

УДК 539.3

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕДРЕНИЮ КОНИЧЕСКИХ И ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТЕЛ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ\*

© 2017 г. **Линник Е.Ю.<sup>1</sup>, Котов В.Л.<sup>1</sup>, Константинов А.Ю.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Государственный научно-исследовательский институт машиностроения  
им. В.В. Бахирева, Дзержинск, Российская Федерация*

ElenkaLinnik@gmail.com

*Поступила в редакцию 29.05.2017*

Рассматривается задача об ударе и проникании жестких конических и пирамидальных тел по нормали к свободной поверхности полупространства, занимаемого упругопластической средой. Среда является линейно сжимаемой и подчиняется условию пластичности Мизеса – Шлейхера. Исследуемые тела – конус и четырехгранные пирамиды – обладают одинаковой площадью основания, нормаль к боковой поверхности тел составляет с направлением движения постоянный угол, равный углу полураствора конуса. При увеличении отношения длин диагоналей основания пирамиды происходит уменьшение высоты тела. Особенностью построения формы рассматриваемых пирамидальных тел является тот факт, что в рамках модели локального взаимодействия эти тела обладают одинаковым сопротивлением внедрению, совпадающим с сопротивлением внедрению кругового конуса.

Ранее в ходе численных расчетов в осесимметричной постановке была показана применимость модели локального взаимодействия к определению силовых характеристик острых конических тел. Проверка этого утверждения в полной трехмерной постановке осуществляется сравнением с результатами численного моделирования процессов удара и проникания конических и пирамидальных тел в упругопластическую среду с применением программного продукта LS-Dyna. Упругопластическая среда проникания рассматривается на неподвижной эйлеровой сетке с выделением пустых ячеек, в которые материал перетекает в процессе деформирования. Ударники моделируются жестким недеформируемым телом в лагранжевой системе координат. Приводятся результаты численных расчетов проникания тел с постоянной скоростью и по

---

\* Выполнено при частичном финансировании в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6944.2016.8) и РФФИ (грант №16-08-60035-мол-а-дк).

инерции, демонстрирующие, что уменьшение высоты тела приводит к росту силы сопротивления внедрению.

*Ключевые слова:* проникание, упругопластическая среда, конический ударник, пирамидальные тела, модель локального взаимодействия, трехмерное моделирование.

## Введение

Изучение нелинейных процессов внедрения тел различной формы в деформируемые среды имеет важное практическое значение [1], сохраняющее актуальность и в настоящее время [2–5]. Для решения задач удара и проникания широко применяются экспериментальные и численные методы на основе известных моделей грунтов [1, 6]. Для приближенных оценок напряжений и сил, действующих на ударник, распространение получили инженерные методики [1, 7–14], среди которых выделяются методы на основе модели локального взаимодействия (МЛВ). Параметры модели определяют исходя из эмпирических соотношений после калибровки на основе экспериментальных данных [15, 16]. Известны многочисленные модификации МЛВ на основе решения задачи о расширении сферической полости [9, 10, 17–19]. Установлено, что применение модели значительно упрощает процесс расчета форм тел равного сопротивления с учетом эффектов обтекания в двумерной постановке [20, 21]. В рамках МЛВ в классе пространственных конфигураций показано существование множества тел, обладающих одинаковыми оптимальными характеристиками: минимальная сила сопротивления внедрению или максимальная глубина проникания [22, 23]. Нормаль в каждой точке элемента боковой поверхности таких тел составляет одинаковый угол с вектором направления движения, площади оснований всех тел равны.

В осесимметричной постановке единственным таким телом будет круговой конус. Ранее сравнением результатов численных расчетов в осесимметричной постановке с данными экспериментов была показана применимость МЛВ к описанию проникания острых конусов в упругопластическую грунтовую среду [16, 24]. Анализировалось проникание пирамидальных тел в рамках МЛВ [25]. Проводились эксперименты для круговых конусов и тел звездообразного поперечного сечения, проникающих в пластилин и песок [26, 27]. В настоящей статье сравниваются силы сопротивления внедрению кругового конуса и трехгранной и четырехгранных пирамид с постоянной скоростью и по инерции в упругопластическую среду, полученные численно в трехмерной постановке.

