Зависимости (13) приведены на рис. 7 и 8. На этих рисунках им соответствует область  $V < c$ . Из рисунков видно, что поведение «дозвуковой» уединенной волны не является классическим для солитонов: волна большей амплитуды имеет большую ширину и распространяется с меньшей скоростью. Из-за ограниченности скорости волн в этой области амплитуда и ширина солитона численно также ограничены:

$$A \in (3(1 - c^2), 3), \quad \Delta \in (0, 2c).$$

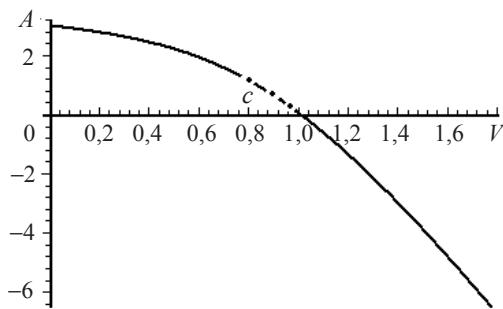


Рис. 7

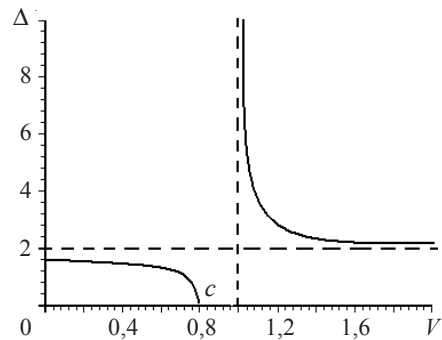


Рис. 8

Волна, распространяющаяся со скоростью  $V > 1$ , также описывается формулой (12). Связи между ее параметрами приведены на рис. 7 и 8 при  $V > 1$ . Заметим, что на рис. 7 и на ряде последующих рисунков область существования стационарных волн изображена сплошной линией, область отсутствия стационарных волн – штрих-пунктиром. В отличие от «дозвуковой» уединенной волны ( $V < c$ ), «сверхзвуковые» солитоны ( $V > 1$ ) имеют отрицательную полярность и их амплитуда может неограниченно возрастать. Волны большей амплитуды распространяются с большей скоростью, а ширина их с ростом скорости убывает, асимптотически приближаясь к значению 2 ( $\Delta \in (2, \infty)$ ).

Как уже отмечалось выше, если коэффициент Пуассона изменяется в пределах  $\nu \in (-1; -0,5)$ , то стержневая скорость  $c_0$  становится меньше скорости волн сдвига  $c_\tau$  и безразмерный параметр  $c$  будет больше единицы. В этом случае нелинейная периодическая волна распространяется со скоростью  $1 < V < c$  и описывается выражением:

$$U(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left( \sqrt{1 - s^2 + s^4} - 1 - s^2 \right) + A \operatorname{sn}^2(k\xi, s), \quad (14)$$

где

$$A = 3(1 - V^2) \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}. \quad (15)$$

Форма периодической волны при различных значениях  $s$  приведена на рис. 9, зависимость (15), масштабированная на  $3(1 - V^2)$ , – на рис. 10.

