

УДК 539.3

**РАСЧЕТ ПРЯМЫХ ЗАМКНУТЫХ  
МНОГОСТРИНГЕРНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ****О.Р. Кузнецов***Саратов*

Предлагается методика расчета прямых замкнутых призматических оболочек с учетом геометрической нелинейности и наличия продольного силового набора (стрингеров). Получены разрешающие уравнения расчета, которые представлены двумя способами. Показано, что учет геометрической нелинейности для оболочек рассматриваемого типа возможен только с помощью дополнительных аппроксимирующих функций специального вида. Выбран численный метод решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Анализируется влияние учета геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние оболочки рассматриваемого типа.

Рассматриваются пространственные многострингерные прямые замкнутые призматические оболочки средней длины. Контур поперечного сечения, образованный отрезками прямых, имеет произвольное очертание и предполагается жестким в своей плоскости. Оболочка находится под действием произвольных крутящих и изгибающих нагрузок (распределенных, сосредоточенных). Оболочка в продольном направлении усилена продольными элементами (стрингерами) с площадью поперечного сечения  $F_i$  ( $i$  – номер узла поперечного сечения). Продольные перемещения точек контура определяются продольными перемещениями ее узлов. Под узлом понимается точка излома контура или точка расположения стрингера. Продольные элементы (стрингеры) воспринимают только нормальные напряжения. Оболочки такого типа широко используются в различных областях техники и строительных сооружений.

На основе теории В.З. Власова [1] расчета призматических оболочек средней длины были созданы методики расчета конкретных конструкций такого типа в линейной постановке. Обобщением этой теории является работа [2].

Краткий обзор работ применительно к рассматриваемому объекту исследования в линейной постановке приведен в [3]. В отношении нелинейных задач в настоящее время отсутствует единый подход. Имеются публикации, например [4–6], в которых рассматриваются нелинейные задачи с различными подходами, представляемыми и понимаемыми независимо друг от друга. Это осложняет оценку универсальности используемых подходов и понимания степени их взаимосвязи. Работы [7, 8] являются итогом определенного этапа исследований, проводимых в Саратовском техническом университете, по расчету замкнутых призматических оболочек с учетом нелинейных факторов.

Данная статья является логическим продолжением [3]. Этими работами открывается цикл исследований автора по созданию единообразных подходов при расчете оболочек рассматриваемого типа.

### Статико-геометрическая модель

В соответствии с методом В.З. Власова расчета призматических оболочек средней длины компоненты вектора перемещений точек контура в продольном направлении (вдоль оси  $z$ ), вдоль контура оболочки (в направлении оси  $s$ ) и перпендикулярно контуру оболочки задаются соответственно в виде:

$$\begin{aligned} U(z, s) = BU_i(z)\varphi_i(s), \quad V(z, s) = BV_h(z)\psi_h(s), \\ W(z, s) = BV_h\chi_h(s); \quad \langle i \rangle, \langle h \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi_i(s)$ ,  $\psi_h(s)$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $h = 0, \dots, m$ ) – задаваемые безразмерные аппроксимирующие функции;  $U_i(z)$ ,  $V_h(z)$  – неизвестные безразмерные функции, подлежащие определению. Угловые скобки означают суммирование по соответствующему индексу. Геометрические размеры оболочки задаются безразмерными параметрами в соответствии с [3]:  $\eta_1 = l/B$  – относительное удлинение оболочки (обычно принимают  $B = d_2$ ).

Отличными от нуля компонентами деформации являются продольные деформации  $\varepsilon_z$  в направлении оси  $z$  и деформации сдвига  $\varepsilon_{sz}$  срединной поверхности пластинок, составляющих оболочку. Зависимости между деформациями и перемещениями принимаются в виде:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2\eta_1^2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2)$$

Отличными от нуля компонентами тензора напряжений являются  $\sigma_{sz}(z, s)$  и  $\sigma_z(z, s)$ . По толщине пластинок, составляющих оболочку, напряжения распределены равномерно. Зависимость между напряжениями и деформациями полагаем линейной:

$$\sigma_z = \sigma_z(z, s) = E\varepsilon_z, \quad \sigma_{12} = \sigma_{sz}(z, s) = l_1 E\varepsilon_{12}, \quad G = l_1 E = E/2(1 + \nu), \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга. Для линеаризации нелинейных зависимостей используется метод последовательных нагружений [9]. Имеем для приращений величин следующие выражения:

$$\Delta\varepsilon_z = \frac{1}{\eta_1} u'_i \varphi_i + \frac{1}{\eta_1^2} v'_h M_h, \quad \Delta\varepsilon_{12} = u_i \varphi'_i + \frac{1}{\eta_1} v'_h \psi_h \quad \langle i \rangle, \langle h \rangle, \quad (4)$$

$$\Delta\sigma_z = E\Delta\varepsilon_z, \quad \Delta\sigma_{12} = l_1 E\Delta\varepsilon_{12}, \quad \Delta N_z = \delta\Delta\sigma_z, \quad \Delta S_{12} = \delta\Delta\sigma_{12}, \quad (5)$$