## 1. Постановка задачи проникания

В статье приводятся результаты исследования процессов удара и проникания жестких тел по нормали в упругопластическую среду. Математическая модель динамики среды [5, 28] записывается в цилиндрической системе координат в виде системы дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы и импульса, и уравнений теории пластического течения с условием пластичности Мизеса – Шлейхера:

$$s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_T^2, \quad (1)$$

где  $s_{ij}$  – компоненты девиаторов тензоров напряжений, по повторяющимся индексам производится суммирование,  $\sigma_T$  – предел текучести.

Замыкается система дифференциальных уравнений линейной зависимостью давления  $p$  от объемной деформации  $e$  в упругопластической среде:

$$p = Ke, \quad (2)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия.

Принимается [29, 30] линейная зависимость предела текучести от давления

$$\sigma_T = Y + kp \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами  $Y$  и  $k$ , определяющими, соответственно, сцепление и внутреннее трение упругопластической среды.

Система дифференциальных уравнений динамики упругопластической среды дополняется начальными и краевыми условиями. В начальный момент времени скорости частиц ударника равны скорости удара, напряжения и скорость частиц грунта равны нулю. На контактной границе выполняется условие непроникания по нормали (равенство нормальных компонент векторов скоростей частиц по обе стороны контактной поверхности), касательное напряжение равно нулю. На плоскости симметрии задаются равными нулю нормальные компоненты вектора скорости и тангенциальные компоненты тензора напряжений. На внешних границах области выполняются условия на свободной поверхности – равенство нулю нормальной и тангенциальной компонент тензора напряжений.

## 2. Постановка задачи численного моделирования

Расчеты проводились для ударников различной формы (рис. 1) при следующих значениях параметров среды:  $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$ ,  $Y = 0,5 \text{ МПа}$ ,  $k = 1$ ,  $K = 320 \text{ МПа}$ ,  $G = 160 \text{ МПа}$  [16, 19]. Масса ударников составляет 40 грамм, скорость ударника  $V_0 = 150 \text{ м/с}$ .

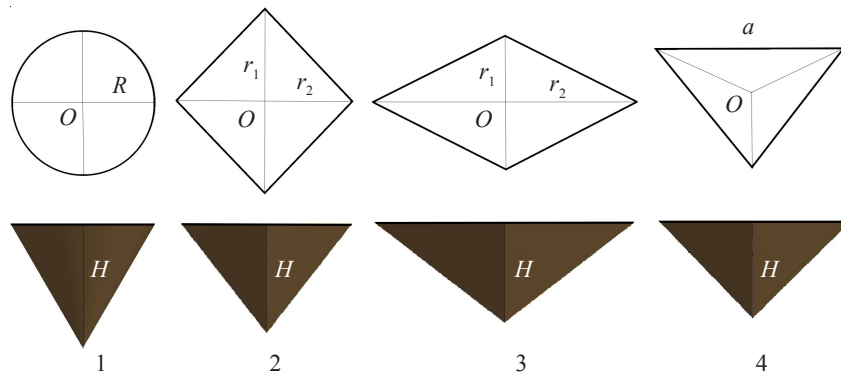


Рис. 1

Ударник 1 – круговой конус с углом полураствора при вершине  $30^\circ$  и радиусом основания  $R$ , боковые грани пирамидальных тел 2, 3, 4 наклонены под тем же углом  $30^\circ$ . Сторона равностороннего треугольника  $a$  в основании тела 4 равна 2,7 см. Половины диагоналей  $r_1$  и  $r_2$ , выбраны таким образом, что площади оснований совпадают с площадью основания конического ударника.

Геометрические параметры тел проникания: тело 1 –  $R = 1 \text{ см}$ ,  $H = 1,73 \text{ см}$ ; тело 2 –  $r_1 = r_2 = 1,24 \text{ см}$ ,  $H = 1,52 \text{ см}$ ; тело 3 –  $r_1 = 0,88 \text{ см}$ ,  $r_2 = 1,76 \text{ см}$ ,  $H = 1,36 \text{ см}$ ; тело 4 –  $a = 2,7 \text{ см}$ ,  $H = 1,35 \text{ см}$ .