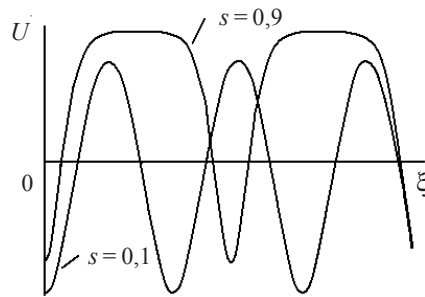


Рис. 9

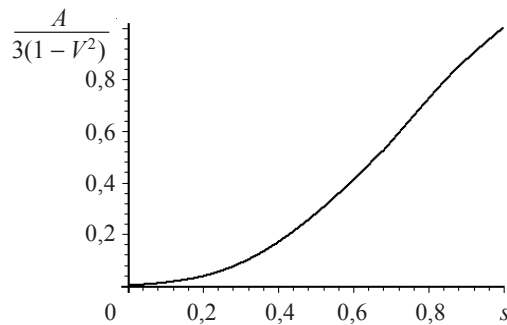


Рис. 10

Волна (14) удовлетворяет нелинейному закону дисперсии (11). Вид дисперсионных соотношений для этой волны показан на рис. 11. Очевидно, что при малых значениях коэффициента нелинейных искажений ( $s \rightarrow 0$ ) существует линейное вырождение, соответствующее случаю, когда дисперсия линейных волн является аномальной.

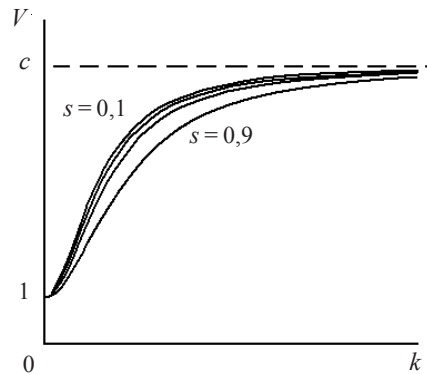


Рис. 11

При  $v \in (-1; -0,5)$  в стержне возможно существование «дозвуковых» ( $V < 1$ ) и «сверхзвуковых» ( $V > c$ ) уединенных волн. При этом «дозвуковые» солитоны описываются выражениями (12), (13), как и в «дозвуковом» случае при  $v \in (-0,5; 0)$ , однако свойства их отличаются. Так, амплитуда таких волн уменьшается с ростом скорости и может быть сколь угодно малой при  $V \rightarrow 1$ . Ширина солитона с уменьшением амплитуды неограниченно возрастает. Зависимости амплитуды и ширины солитона от скорости волны приведены на рис. 12 и рис. 13.



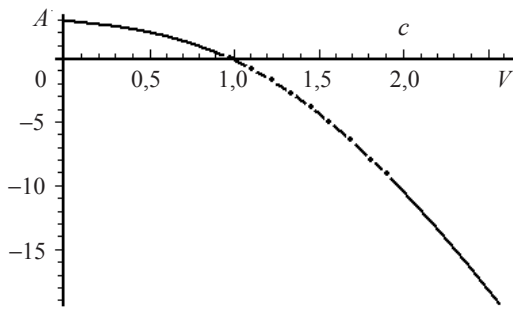


Рис. 12

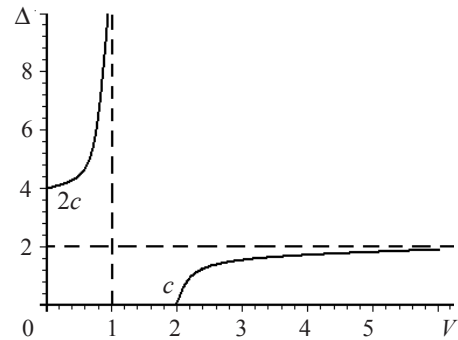


Рис. 13

«Сверхзвуковые» уединенные волны, как и в случае  $v \in (-0,5; 0)$ , описываются выражениями (12), (14). Они имеют отрицательную полярность, их амплитуда начинается со значения  $3(1 - c^2)$  и неограниченно возрастает с ростом скорости. Ширина такой волны растет с ростом амплитуды, причем численно не превышает 2, асимптотически приближаясь к этому значению. Зависимости амплитуды и ширины солитона от скорости волны приведены также на рис. 12 и рис. 13.

Когда коэффициент Пуассона материала  $\nu = -0,5$ , стержневая  $c_0$  и сдвиговая  $c_\tau$  скорости совпадают, при этом область существования линейных, а следовательно, и нелинейных периодических волн исчезает. В этом случае остаются только уединенные волны, они описываются выражениями (12), (13). Ширина солитона не меняется при изменении амплитуды или скорости и равна 2. Амплитуда «дозвуковых» солитонов уменьшается с ростом скорости до нуля, а у «сверхзвуковых» солитонов амплитуда неограниченно возрастает от нуля при увеличении скорости. Зависимость амплитуды от скорости приведена на рис. 14.