где  $u_i$ ,  $v_h$  – приращения искомым обобщенных перемещений;  $\Delta N_z$ ,  $\Delta S_{12}$  – усилия, возникающие в поперечных сечениях оболочки, приходящиеся на единицу длины контура, без учета стрингеров; с учетом ортогональности аппроксимирующих функций используется следующее обозначение:

$$M_h = M_h(z, s) = V'_h(z)(\psi_h^2(s) + \chi_h^2(s)). \quad (6)$$

Влияние продольных элементов (стрингеров) учитывается следующим образом. Обозначим через  $E_i = E \cdot \bar{E}_i$  модуль упругости  $i$ -го стрингера, через  $T_i = T_i(z)$  – продольное усилие в  $i$ -м стрингере. Получим:

$$T_i = E_i F_i \Delta \varepsilon_2(i) = \Delta N_2^*(i) s_k, \quad \Delta N_2^*(i) = E_i \delta \bar{s}_i^* \Delta \varepsilon_2(i). \quad (7)$$

Здесь  $\Delta N_2^*(i)$  – погонное (отнесенное к единице длины контура) продольное усилие, которое получается в результате условного "размазывания" усилия  $T_i$  по всему контуру поперечного сечения толщиной  $\delta$ ;

$$\Delta \varepsilon_2(i) = \Delta \varepsilon_2(z, i) = \frac{1}{\eta_1} \varphi_i(i) u_i' + \frac{1}{\eta_2} \nu_h' M_h(i), \quad \langle h \rangle; \quad (8)$$

$$F_i = \delta \bar{F}_i, \quad s_k = \oint ds = B \bar{s}_k^*, \quad \bar{F}_i = F_i / \delta = \bar{s}_i^* s_k = B \bar{F}_i^*, \quad \bar{F}_i^* = \bar{s}_i^* \bar{s}_k^*, \quad (9)$$

где  $\Delta \varepsilon_2(i)$  – значение продольной деформации  $i$ -го стрингера;  $\varphi_i(i)$ ,  $M_h(i)$  – значения соответствующих функций в  $i$ -м узле;  $\delta$  – характерная толщина контура;  $s_k$  – длина контура;  $\bar{s}_k^*$  – безразмерная длина контура; безразмерный коэффициент  $\bar{s}_i^*$  показывает, какую долю от площади поперечного сечения оболочки составляет площадь данного стрингера. Тогда продольное усилие с учетом стрингеров, действующее в поперечном сечении оболочки и отнесенное к единице длины контура, можно записать в виде:

$$\Delta N_2 = \Delta N_2(z, s) = E \delta(s) \Delta \varepsilon_2 + \Delta N_2^*(i). \quad (10)$$

Напряженно-деформированное состояние оболочки полностью определяется приращениями обобщенных перемещений на текущем этапе нагружения

$$u_i(z), \quad u_i'(z), \quad \nu_h(z), \quad \nu_h'(z) \quad (i=1, \dots, n, \quad h=0, \dots, m) \quad (11)$$

и их накопленными на  $k$ -м этапе нагружения значениями

$$U_i^k(z), \quad (U_i'(z))^k, \quad V_h^k(z), \quad (V_h'(z))^k. \quad (12)$$

### Вывод разрешающих уравнений

Уравнения равновесия оболочки для определения обобщенных перемещений получим с помощью уравнений Эйлера для приращения полной потенциальной энергии. Выражение для приращения полной потенциальной энергии на этапе нагружения имеет вид:

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta W - \Delta T, \quad (13)$$

где  $\Delta T$  – работа внешних сил, которая записывается в виде

$$\Delta T = B^2 l \int_0^1 (R_k(z) \nu_k + P_\gamma(z) u_\gamma) dz + B^2 (R_k^* \nu_k + P_\gamma^* u_\gamma) \Big|_{z=0}^{z=1}, \quad \langle \gamma \rangle, \langle k \rangle. \quad (14)$$

Здесь и далее дополнительно к индексам  $i, h$  из выражения (1) вводят соответственно индексы  $\gamma, k$  с аналогичным физическим смыслом и с теми же интервалами значе-

ний. Индексы  $i, h$  используются только для операции суммирования по соответствующему индексу. Индексы  $\gamma, k$  показывают, что выражение, содержащее эти индексы, на самом деле состоит из  $n + (m + 1)$  выражений, которые соответствуют значениям  $\gamma = 1, \dots, n; k = 0, \dots, m$ . Например, в выражении (14) это означает, что в последующих математических преобразованиях оно распадается на  $n + (m + 1)$  выражений, которые соответствуют интервалу значений этих индексов. В соответствии с [2]:

$$\begin{aligned} R_k(z) &= \oint p_1(z, s) \psi_k(s) ds, & P_\gamma(z) &= \oint p_2(z, s) \phi_\gamma(s) ds, \\ R_k^*(z) &= \oint p_1^*(z) \psi_k(s) ds, & P_\gamma^*(z) &= \oint p_2^*(z) \phi_\gamma(s) ds \quad (z=0; 1), \\ & & & (\gamma=1, \dots, n; k=0, \dots, m), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $p_1(z, s), p_2(z, s), p_1^*(z), p_2^*(z)$  ( $z=0; 1$ ) – внешняя нагрузка.