Численная реализация осуществляется с использованием программного продукта LS-Dyna. Ударники моделируются жестким недеформируемым телом \*MAT\_RIGID, для описания среды проникания принимается модель \*MAT\_SOIL\_AND\_FOAM, которая включает в себя зависимость (3) предела текучести от давления в упругопластической среде в виде [30]:

$$\sigma_T = \sqrt{3(a_0 + a_1 p + a_2 p^2)}, \quad a_0 = \frac{Y^3}{3}, \quad a_1 = \frac{2kY}{3}, \quad a_2 = \frac{k^2}{3}.$$

Решение проводится в постановке FSI (*Fluid Structure Interaction*), согласно которой ударник рассматривается в лагранжевой системе координат, а среда – на неподвижной эйлеровой сетке [30] с выделением пустых ячеек, в которые материал перетекает в процессе деформирования. Взаимодействие между ударником и средой осуществляется с использованием специального типа контакта CONSTRAINED\_LAGRANGE\_IN\_SOIL [19, 30].

Упругопластическая среда представляется в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры которого выбраны таким образом, чтобы волна, отраженная от стенок, не искажала результаты расчетов. На рис. 2 представлена область среды с размерами 20×10×10 см с учетом плоской симметрии в случае, когда размер ячейки составляет  $h_1 = 0,1$  см со сгущением сетки в области контакта с ударником (степень сгущения 1:16).

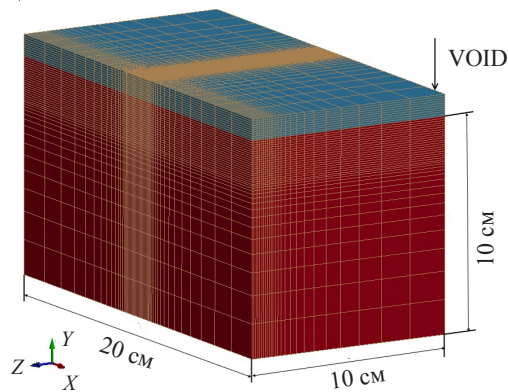


Рис. 2

Более подробные сетки с ячейками размером  $h_2 = 0,05$  см и  $h_3 = 0,025$  см получены из исходной делением ячейки пополам в каждом направлении. Исследование сходимости результатов численных расчетов на различных сетках проведено при проникании тел 1, 3, для которых в таблице 1 приведено время расчета на каждой сетке в случае проникания тел с начальной скоростью. В случае движения с постоянной скоростью время расчета практически не изменяется.

Таблица 1

Форма ударника	Время расчета, с		
	Шаг сетки $h_1$	Шаг сетки $h_2$	Шаг сетки $h_3$
Тело 1	237 (3 мин 57 с)	2060 (34 мин 20 с)	40000 (11 ч 6 мин 40 с)
Тело 3	191 (3 мин 11 с)	2207 (36 мин 47 с)	43501 (12 ч 5 мин 1 с)

На рис. 3 кривые синего, красного и черного цвета представляют собой временные зависимости силы сопротивления внедрению при проникании конического ударника на трех различных сетках с шагом  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  соответственно: кривые 1–3 – с постоянной скоростью внедрения 150 м/с, кривые 4–6 – по инерции с той же начальной скоростью проникания. Маркерами на рис. 4 показаны значения силы сопротивления внедрению на момент времени  $t^*$  в зависимости от шага сетки при внедрении конического ударника 1 (точки), пирамидального тела 3, в основании которого ромб (квадраты), и конического ударника, проникающего с постоянной скоростью (треугольники). Сплошным линиям соответствует линейная аппроксимация полученных значений. Здесь  $t^*$  – момент времени, когда тело погрузится в грунтовую среду на глубину, равную высоте ударника, что примерно соответствует достижению максимального значения силы сопротивления внедрению.