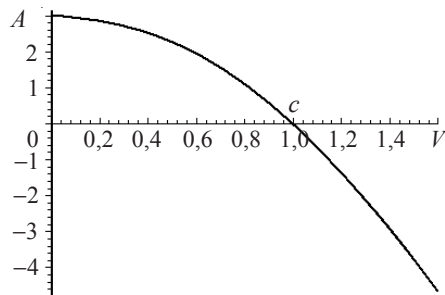


Рис. 14

*«Жесткая» нелинейность.* Для стержня с «жесткой» нелинейностью в уравнении (8) меняется знак перед нелинейным слагаемым, что приводит к изменению характера распространяющихся волн. Области существования периодических и уединенных волн сохраняются такими же, как и в стержне с «мягкой» нелинейностью, но изменяется полярность этих волн.

Если коэффициент Пуассона положительный или отрицательный из диапазона значений  $\nu \in (-0,5; 0)$  (то есть  $c < 1$ ), то в стержне с «жесткой» нелинейностью распространяются периодические волны со скоростями  $c < V < 1$ . Они описываются выражением (14), а их параметры – скорость, амплитуда и коэффициент нелинейных искажений – связаны соотношением (10). Уединенные волны описываются

выражением (12), а их параметры – соотношениями (13). Как говорилось выше, волны в стержне с «жесткой» нелинейностью отличаются полярностью, поэтому графики зависимости амплитуды от скорости противоположны представленным на рис. 7 (приведены на рис. 15). Зависимость ширины солитона от его скорости показана на рис. 8.

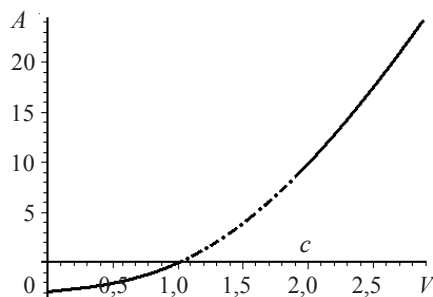


Рис. 15

При  $v \in (-1; -0,5)$  периодические волны распространяются со скоростью  $1 < V < c$  и описываются выражением (14), а их параметры связаны соотношением (10). Как и в предыдущем случае, солитоны имеют вид (12), а их параметры связаны соотношениями (13). График зависимости амплитуды солитона от скорости представлен на рис. 16.

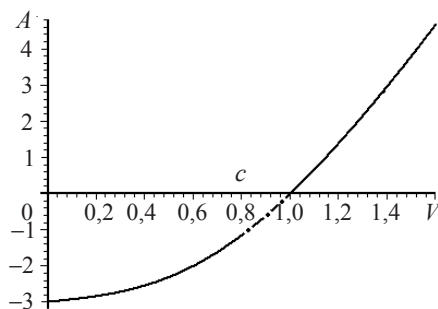


Рис. 16

При  $v = -0,5$  область существования периодических волн исчезает, а уединенные волны, «дозвуковые» и «сверхзвуковые», сохраняются и имеют такие же связи между параметрами.

### Заключение

В результате проведенных исследований вскрыты существенные отличия в поведении волн, распространяющихся в стержнях, изготовленных из классического и ауксетического материалов. Скорость продольной волны в ауксетическом стержне меньше скорости сдвиговой волны. Значение групповой скорости продольной волны в ауксетическом стержне в широком диапазоне частот превосходит значение ее фазовой скорости.