Расчетная модель оболочки задается следующим выражением:

$$\Delta W = Bl \int_0^1 \oint (\Delta N_2 \Delta \varepsilon_2 + \Delta S_{12} \Delta \varepsilon_{12}) dz ds. \quad (16)$$

Подставляем (14)–(16) в (13), получим

$$\Delta \Delta = Bl \int_0^1 F(z) dz - B^2 (R_k^*(z) v_k(z) + P_\gamma^* u_\gamma(z)) \Big|_{z=0}^{z=1}, \quad \langle k \rangle, \langle \gamma \rangle, \quad (17)$$

где

$$F(z) = F(z, u_\gamma, u'_\gamma, v_k, v'_k) = 1/2 E \delta F_1(z) - B F_2(z), \quad (18)$$

$$F_1(z) = \oint (\Delta \bar{\sigma}_2 \Delta \varepsilon_2 + l_1 \Delta \bar{\sigma}_{12} \Delta \varepsilon_{12}) ds, \quad (19)$$

$$F_2(z) = R_k(z) v_k(z) + P_\gamma(z) u_\gamma(z), \quad \langle k \rangle, \langle \gamma \rangle.$$

Необходимое условие экстремума функционала (17) представим в виде уравнений Эйлера (уравнений равновесия) и статических граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'_\gamma} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial v_k} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial v'_k} &= 0, \\ \frac{\partial F(z)}{\partial u'_\gamma} &= \frac{1}{\eta_1} P_\gamma^*(z), & \frac{\partial F(z)}{\partial v'_k} &= \frac{1}{\eta_1} R_k^*(z) \quad (\bar{z}=0; 1), \\ & & & (\gamma=1, \dots, n; k=0, \dots, m). \end{aligned} \quad (20)$$

После выполнения соответствующих преобразований, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} &= \frac{1}{2} E \delta \frac{\partial F_1}{\partial u_\gamma} - B \frac{\partial F_2}{\partial u_\gamma} = E \delta l_1 \left( b_\gamma^i u_i + \frac{1}{\eta_1} c_\gamma^h v'_h \right) - B P_\gamma, \quad \langle i \rangle, \langle h \rangle, \\ & & & (\gamma=1, \dots, n), \end{aligned} \quad (21)$$

получим уравнения равновесия и статические граничные условия в виде краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений  $2(n+m+1)$  порядка с переменными коэффициентами:

$$A(Y^{\kappa-1}(z)) \cdot \Delta y_{\kappa}(z) = \Delta Q(z), \quad A^*(Y^{\kappa-1}(z)) \cdot \Delta y_{\kappa}^*(z) = \Delta Q^*(z) \quad (z=0;1), \quad (22)$$

где  $A(Y^{\kappa-1}(z))$ ,  $A^*(Y^{\kappa-1}(z))$  – матрицы коэффициентов, вычисленные с учетом накопленных на  $(\kappa-1)$  этапе нагружения обобщенных перемещений, они имеют вид:

$$A(Y^{\kappa-1}(z)) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$A^*(Y^{\kappa-1}(z)) = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* \end{pmatrix} \quad (z=0;1). \quad (24)$$

Коэффициенты матриц  $A$  и  $A^*$  краевой задачи (22) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\eta_1^2} (a_{\gamma}^i + \bar{E}_i \bar{F}_i^* \varphi_{\gamma}^2(i)), \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = -l_1 b_{\gamma}^i, \\ A_{14} &= \frac{1}{\eta_1^3} \left( \oint \varphi_{\gamma} M_h \bar{\delta} ds + \bar{E}_i \bar{F}_i^* \varphi_{\gamma}(i) M_h(i) \right), \quad A_{15} = -\frac{l_1}{\eta_1} c_{\gamma}^h, \\ A_{21} &= 0, \quad A_{22} = \frac{l_1}{\eta_1} d_k^i, \quad A_{23} = 0, \quad A_{24} = \frac{l_1}{\eta_1} r_k^h, \quad A_{25} = 0, \\ A_{11}^* &= \frac{1}{\eta_1} (a_{\gamma}^i + \bar{E}_i \bar{F}_i^* \varphi_{\gamma}^2(i)), \quad A_{12}^* = 0, \quad A_{21}^* = 0, \quad A_{22}^* = l_1 d_k^i, \\ A_{13}^* &= \frac{1}{\eta_1^2} \left( \oint M_h \varphi_{\gamma} \bar{\delta} ds + \bar{E}_i \bar{F}_i^* \varphi_{\gamma}(i) M_h(i) \right), \quad A_{23}^* = \frac{l_1}{\eta_1} r_k^h. \end{aligned} \quad (25)$$