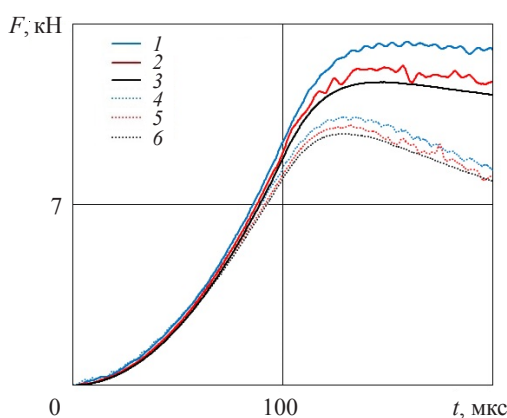


Рис. 3

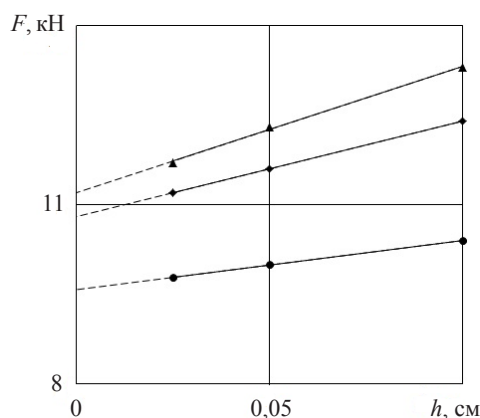


Рис. 4

Наблюдается линейная сходимость результатов численных расчетов в зависимости от шага сетки при снижении величины силы сопротивления внедрению с увеличением частоты дискретности сетки. Отношение абсолютных величин силы сопротивления внедрению к прогнозируемому результату показывает, что величина максимума силы сопротивления завышена не более чем на 20%. Дальнейшие расчеты проводились на грубой сетке с применением к результатам расчетов корректирующего множителя 0,9, что позволяет значительно снизить время расчета, при этом относительные погрешности результатов составляют  $\pm 10\%$ .

### 3. Результаты численных расчетов

Численные расчеты процессов удара и проникания тел 1–4 (см. рис. 1) в упругопластическую среду проводились в двух постановках: с постоянной скоростью 150 м/с и по инерции при массе ударников 40 г.

Результаты первой части численных расчетов, когда проникание происходит с постоянной скоростью 150 м/с, в размерном и безразмерном видах приведены на рис. 5а и б. Силы сопротивления внедрению отнесены к величине  $F^* = \rho V_0^2 S / 2$ , время проникания – к величине  $t^*$ .

Отмечаются различия не только на начальной стадии проникания, но и на квазистационарной стадии установившегося процесса. Рассмотренный процесс про-

никания с постоянной скоростью моделирует начальную стадию обращенных экспериментов [29].

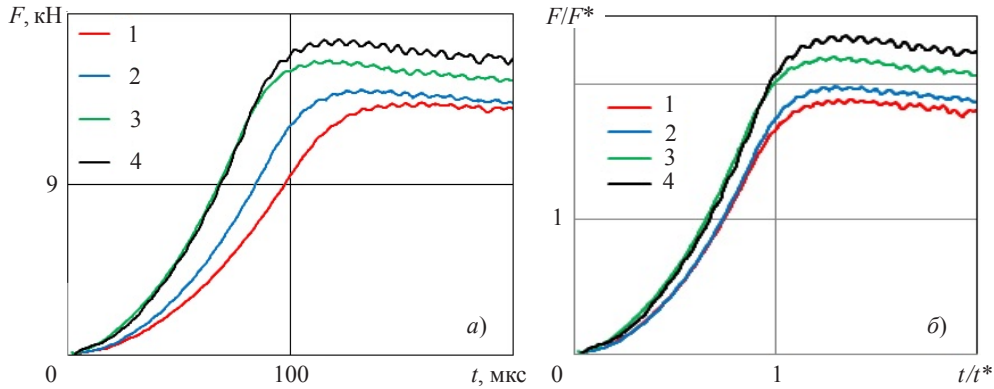


Рис. 5

Аналогичные исследования силовых характеристик проводились в случае движения по инерции. На рис. 6 представлены зависимости силы сопротивления внедрению тел 1–4 с заданными геометрическими параметрами. На рис. 6а на нестационарном участке внедрения головной части ударников наблюдаются различия максимальных значений сил сопротивления для тел 2, 3 и 4 по отношению к конусу, которые составляют 10, 20 и 30% соответственно, дальнейшие различия со временем уменьшаются. Однако нормировка результатов численных расчетов, аналогичная рассмотренному случаю проникания с постоянной скоростью, демонстрирует сохранение различий на начальной стадии развитого проникания (рис. 6б).