### Список литературы

1. Lakes R.S. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987. Vol. 235. No 4792. P. 1038–1040.

2. Конек Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор). *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10. №1. С. 35–69.
3. Alderson K.L., Simkins V.R., Coenen V.L., Davies P.J., Alderson A., Evans K.E. How to make auxetic fibre reinforced composites. *Physica Status Solidi B*. 2005. Vol. 242. No 3. P. 509–518.
4. Branka A.C., Heyes D.M., Mackowiak Sz., Pieprzyk S., Wojciechowski K.W. Cubic materials in different auxetic regions: Linking microscopic to macroscopic formulations. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1373–1378.
5. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетическая механика кристаллических материалов. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. №4. С. 43–62.
6. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Classification of cubic auxetics. *Physica Status Solidi B*. 2013. Vol. 250. No 10. P. 2038–2043.
7. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Average Poisson's ratio for crystals. Hexagonal auxetics. *Letters on Materials*. 2013. Vol. 3. No 1. P. 7–11.
8. Baughman R.H., Shacklette J.M., Zakhidov A.A., Stafström S. Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*. 1998. Vol. 392. P. 362–365.
9. Krasavin V.V., Krasavin A.V. Auxetic properties of cubic metal single crystals. *Physica Status Solidi B*. 2014. Vol. 251. No 11. P. 2314–2320.
10. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона криволинейно-анизотропных гексагональных и ромбоэдрических нанотрубок. Нанотрубки-ауксетики. *Докл. РАН*. 2013. Т. 452. №3. С. 279–283.
11. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А. Двухслойные трубки из кубических кристаллов. *Докл. РАН*. 2016. Т. 471. №4. С. 414–420.
12. Гольдштейн Р.В., Лисовенко Д.С., Ченцов А.В., Лаврентьев С.Ю. Экспериментальное изучение ауксетического поведения вогнутой ячеистой решетки с криволинейными элементами. *Письма о материалах*. 2017. Т. 7. № 2(26). С. 81–84.
13. Ерофеев В.И., Павлов И.С. Параметрическая идентификация кристаллов, имеющих кубическую решетку с отрицательным коэффициентом Пуассона. *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56. №6 (333). С. 94–101.
14. Attard D., Grima J.N. Auxetic behaviour from rotating rhombi. *Physica Status Solidi B*. 2008. Vol. 245. No 11. P. 2395–2404.
15. Grima J.N., Farrugia P.S., Gatt R., Attard D. On the auxetic properties of rotating rhombi and parallelograms: A preliminary investigation. *Physica Status Solidi B*. 2008. Vol. 245. No 3. P. 521–529.
16. Narojczyk J.W., Wojciechowski K.W. Elastic properties of degenerate FCC crystal of polydisperse soft dimers at zero temperature. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2010. Vol. 356. No 37–40. P. 2026–2032.
17. Novikov V.V., Wojciechowski K.W. Negative Poisson coefficient of fractal structures. *Physics of the Solid State*. 1999. Vol. 41. No 12. P. 1970–1975.
18. Wojciechowski K.W. Negative Poisson ratios at negative pressures. *Molecular Physics Reports*. 1995. Vol. 10. P. 129–136.
19. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. The elastic properties of hexagonal auxetics under pressure. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1261–1269.
20. Fozdar D.Y., Soman P., Lee J.W., Han L.H., Chen S. Three-dimensional polymer constructs exhibiting a tunable negative Poisson's ratio. *Advanced Functional Materials*. 2011. Vol. 21. No 14. P. 2712–2720.
21. Lim T.C. *Auxetic Materials and Structures*. Series: Engineering Materials. Singapore – Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2015. 588 p.
22. Kolken H.M.A., Zadpoor A.A. Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Advances*. 2017. Vol. 7. No 9. P. 5111–5129.
23. Bilski M., Wojciechowski K.W. Tailoring Poisson's ratio by introducing auxetic layers. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1318–1323.
24. Zhou L., Jiang H. Auxetic composites made of 3D textile structure and polyurethane foam. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1331–1341.