Элементы матриц  $A$  и  $A^*$  сами являются матрицами (индексы  $\gamma, k$  задают номер строки;  $i, h$  – номер столбца матрицы), их коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$a_{\gamma}^i(z) = \oint \varphi_{\gamma} \varphi_i \bar{\delta} ds, \quad b_{\gamma}^i(z) = \oint \varphi_{\gamma}' \varphi_i' \bar{\delta} ds, \quad (26)$$

$$c_{\gamma}^h(z) = \oint \psi_h \varphi_{\gamma}' \bar{\delta} ds, \quad d_k^i(z) = \oint \psi_k \varphi_i' \bar{\delta} ds, \quad r_k^h(z) = \oint \psi_k \psi_h \bar{\delta} ds, \quad (27)$$

$$\langle i \rangle, \langle h \rangle; \quad (\gamma, i = 1, \dots, n, \quad k, h = 0, \dots, m).$$

Напомним, что  $\varphi_i'(s) = \partial \varphi_i(s) / \partial s$ . Вектор-столбцы искомого приращения обобщенных перемещений на  $\kappa$ -м этапе нагружения имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta y_{\kappa}(z) &= (u_i''(z), u_i'(z), u_i(z), \quad v_h''(z), v_h'(z))_{\kappa}^T \quad (i=1, \dots, n, \quad h=0, \dots, m), \\ \Delta y_{\kappa}^*(z) &= (u_i'(z), u_i(z), v_h'(z))_{\kappa}^T \quad (i=1, \dots, n, \quad h=0, \dots, m), \quad z=0;1; \end{aligned} \quad (28)$$

вектор-столбцы правых частей:

$$\Delta Q(z) = -\frac{\eta_2}{E} (P_\gamma(z), R_k(z))^T \quad (\gamma=1, \dots, n, \quad k=0, \dots, m), \quad (29)$$

$$\Delta Q^*(z) = \frac{1}{E\delta} (P_\gamma^*(z), R_k^*(z))^T \quad (\gamma=1, \dots, n, \quad k=0, \dots, m), \quad z=0; 1.$$

### Вариант записи разрешающих уравнений

Форма записи разрешающих уравнений в виде краевой задачи (22) для системы линейных дифференциальных уравнений удобна для последующей реализации подходящего численного процесса. Однако ее математическая "рафинированность" затрудняет анализ физического смысла ее отдельных слагаемых, а также их связь с принятыми и потенциально возможными гипотезами о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки.

С целью достижения большей наглядности в записи разрешающих уравнений (с точки зрения физического смысла слагаемых, входящих в эти уравнения) представим эти уравнения в следующем виде. Запишем выражения для слагаемых, входящих в выражения (20), используя соотношения типа (21) с учетом выражений для напряжения (4), (5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_\gamma} &= \delta \oint \Delta \sigma_{12} \phi'_\gamma \bar{\delta} ds - B P_\gamma, & \frac{\partial F}{\partial v_k} &= -B R_k, \\ \frac{\partial F}{\partial u'_\gamma} &= \frac{\delta}{\eta_1} \oint \Delta \sigma_2 \phi_\gamma \bar{\delta} ds, & \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'_\gamma} &= \frac{\delta}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_2 \phi_\gamma \bar{\delta} ds, \\ \frac{\partial F}{\partial v'_k} &= \frac{\delta}{\eta_1} \oint \Delta \sigma_{12} \psi_k \bar{\delta} ds + \frac{\delta}{\eta_1^2} \oint \Delta \sigma_2 M_k \bar{\delta} ds, \\ \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial v'_k} &= \frac{\delta}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_{12} \psi_k \bar{\delta} ds + \frac{\delta}{\eta_1^2} \oint (\Delta \sigma_2 M_k)' \bar{\delta} ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (20), получим уравнения равновесия выделенной полоски и статистические граничные условия с учетом геометрической нелинейности, совпадающие по форме с соответствующими уравнениями В.З.Власова:

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_2 \phi_\gamma \bar{\delta} ds - \oint \Delta \sigma_{12} \phi'_\gamma \bar{\delta} ds = -\eta_2 P_\gamma & (\gamma=1, \dots, n), \\ \frac{1}{\eta_1^2} \oint (\Delta \sigma_2 M_k)' \bar{\delta} ds + \frac{1}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_{12} \psi_k \bar{\delta} ds = -\eta_2 R_k & (k=0, \dots, m), \end{cases} \quad (31)$$

$$\oint \Delta \sigma_2 \phi_\gamma \bar{\delta} ds = \frac{1}{\delta} P_\gamma^*, \quad \frac{1}{\eta_1} \oint \Delta \sigma_2 M_k \bar{\delta} ds + \oint \Delta \sigma_{12} \psi_k \bar{\delta} ds = \frac{1}{\delta} R_k^*. \quad (32)$$

В соответствии с методом В.З.Власова [1] прямые замкнутые призматические оболочки рассматриваются как пространственные системы, состоящие из множества бесконечно узких в направлении оси  $z$  поперечных полосок шириной  $dz$ . Эти