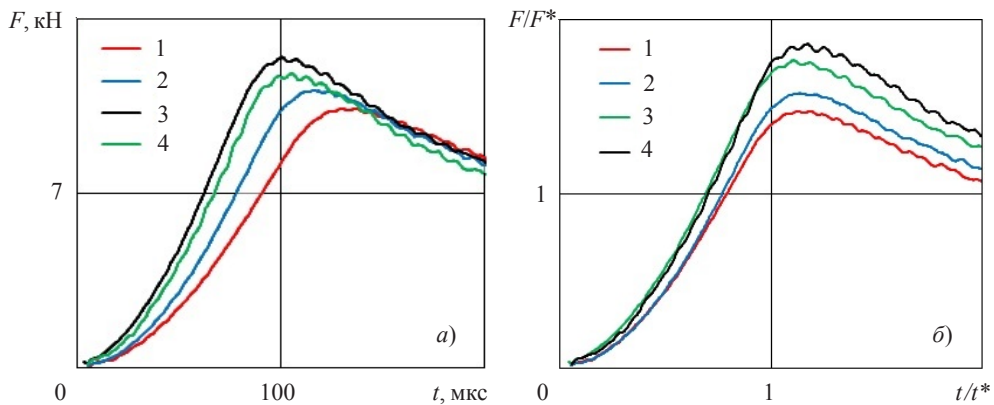


Рис. 6

### Заключение

Проведено изучение силовых характеристик на начальной стадии проникания пирамидальных и конических тел в упругопластическую среду. Показана близкая к линейной сходимость результатов трехмерных численных расчетов в рамках программного комплекса LS-Dyna, обеспечивающая приемлемую точность  $\pm 10\%$ . Это позволит в дальнейшем рассчитывать на сохранение достаточной точности расчетов при расширении класса рассматриваемых тел и анализе проникания под углом

к свободной поверхности. Первые полученные численные результаты показывают, что при увеличении отношения диагоналей в основании пирамиды  $n$  при сохранении угла наклона боковых поверхностей и площади основания тела наблюдается рост силы сопротивления внедрению. С ростом  $n$  происходит уменьшение высоты  $H$  и увеличение площади  $S_{\text{бок}}$  боковой поверхности пирамидального тела:

$$S_{\text{бок}} = \frac{n}{2} \pi R^2, \quad H^2 = \frac{n}{2} \frac{3}{(1+n^2)} \pi R^2.$$

Вопрос о количественной характеристике зависимости изменения силы сопротивления внедрению от высоты тела и/или площади боковой поверхности требует дальнейшего исследования.

#### Список литературы

1. Сагомоян А.Я. *Проникание*. М.: МГУ, 1974. 299 с.
2. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics—A Review. *Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. P. 355–371.
3. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *High-speed Penetration Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2013. 680 p.
4. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 66. P. 60–82.
5. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред*. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
6. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов. *Прикладная математика и механика*. 1960. Т. 244. №6. С. 1057–1072.
7. Демьшин Д.А., Крылов С.В. Численное моделирование процессов нормального проникания жестких тел в пористые грунты. *Проблемы прочности и пластичности*. 1991. Вып. 69. С. 103–106.
8. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии. *Журнал технической физики*. 2011. Т. 81. №7. С. 94–104.
9. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. P. 275–279.
10. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*. 1992. Vol. 12. No 3. P. 427–444.
11. Фомин В.М., Гулидов А.И., Садырин А.И. и др. *Высокоскоростное взаимодействие тел*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
12. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. *Прикладная теория проникания*. М.: Наука, 1992. 105 с.
13. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 47–57.
14. Баженов В.Г., Брагов А.М., Константинов А.Ю., Котов В.Л. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников с грунтовой среде. *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56. №3. С. 44–54.
15. Осипенко К.Ю. Проникание тела вращения в упругопластическую среду. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2009. №1. С. 169–180.
16. Котов В.Л., Баландин В.В., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. №4. С. 114–125.
17. Бабаков В.А., Шабунин Е.В. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 1987. №1. С. 105–110.



18. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической сжимаемой среде. Сообщение 2. Влияние инерционных сил. Температурные эффекты. *Проблемы прочности*. 1991. №12. С. 11–14.
19. Котов В.Л., Константинов А.Ю., Кибец Ю.И., Тарасова А.А., Власов В.П. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в упругопластической среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 303–311.
20. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах. *Докл. РАН*. 2013. Т. 449. №2. С. 156–159.
21. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Исследование оптимальных форм осесимметричных тел, проникающих в грунтовые среды. *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57. №5. С. 66–75.
22. Якунина Г.Е. Динамика пирамидальных тел в рамках модели локального взаимодействия. *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67. №1. С. 11–23.
23. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах. *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76. №3. С. 429–449.
24. Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах. *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 98–115.
25. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. О проникании неосесимметричных тел в твердую деформируемую среду и оптимизация формы. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. Т. 4. С. 178–183.
26. Бивин Ю.К. Сравнительная оценка проникания звездобразных и конических тел. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1999. №4. С. 113–117.
27. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. №6. С. 157–191.
28. Линник Е.Ю., Котов В.Л. *Исследование и оптимизация формы тел, проникающих в грунтовые среды*. Saarbrücken, Германия: LAP Lambert Academic Publisher. 2016. 69 с.
29. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50. №6. С. 115–125.
30. Котов В.Л., Константинов А.Ю. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7. №3. С. 225–233.