25. Jopek H. Computer simulation of bending a fibrous composite reinforced with auxetic phase. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1369–1377.
26. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals. *European Journal of Mechanics A: Solids*. 2017. Vol. 63. P. 122–127.
27. Alderson A. A triumph of lateral thought. *Chemistry & Industry*. 1999. Vol. 17. P. 384–391.
28. Evans K.E., Alderson A. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking. *Advanced Materials*. 2000. Vol. 17. P. 617–628.
29. Koenders M.A. Wave propagation through elastic granular and granular auxetic materials. *Physica Status Solidi B*. 2009. Vol. 246. No 9. P. 2083–2088.
30. Kołat P., Maruszewski B.T., Wojciechowski K.W. Solitary waves in auxetic plates. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2010. Vol. 356. No 37–40. P. 2001–2009.
31. Kołat P., Maruszewski B.T., Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W. Solitary waves in auxetic rods. *Physica Status Solidi B*. 2011. Vol. 248. No 1. P. 148–157.
32. Malischewski P.G., Lorato A., Scarpa F., Ruzzene M. Unusual behaviour of wave propagation in auxetic structures: P-waves on free surface and S-waves in chiral lattices with piezoelectrics. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1339–1346.
33. Drzewiecki A. Rayleigh-type wave propagation in an auxetic dielectric. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2012. Vol. 7. No 3 P. 277–284.
34. Dinh T.B., Long V.C., Xuan K.D., Wojciechowski K.W. Computer simulation of solitary waves in a common or auxetic elastic rod with both quadratic and cubic nonlinearities. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1386–1392.
35. Lim T.-C., Cheang P., Scarpa F. Wave motion in auxetic solids. *Physica Status Solidi B*. 2014. Vol. 251. No 2. P. 388–396.
36. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Поверхностные волны Релея и Лява при отрицательном коэффициенте Пуассона изотропных сред. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2014. №4. С. 74–89.
37. Sobieszczyk P., Gałazka M., Trzupek D., Zieliński P. Propagation of surface waves and surface resonances along cylindrical cavities in materials with any allowed Poisson's ratio. Part I: Clean inner surface. Part II: Thin-walled coating. *Physica Status Solidi B*. 2015. Vol. 252. No 7. P. 1595–1604. P. 1605–1614.
38. Sobieszczyk P., Majka M., Kuźma M., Lim T.-C., Zieliński P. Effect of longitudinal stress on wave propagation in width-constrained elastic plates with arbitrary Poisson's ratio. *Physica Status Solidi B*. 2015. Vol. 252. No 7. P. 1615–1619.
39. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
40. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. *Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
41. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор). *Акустический журнал*. 2002. Т. 48. №6. С. 725–740.
42. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Нелинейные изгибные стационарные волны в балке Тимошенко. *Нелинейный мир*. 2008. Т. 6. №5–6. С. 348–358.
43. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейноупругом основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2008. №3. С. 30–36.

#### References

1. Lakes R.S. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987. Vol. 235. No 4792. P. 1038–1040.
2. Konek D.A., Voitsekhovskii K.V., Pleskachevskii Yu.M., Shilko S.V. Materialy s otritsatelnykh koeffitsientom Puassona (obzor) [Materials with negative Poisson's ratio (review)]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2004. Vol.10. No 1. P. 35–69 (In Russian).