полоски непрерывно расположены вдоль образующей. Выражения (31), (32) являются уравнениями равновесия элементарной полоски, которые получены в результате приравнивания нулю суммы работ внутренних и внешних сил, приложенных к полоске, на ее возможных перемещениях. Выше было показано, что в выражениях (31), (32) можно положить  $M_k = 0$ , тогда получим интегральные условия равновесия выделенной полоски:

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_2 \varphi_\gamma \bar{\delta} ds - \oint \Delta \sigma_{12} \varphi'_\gamma \bar{\delta} ds = -\eta_2 P_\gamma, & (\gamma = 1, \dots, n), \\ \frac{1}{\eta_1} \oint \Delta \sigma'_{12} \psi_k \bar{\delta} ds = -\eta_2 R_k, & (k = 0, 1, \dots, m) \end{cases} \quad (33)$$

и статические граничные условия

$$\oint \Delta \sigma_2 \varphi_\gamma \bar{\delta} ds = \frac{1}{\delta} P_\gamma^*, \quad \oint \Delta \sigma_{12} \psi_k \bar{\delta} ds = \frac{1}{\delta} R_k^* \quad (\gamma = 1, \dots, n, k = 0, 1, \dots, m). \quad (34)$$

Приведенные выражения формально совпадают с соответствующими уравнениями, полученными В.З. Власовым [1] для линейного случая, и точно соответствуют линейной задаче, если в выражениях для приращений деформаций (4) и напряжении (5) положить  $M_h = 0$ .

Запись разрешающих уравнений в таком виде, на наш взгляд, способствует формированию единообразных подходов при постановке нелинейных задач и понимания степени их взаимосвязи.

#### Методика численного решения

При решении задачи используется вариант метода непрерывного продолжения решения по параметру нагрузки в форме метода последовательных нагружений [9]. Краевая задача, которая получается на этапе нагружения, решается численным интегрированием путем сведения к серии задач Коши. Для преодоления численной неустойчивости при интегрировании краевой задачи применяется метод С.К. Годунова [10].

Для получения гарантированной величины погрешности решения используется модификация МПН под названием "Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров" [11, 12]. Использование этого метода позволяет получать приближенное решение по недостатку и по избытку. Точное решение гарантированно лежит между этими двумя приближенными решениями. За "погрешность решения" принимается разница значений приближенных решений (по недостатку и по избытку). Величина погрешности регулируется величиной шага нагружения.

#### Выбор аппроксимирующих функций

При решении задачи в рассматриваемой постановке важным этапом является выбор аппроксимирующих функций.

В условиях учета геометрической нелинейности при расчете оболочек рассматриваемого типа появляется особенность в выборе аппроксимирующих функций, которая отсутствует для задач в линейной и физически нелинейной постановке. А именно, анализ выражений для коэффициентов краевой задачи показывает, что нелинейность учитывается коэффициентами (25), которые содержат  $M_h$ . В случае жесткого контура поперечного сечения эти коэффициенты точно равны нулю для всех

$\varphi_\gamma(s)$ , которые задают продольные перемещения точек контура как жесткого диска (при неподвижном полюсе) плюс депланационные перемещения, то есть для традиционного набора функций. Эти коэффициенты отличны от нуля только для функции  $\varphi_0(s)$ , которая задает поступательное перемещение точек контура в продольном направлении. Поясним сказанное на следующем примере. Рассмотрим прямой однозамкнутый кессон с прямоугольным контуром поперечного сечения, закрепленный, например, так, как показано на рис. 1. Кессон нагружен некоторой крутящей нагрузкой.

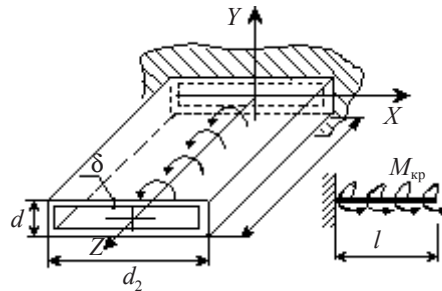


Рис. 1

Система аппроксимирующих функций в этом случае имеет вид [1, 2], приведенный на рис. 2.

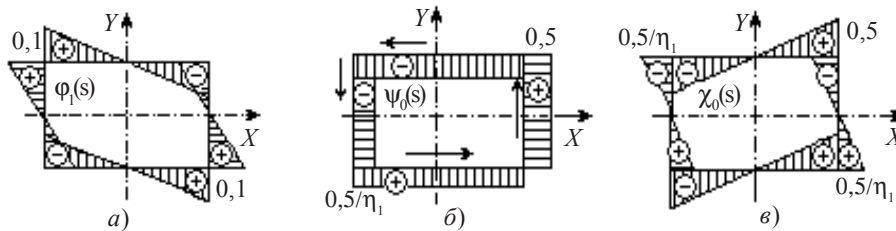


Рис. 2

Функции  $\varphi_1(s)$  задают продольные депланации контура соответственно при кручении, функции  $\psi_0(s)$ ,  $\chi_0(s)$  – перемещение точек контура в его плоскости при кручении относительно оси  $z$ . Вид функций  $\varphi_1$  может уточняться, например,  $\varphi_2$  (рис. 3), но их характер симметрии относительно осей  $X$  и  $Y$  остается неизменным. Коэффициенты (25), связанные с учетом нелинейности, равны нулю:

$$\oint M_h \varphi_\gamma \bar{\delta} ds = V_h' (\oint \varphi_\gamma \psi_h^2 \bar{\delta} ds + \oint \varphi_\gamma \chi_h^2 \bar{\delta} ds) = 0, \quad (35)$$