#### References

1. Sagomonyan A. Ya. *Pronikaniye [Penetration]* Moscow. MGU Publ. 1974. 299 p. (In Russian).
2. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics—A Review. *Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. P. 355–371.
3. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *High-speed Penetration Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2013. 680 p.
4. Omidvar M., Iskander M., Bless S. Response of granular media to rapid penetration. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 66. P. 60–82.
5. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udara i pronikaniya osesimmetrichnykh tel i identifikatsiya svoystv gruntovykh sred [Mathematical Modeling of Nonstationary Impact and Penetration of Axisymmetric Bodies and Identification of Soil Properties]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2011. 208 p. (In Russian).
6. Grigoryan S.S. Ob osnovnykh predstavleniyakh dinamiki gruntov [On the fundamental concepts of soil dynamics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1960. Vol. 244. No 6. P. 1057–1072 (In Russian).
7. Demen'shin D.A., Krylov S.V. Chislennoe modelirovanie protsessov normalnogo pronikaniya zhestkikh tel v poristye grunty [Numerical modeling of the processes of normal penetration of rigid bodies into porous soils]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 1991. Iss. 69. P. 103–106 (In Russian).



8. Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskiy M.Yu., Fedorov S.V. Computation of nondeformable striker penetration into low-strength obstacles using piezoelectric accelerometry data. *Technical Physics*. 2011. Vol. 56. No 7. P. 992–1002.
9. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. P. 275–279.
10. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*. 1992. Vol. 12. No 3. P. 427–444.
11. Fomin V.M., Gulidov A.I., Sadyrin A.I. et al. *Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie tel [High-velocity Interaction of Bodies]*. Novosibirsk. SO PAN Publ. 1999. 600 p. (In Russian).
12. Aptukov V.N., Mupzakayev R.T., Fonapev A.V. *Prikladnaya teoriya pronikaniya [Applied Theory of Penetration]*. Moscow. Nauka Publ. 1992. 105 p. (In Russian).
13. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimizatsiya formy zhestkogo tela, vnedryayushchegosya v sploshnyuyu sredu [Nonlocal optimization of thermoelastic rod made from discrete set of materials with application of genetic algorithm]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2007. Iss. 69. P. 47–57 (In Russian).
14. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Konstantinov A.Yu., Kotov V.L. Comparative analysis of methods for the penetration and plane-parallel motion of conical projectiles in soil. [*Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*]. 2015. Vol. 56. No 3. P. 381–390.
15. Osipenko K.Yu. Pronikaniye tela vrashcheniya v uprugoplastichnoy srede [Penetration of the body of revolution in an elastoplastic medium]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2009. No 1. P. 169–180 (In Russian).
16. Kotov V.L., Balandin V.V., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik Ye.Yu. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013. Vol. 54. No 4. P. 612–621.
17. Babakov V.A., Shabunin Ye.V. Ob odnom metode rascheta pnevmoproboynika v deformiruemykh spede [A method of calculating a pneumatic punch in a deformable medium]. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh [Journal of Mining Sciences]*. 1987. No 1. P. 105–110 (In Russian).
18. Aptukov V.N. Rasshirenie sfericheskoy polosti v uprugoplasticheskoy szhimaemoy srede. Soobshchenie 2. Vliyanie inertsionnykh sil. Temperaturnye efekty [The expansion of a spherical cavity in a compressible elastoplastic medium. Message 2. The influence of the inertial forces. The temperature effects]. *Problemy prochnosti [Problems of Strength]*. 1991. No 12. P. 11–14 (In Russian).
19. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu., Kibets Yu.I., Tarasova A.A., Vlasov V.P. Chislennoe modelirovanie ploskoparallelnogo dvizheniya konicheskikh udarnikov v uprugoplasticheskoy srede [Numerically modeling plane-parallel displacement of conical strikers in an elastoplastic medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Iss. 75. Pt. 4. P. 303–311 (In Russian).
20. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Linnik Ye.Yu. Models of calculation of axisymmetrical solids with the lowest drag during motion in soils. *Doklady Physics*. 2013. Vol. 58. No 3. P. 100–103.
21. Kotov V.L., Linnik Ye.Yu., Tarasova A.A. Issledovanie optimalnykh form osesimmetrichnykh tel, pronikayushchikh v gruntovye sredy [Optimum shapes of axisymmetric bodies penetrating into soil]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2016. Vol. 57. No 5. P. 66–75 (In Russian).
22. Yakunina G.Ye. Dinamika piramidalnykh tel v ramkakh modeli lokalnogo vzaimodeystviya [The dynamics of pyramidal bodies within the framework of the local interaction model]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 2003. Vol. 67. No 1. P. 11–23 (In Russian).
23. Yakunina G.Ye. Osobennosti vysokoskorostnogo dvizheniya tel v plotnykh sredakh [Features of high-speed motion of bodies in dense media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 2012. Vol. 76. No 3. P. 429–449 (In Russian).
24. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kotov V.L. Analysis of models for calculating the motion of solids of revolution of minimum resistance in soil media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78. No. 1. P. 65–76.
25. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeyev Ye.V. On the penetration of nonaxisymmetric