3. Alderson K.L., Simkins V.R., Coenen V.L., Davies P.J., Alderson A., Evans K.E. How to make auxetic fibre reinforced composites. *Physica Status Solidi B*. 2005. Vol. 242. No 3. P. 509–518.
4. Branka A.C., Heyes D.M., Mackowiak Sz., Pieprzyk S., Wojciechowski K.W. Cubic materials in different auxetic regions: Linking microscopic to macroscopic formulations. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1373–1378.
5. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Auxetic mechanics of crystalline materials. *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45. Iss. 4. P. 529–545.
6. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Classification of cubic auxetics. *Physica Status Solidi B*. 2013. Vol. 250. No 10. P. 2038–2043.
7. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Average Poisson's ratio for crystals. Hexagonal auxetics. *Letters on Materials*. 2013. Vol. 3. No 1. P. 7–11.
8. Baughman R.H., Shacklette J.M., Zakhidov A.A., Stafström S. Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*. 1998. Vol. 392. P. 362–365.
9. Krasavin V.V., Krasavin A.V. Auxetic properties of cubic metal single crystals. *Physica Status Solidi B*. 2014. Vol. 251. No 11. P. 2314–2320.
10. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Young's moduli and Poisson's ratios of curvilinear anisotropic hexagonal and rhombohedral nanotubes. Nanotubes-auxetics. *Doklady Physics*. 2013. Vol. 58. Iss. 9. P. 400–404.
11. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. Double-layered tubes of cubic crystals. *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61. Iss. 12. P. 604–610.
12. Goldstein R., Lisovenko D., Chentsov A., Lavrentyev S. Experimental study of auxetic behavior of re-entrant honeycomb with curvilinear elements. *Letters on Materials*. 2017. Vol. 7. Iss. 2. P. 81–84.
13. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Parametric identification of crystals having a cubic lattice with negative Poisson's ratios. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. Vol. 56. Iss. 6. P. 1015–1022.
14. Attard D., Grima J.N. Auxetic behaviour from rotating rhombi. *Physica Status Solidi B*. 2008. Vol. 245. No 11. P. 2395–2404.
15. Grima J.N., Farrugia P.S., Gatt R., Attard D. On the auxetic properties of rotating rhombi and parallelograms: A preliminary investigation. *Physica Status Solidi B*. 2008. Vol. 245. No 3. P. 521–529.
16. Narojczyk J.W., Wojciechowski K.W. Elastic properties of degenerate FCC crystal of polydisperse soft dimers at zero temperature. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2010. Vol. 356. No 37–40. P. 2026–2032.
17. Novikov V.V., Wojciechowski K.W. Negative Poisson coefficient of fractal structures. *Physics of the Solid State*. 1999. Vol. 41. No 12. P. 1970–1975.
18. Wojciechowski K.W. Negative Poisson ratios at negative pressures. *Molecular Physics Reports*. 1995. Vol. 10. P. 129–136.
19. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. The elastic properties of hexagonal auxetics under pressure. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1261–1269.
20. Fozdar D.Y., Soman P., Lee J.W., Han L.H., Chen S. Three-dimensional polymer constructs exhibiting a tunable negative Poisson's ratio. *Advanced Functional Materials*. 2011. Vol. 21. No 14. P. 2712–2720.
21. Lim T.C. *Auxetic Materials and Structures*. Series: Engineering Materials. Singapore – Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2015. 588 p.
22. Kolken H.M.A., Zadpoor A.A. Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Advances*. 2017. Vol. 7. No 9. P. 5111–5129.
23. Bilski M., Wojciechowski K.W. Tailoring Poisson's ratio by introducing auxetic layers. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1318–1323.
24. Zhou L., Jiang H. Auxetic composites made of 3D textile structure and polyurethane foam. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1331–1341.
25. Jopek H. Computer simulation of bending a fibrous composite reinforced with auxetic phase. *Physica Status Solidi B*. 2016. Vol. 253. No 7. P. 1369–1377.
26. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Longitudinal elastic tension of two-

layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals. *European Journal of Mechanics A: Solids*. 2017. Vol. 63. P. 122–127.

27. Alderson A. A triumph of lateral thought. *Chemistry & Industry*. 1999. Vol. 17. P. 384–391.

28. Evans K.E., Alderson A. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking. *Advanced Materials*. 2000. Vol. 17. P. 617–628.

29. Koenders M.A. Wave propagation through elastic granular and granular auxetic materials. *Physica Status Solidi B*. 2009. Vol. 246. No 9. P. 2083–2088.

30. Kolat P., Maruszewski B.T., Wojciechowski K.W. Solitary waves in auxetic plates. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2010. Vol. 356. No 37–40. P. 2001–2009.