как интегралы от произведения кососимметричных функций  $\varphi_\gamma$  на симметричные  $\psi_h^2, \chi_h^2$ . Аналогичная ситуация возникает с аппроксимирующими функциями, которые задают перемещения точек контура при действии изгибающих нагрузок. Поэтому для возможности учета геометрической нелинейности в условиях жесткого контура поперечного сечения необходимо брать дополнительные функции для продольных перемещений, которые обладают свойством симметричности относительно координатных осей. Таким свойством обладают только функции вида  $\varphi_0, \varphi_4$ , приведенного на рис. 3.



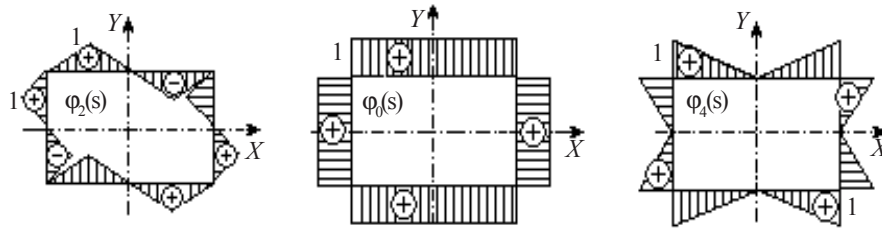


Рис. 3

Функция  $\varphi_0(s)$  задает поступательные перемещения точек контура в продольном направлении, то есть растяжимость продольной оси оболочки; функция  $\varphi_4(s)$  и ее возможные уточнения задают продольную депланацию контура, которая соответствует деформации продольной оси. Отсюда, в частности, следует, что учет геометрической нелинейности для симметричных относительно осей  $x, y$  граничных условий для симметричной относительно этих осей нагрузки приводит к несимметричному относительно осей  $x, y$  распределению НДС точек контура оболочки.

#### Пример расчета

Рассмотрим кессон, изображенный на рис. 1, который находится под действием равномерно распределенного по длине оболочки крутящего момента. Геометрические размеры оболочки задаются следующими параметрами:

$$B = d_2, \quad d = d_1, \quad \eta = 2, \quad \eta_1 = 4, \quad \eta_2 = 100,$$

$$\bar{d}_2 = 1, \quad \bar{d}_1 = 1/\eta, \quad \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = 1, \quad \bar{s}_i^* = 0,01.$$

Рассматриваются поперечные сечения без продольного набора (схема №1 рис. 4) и с продольным набором по схемам №2–4 (рис. 4).

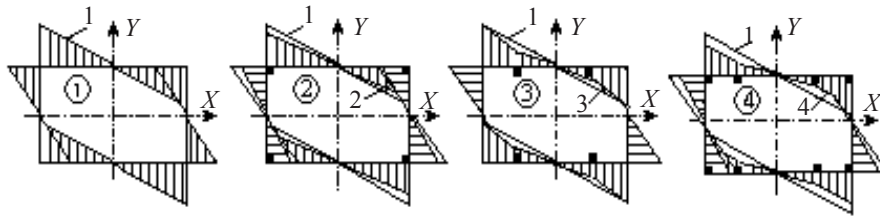


Рис. 4

Приращения перемещений в соответствии с (1) задаются в виде:

$$u(z, s) = B(u_0(z)\varphi_0(s) + u_1(z)\varphi_1(s)), \quad v(z, s) = Bv_0(z)\psi_0(s),$$

где  $\varphi_0(s)$ ,  $\varphi_1(s)$ ,  $\psi_0(s)$  приведены на рис. 2, 3.

Уравнения равновесия и статические граничные условия при  $z = 1$  получаются из (22) с учетом выражений (23)–(29) при  $i, \gamma, k, h = 0$ . Геометрические граничные условия при  $z = 0$  имеют вид:

$$u_0 = u_1 = v_0 = 0.$$

Для заданной схемы нагружения правая часть уравнений равновесия и граничных условий в соответствии с (29) имеет вид:

$$P_0(z) = P_1(z) = R_0^*(z) = P_0^*(1) = P_1^*(1) = 0, \quad \frac{\eta_1^2 \eta_2}{l_1 E} = \frac{\eta_1^2 B}{l_1 E \delta} R_0 = 0,0032.$$

Получили краевую задачу для системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (25)–(27) шестого порядка относительно шести неизвестных  $u'_0(z)$ ,  $u_0(z)$ ,  $u'_1(z)$ ,  $u_1(z)$ ,  $v'_0(z)$ ,  $v_0(z)$ .