bodies into a deformable solid medium and their shape optimization. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. No 4. P. 671–677.

26. Bivin Yu.K. Cravnitel'naya otsenka pronikaniya zvezdoobraznykh i konicheskikh tel [Comparative evaluation of the penetration of star-shaped and conical bodies]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solid]*. 1999. No 4. P. 113–117 (In Russian).

27. Bivin Yu.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into soil medium. *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45. No 6. P. 892–920.

28. Linnik Ye.Yu., Kotov V.L. *Issledovaniye i optimizatsiya form tel, pronikayushchikh v gruntovyye sredy [Investigation and Optimization of the Shapes of Bodies Penetrating into Ground Environments]*. Saarbrücken, Germany. LAP Lambert Academic Publisher. 2016. 69 p. (In Russian).

29. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental-theoretical study of the penetration of rigid projectiles and identification of soil properties. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. Vol. 50. No 6. P. 1011–1019.

30. Kotov V.L., Konstantinov A. Yu. Chislennoye modelirovaniye ploskoparallelnogo dvizheniya konicheskikh udarnikov v gruntovoy srede na osnove modeley lokalnogo vzaimodeystviya [Numerical modeling of the plane-parallel motion of conical projectiles in the soil environment based on a local interaction model]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*. 2014. Vol. 7. No 3. P. 225–233 (In Russian).

## **COMPARATIVE ANALYSIS OF RESISTANCE TO THE INTRODUCTION OF CONICAL AND PYRAMIDAL BODIES TO THE ELASTIC PLASTIC ENVIRONMENT**

**Linnik E.Yu.<sup>1</sup>, Kotov V.L.<sup>1</sup>, Konstantinov A.Yu.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Bakhirev State Research Institute of Engineering, Dzerzhinsk, Russian Federation*

The problem of impact and penetration of rigid conical and pyramidal bodies along the normal to the free surface of a half-space occupied by an elastoplastic medium is considered. The medium is linearly compressible and obeys the Mises – Schleicher plasticity condition. The investigated cone bodies and tetrahedral pyramids have the same area of the base, the normal to the lateral surface of the bodies makes with a direction of motion a constant angle equal to the angle of the half-solution of the cone. With an increase in the ratio of the lengths of the diagonals of the base of the pyramid, the body height decreases. The peculiarity of constructing the shape of the pyramidal bodies under consideration is the fact that within the framework of the local interaction model these bodies have the same resistance to the introduction, which coincides with the resistance to the introduction of a circular cone.

Earlier, in numerical calculations in an axisymmetric formulation, the applicability of the local interaction model to the determination of the force characteristics of sharp conical bodies was demonstrated. The verification of this statement in a complete three-dimensional formulation is carried out by comparison with the results of numerical simulation of impact and penetration processes of conical and pyramidal bodies in an elastoplastic medium using the software product LS-Dyna. The elastic-plastic medium is considered on a fixed Euler grid with the selection of empty cells into which the material flows during deformation. The strikers are modeled by a rigid non-deformable body in the Lagrangian coordinate system. The results of numerical calculations of the penetration of bodies with constant velocity and inertia are presented, demonstrating that a decrease in body height leads to an increase in the resistance to penetration.

*Keywords:* penetration, elastoplastic medium, conical striker, pyramidal bodies, model of local interaction, three-dimensional modeling.