31. Kolat P., Maruszewski B.T., Tretiakov K.V., Wojciechowski K.W. Solitary waves in auxetic rods. *Physica Status Solidi B*. 2011. Vol. 248. No 1. P. 148–157.

32. Malischewski P.G., Lorato A., Scarpa F., Ruzzene M. Unusual behaviour of wave propagation in auxetic structures: P-waves on free surface and S-waves in chiral lattices with piezoelectrics. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1339–1346.

33. Drzewiecki A. Rayleigh-type wave propagation in an auxetic dielectric. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2012. Vol. 7. No 3 P. 277–284.

34. Dinh T.B., Long V.C., Xuan K.D., Wojciechowski K.W. Computer simulation of solitary waves in a common or auxetic elastic rod with both quadratic and cubic nonlinearities. *Physica Status Solidi B*. 2012. Vol. 249. No 7. P. 1386–1392.

35. Lim T.-C., Cheang P., Scarpa F. Wave motion in auxetic solids. *Physica Status Solidi B*. 2014. Vol. 251. No 2. P. 388–396.

36. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Rayleigh and Love surface waves in isotropic media with negative Poisson's ratio. *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49. Iss. 4. P. 422–434.

37. Sobieszczyk P., Galazka M., Trzupke D., Zieliński P. Propagation of surface waves and surface resonances along cylindrical cavities in materials with any allowed Poisson's ratio. Part I: Clean inner surface. Part II: Thin-walled coating. *Physica Status Solidi B*. 2015. Vol. 252. No 7. P. 1595–1604. P. 1605–1614.

38. Sobieszczyk P., Majka M., Kuźma M., Lim T.-C., Zieliński P. Effect of longitudinal stress on wave propagation in width-constrained elastic plates with arbitrary Poisson's ratio. *Physica Status Solidi B*. 2015. Vol. 252. No 7. P. 1615–1619.

39. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Nonclassical Theories of Oscillations of Rods, Plates and Shells]. Moscow. VINITI Publ. 1973. 272 p. (In Russian).

40. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerihova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost.* [Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).

41. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitony i nelineynye periodicheskie volny deformatsii v sterzhnyakh, plastinakh i obolochkakh (obzor) [Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates and shells (a review)]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustical Physics]. 2002. Vol. 48. No 6. P. 725–740 (In Russian).

42. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerihova N.P. Nelineynye izgibnye statsionarnye volny v balke Timoshenko [Nonlinear stationary waves in a timoshenko beam]. *Nelineinyy mir* [Nonlinear World]. 2008. Vol. 6. No 56. P. 348–358 (In Russian).

43. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2008. Vol. 37. No. 3. P. 230–235.

## NONLINEAR LONGITUDINAL WAVES IN THE ROD MATERIAL WHICH POSSESS NEGATIVE POISSON'S RATIO

Erofeev V.I.<sup>1,2</sup>, Kazhaev V.V.<sup>1,2</sup>, Semerikova N.P.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

A rod made of a material with a negative Poisson's ratio (auxetic material) is considered. Such materials were first synthesized at the end of the last century and have since been actively studied. In linear and nonlinear formulations, the problem of the propagation of a longitudinal rod wave is considered. It is shown that if for ordinary materials the velocity of longitudinal waves in the rod is greater than the velocity of shear waves and the dispersion is normal, i.e. the value of the phase velocity of the wave exceeds the value of its group velocity, then the qualitatively different (anomalous) behavior of the linear waves is observed in the rods from auxetic materials: there the value of the group velocity in the wide frequency range exceeds the value of the phase velocity. Accounting for geometric and physical elastic nonlinearities, in turn, leads to the possibility of forming in a rod of stationary deformation waves a substantially non-sinusoidal profile – solitons and their periodic analogues. Dependences connecting speeds, wave numbers and amplitudes of nonlinear waves are determined.

*Keywords:* negative Poisson's ratio, kernel, wave, dispersion, nonlinearity.