Значение максимального депланационного напряжения в угловой точке контура на первом этапе нагружения принимает значение

$$\Delta \sigma_1 = \frac{1}{\eta_1} E u'_1 \cdot 0,1 = 44,0 \text{ МПа.}$$

Нагружение ведется до четырнадцатой ступени нагружения  $n=14$ , что соответствует  $\sigma_1 = 616$  МПа. На рис. 4 приведено изменение вдоль контура поперечного сечения характера нормальных напряжений в зависимости от наличия стрингеров (схемы №1–4).

На рис. 5 приведены графики изменения вдоль оболочки:

– приращений продольных перемещений, связанных с депланацией контура поперечного сечения  $u_1(z) \Phi_1(t.1) = u_1(z) \cdot 0,1$  – кривые 1, 3 (линейная составляющая). Кривая 1 соответствует схеме №1 поперечного сечения, кривая 3 соответствует схеме №2 поперечного сечения (то есть со стрингерами в углах);

– приращений продольных перемещений, связанных с растяжимостью продольной оси оболочки  $u_0(z) \Phi_0(s) = u_0(z)$ , – кривая 2 для седьмой ( $n=7$ ) и четырнадцатой ( $n=14$ ) ступеней нагружения (нелинейная составляющая).

На рис. 6 приведены графики изменения вдоль оболочки:

– приращений производных от продольных перемещений, связанных с депланацией контура поперечного сечения  $u'_1(z) \Phi_1(t.1) = u'_1(z) \cdot 0,1$  – кривые 1, 3 (линейная составляющая);

– приращений производных от продольных перемещений, связанных с растяжимостью продольной оси оболочки  $u'_0(z) \cdot \Phi_0(s) = u'_0(z)$ , – кривая 2 для четырнадцатой ( $n=14$ ) ступени нагружения (нелинейная составляющая).

Отметим, что на рис. 6 приведены, по существу, графики изменения соответствующих (линейных, нелинейных) нормальных напряжений в угловой точке контура. Анализ графиков на рис. 5, 6 показывает, что учет геометрической нелинейности приводит к увеличению продольных перемещений (кривая 2, рис. 5) и появлению дополнительных нормальных напряжений (кривая 2, рис. 6). Перемещения в ряде случаев увеличиваются на 30%, возникают дополнительные напряжения. Поэтому следует конструктивно предусматривать возможность для поступательного перемещения сечений оболочки на величину, равную до 30% от значений максимальных депланационных перемещений, а также следует учитывать появление нормальных напряжений в сечениях, где их вроде бы не должно быть.

Наличие продольного набора (стрингеров) суммарной площадью до 15% от площади поперечного сечения несколько снижают пики максимальных значений НДС:

– характер распределения нормальных напряжений по контуру поперечного сечения, рис. 4, схемы 1–4;

- перемещения на рис. 5, сечение  $z=0,3$ ; кривые 1, 3;
- нормальные напряжения на рис. 6, сечение  $z=0$ , кривые 1, 3.

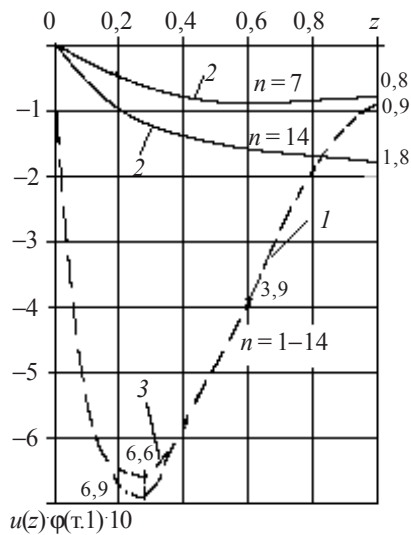


Рис. 5

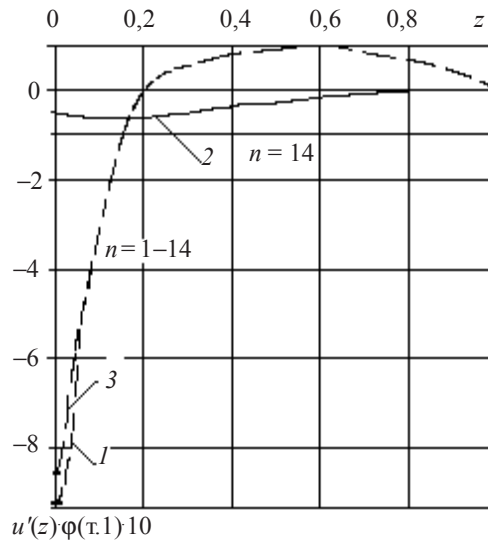


Рис. 6

Наличие стрингеров оказывает в целом слабое влияние на параметры НДС оболочки. Основное их назначение является конструктивно-технологическим.

### Выводы

1. При расчете прямых замкнутых призматических оболочек с жестким контуром поперечного сечения учет геометрической нелинейности возможен только в условиях отказа от гипотезы о нерастяжимости продольной оси оболочки. Для реализации этого условия необходимо использовать дополнительные аппроксимирующие функции специального вида, возможный вид которых приведен в статье.

2. При уровне эксплуатационных напряжений порядка 200-250 МПа гипотеза о нерастяжимости продольной оси выполняется с высокой степенью точности. Вклад нелинейных слагаемых по нормальным напряжениям составляет около 1% от максимальных напряжений, перемещений – от 1 до 8% от максимальных перемещений. Отметим, что этот уровень напряжений соответствует эксплуатационным напряжениям для сталей строительных и мостовых конструкций, которые широко использовались в 50-х – начале 60-х годов XX века.

3. При уровне эксплуатационных напряжений до 600 МПа, что соответствует титановым сплавам и высокопрочным конструкционным сталям, имеет место сложное взаимовлияние величины деформации продольной оси оболочки с другими компонентами ее НДС. Величина этого влияния зависит от схемы нагружения и схемы закрепления ее торцов, а также геометрических параметров оболочки. Для ряда расчетных схем учет геометрической нелинейности выявляет перераспределение характера ее НДС, которое необходимо учитывать в практике проектирования соответствующих конструкций.

4. Вклад нелинейных слагаемых в общую картину НДС начинает резко увеличиваться с уровня напряжений, примерно равных 500 МПа.

5. При использовании конструкционных материалов (легированные стали для

ответственных конструкций и титановые высокопрочные конструкционные сплавы), допускающих эксплуатационные напряжения 1000–1200 МПа и выше, доля НДС оболочки, связанная с учетом геометрической нелинейности (то есть в условиях отказа от гипотезы о нерастяжимости продольной оси оболочки), может составить существенную величину. Другими словами, расчет конструкций такого типа при ожидаемых уровнях напряжений 1000–1200 МПа и выше при использовании гипотезы о нерастяжимости продольной оси оболочки может привести к неправильному представлению о ее напряженно-деформированном состоянии.

6. Наличие продольного набора суммарной площадью поперечного сечения до 20% от площади поперечного сечения оболочки несколько ( $\approx 5\%$ ) снижает пики максимальных значений НДС (при условии их расположения в соответствующих точках контура) и практически не влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки. Поэтому установка стрингеров такой мощности определяется только конструктивными и технологическими требованиями, которые предъявляются к соответствующим конструкциям.

#### *Литература*

1. *Власов, В.З.* Избранные труды. Т. I–III / В.З. Власов. – М.: Наука, 1964.
2. *Образцов, И.Ф.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем / И.Ф. Образцов, Г.Г. Онанов. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
3. *Кузнецов, О.Р.* Разрешающие уравнения расчета прямых замкнутых призматических оболочек с учетом физической нелинейности / О.Р. Кузнецов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2004. – Вып. 66. – С. 157–167.
4. *Иванов, С.П.* Расчет пространственных пластинчатых систем с учетом физической и геометрической нелинейностей / С.П. Иванов // Механика композиционных материалов и конструкций. – М. – 2001. – Т. 7, №4. – С. 526–532.
5. *Иванов, С.П.* Расчет нелинейных пластинчатых систем вариационным методом В.З. Власова / С.П. Иванов // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – №6. – С. 23–29.
6. *Татаринов, П.И.* Нелинейные задачи чистого изгиба кессонной конструкции / П.И. Татаринов // Изв. вузов. Авиационная техника. – М. – 1970. – №4. – С. 57–65.
7. *Петров, В.В.* Некоторые нелинейные задачи расчета прямых замкнутых призматических оболочек: Монография / В.В. Петров, О.Р. Кузнецов / СГТУ, Саратов. – 1996. – 85 с. – Деп. в ВИНТИ, 31.10.96. №3197-В96 ДЕП.
8. *Петров, В.В.* Расчет геометрически нелинейных прямых замкнутых призматических оболочек: Монография / В.В. Петров, О.Р. Кузнецов, Н.А. Страшнова / СГТУ, Саратов. – 1996. – 131 с. – Деп. в ВИНТИ 08.07.97. №2274-В97.
9. *Петров, В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек / В.В. Петров. – Саратов: Изд-во СГТУ, 1975. – 119 с.
10. *Годунов, С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // УМН. – 1961. – Т.16, №3 (992). – С. 171–174.
11. *Петров, В.В.* Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики деформируемого твердого тела / В.В. Петров // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред / Саратов: Изд-во СГТУ, 2001. – С. 6–12.
12. *Петров, В.В.* Использование двухшагового метода последовательного возмущения параметров в нелинейных задачах статического расчета призматических оболочек / В.В. Петров, О.Р. Кузнецов, Н.В. Губарева / Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XX Международ. конф. по теории оболочек и пластин / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2002. – С. 240–244.

[29.08.05]