

УДК 539.4+539.37

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ АРМИРОВАННЫХ СЛОИСТЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ НА ВЯЗКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗКАХ**

© 2017 г.

**Романова Т.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@gmail.com

*Поступила в редакцию 25.05.2017*

Разработан общий метод расчета динамического поведения жесткопластических гибридных слоистых композитных круглых шарнирно опертых или защемленных пластин с произвольным свободным центральным отверстием. Пластины находятся на вязком основании и под действием равномерно распределенной по поверхности кратковременной динамической нагрузки взрывного типа. Пластины являются гибридными слоисто-волокнистыми с распределением слоев, симметричным относительно срединной поверхности. В каждом слое находится семейство армирующих волокон, расположенных по радиальным, окружным и угловым направлениям. В зависимости от амплитуды нагрузки возможны разные схемы деформирования пластин. Из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждой из схем получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Получены аналитические выражения для оценки предельных нагрузок. Определены время деформирования и остаточные прогибы пластин. Приведены примеры численных решений для квадратного и круглого отверстий. Предложенные решения могут быть использованы при проектировании армированных металлокомпозитных круглых пластин с произвольным свободным отверстием на вязком основании.

*Ключевые слова:* жесткопластическая модель, структурная модель, круглая армированная пластина, произвольное отверстие, вязкое основание, взрывная нагрузка, предельная нагрузка.

### **Введение**

В настоящее время существуют технологии, позволяющие создавать слоисто-волокнистые композиты из практически любых наборов материалов с различными физико-механическими свойствами. Многослойные армированные плоские конструкции находят широкое применение в разных областях современной техники. При воздействии высокоинтенсивных нагрузок на такие элементы конструкций их материалы проявляют в основном пластические свойства. Исследования динамического деформирования композитных элементов конструкций за пределом упругого

поведения имеют принципиальное значение для оценки степени их повреждаемости, оценки рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. Анализ литературных источников показывает, что такие исследования находятся пока в зачаточном состоянии [1–7]. Для решения динамических задач при взрывном типе нагрузок широкое распространение получила модель жесткопластического тела [1, 8], благодаря ее простоте и удобству расчетных схем. В статье [1] обсуждается современное состояние расчетов неупругого динамического деформирования оболочечных конструкций слоисто-волокнутой структуры и приведено обоснование использования модели жесткопластического тела в таких задачах. Рассмотрены достоинства и недостатки структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [9, 10]. Эта модель с допустимой инженерной точностью моделирует композитные материалы в случае неидеального контакта арматуры со связующим. Простейшая структурная модель, учитывающая объемное соотношение компонентов, для расчета прочности волокнутого композита была предложена еще в 1965 г. [11]. В статьях [12, 13] отмечено, что во многих случаях слоисто-волокнутой композит на макроуровне можно рассматривать как пластическое тело, подчиняющееся положениям теории пластичности, и в предположении, что напряженное состояние в волокнах одномерное, определены предельные кривые для слоистых композитов с симметричным перекрестным армированием. В [14] на основе нитяной структурной модели, в которой не учитываются напряжения в связующем материале, и на основе метода предельного равновесия определены предельные нагрузки разнообразных полигональных железобетонных плит, в том числе плит с отверстиями. В [15] рассматривается численное моделирование упругопластического динамического поведения осесимметричных однослойных и многослойных пластин и оболочек переменной толщины из традиционных и композиционных материалов и отмечено, что при решении многих задач динамики композитных оболочек даже достаточно грубые модели пластического деформирования материала, какой, например, является жесткопластическая модель, позволяют во многих случаях получить адекватное представление о процессах деформирования.

В настоящей статье построена модель динамического поведения жесткопластических гибридных слоистых композитных круглых пластин, шарнирно опертых или защемленных с произвольным по форме внутренним свободным отверстием, на которые действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластины расположены на вязком основании. Армирование пластин выполнено в радиальном, окружном и угловом направлениях. Считается, что механические характеристики материалов, составляющих слоистый пакет, являются соразмерными (отличающимися не более чем на порядок). По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта. В этом случае для слоистых пластин приемлемо использование традиционных гипотез Кирхгофа – Лява. Известные в литературе динамические решения для изгиба двусвязных пластических пластин со свободным отверстием касаются только однородных и многослойных кольцевых и полигональных пластин [15–21], однородных криволинейных пластин [22–25]. Настоящее исследование является развитием модели деформирования, разработанной в [25], на случай слоисто-волокнутой гибридных армированных пластин, расположенных на вязком основании.

## 1. Формулировка задачи, основные геометрические соотношения и предположения

Рассмотрим круглую шарнирно опертую или защемленную пластину с произвольным свободным отверстием. Внешний контур пластины  $L_1$  имеет радиус  $R_1$ , а уравнение внутреннего отверстия  $L_2$  в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с полюсом в центре окружности  $L_1$  имеет вид:  $r = R_2(\varphi)$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (рис. 1).

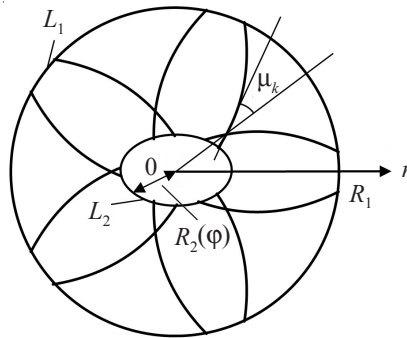


Рис. 1. Круглая пластина с отверстием. Схема 1

Считаем для определенности, что контур  $L_2$  имеет две оси симметрии:  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки  $P(t)$  высокой интенсивности взрывного типа с  $P_{\max} = P(0)$ . Прогибы пластины считаются малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрическими изменениями пренебрегаем.

Пластина выполнена из композитного материала, который является слоистым с симметричным относительно срединной поверхности пластины распределением слоев. Предполагается, что пластина содержит по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала. В каждом слое могут находиться волокна арматуры, выполненные из различных материалов, которые деформируются как одномерные элементы и расположены в виде симметричных относительно радиуса криволинейных траекторий (угловое армирование) в радиальном и окружном направлениях. В разных слоях материалы арматуры и связующего различны. Структура армирования пластины из одних и тех же составляющих материалов может иметь разный вид за счет взаимного изменения порядка расположения слоев и изменения направления расположения волокон.

Для рассматриваемой пластины приведенная поверхностная плотность материала пластины равна

$$\rho(r) = 2 \sum_{k=1}^n \rho_k(r)(h_k - h_{k-1}),$$

$$\rho_k(r) = [1 - \omega_{1k}(r) - \omega_{2k}(r) - 2\omega_{3k}(r)]\rho_{0k} + \omega_{1k}(r)\rho_{1k} + \omega_{2k}(r)\rho_{2k} + 2\omega_{3k}(r)\rho_{3k},$$

где  $n$  – половина общего количества слоев;  $\rho_{0k}$  – плотность связующего материала в  $k$ -м слое;  $\rho_{ik}$ ,  $\omega_{ik}(r)$  – плотность материала арматуры и ее плотность армирования (объемная доля) в  $k$ -м слое в радиальном ( $i = 1$ ), окружном ( $i = 2$ ) и угловом ( $i = 3$ )

направлениях;  $h_k$  – координаты раздела слоев;  $h_0 = 0$ ;  $h_n = H$ ;  $2H$  – толщина пластины.

Предельные изгибающие моменты  $M_{01}$ ,  $M_{02}$ , нормальные и тангенциальные к закрепленному контуру пластины  $L_1$ , в рамках структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах будут равны:

$$M_{0j}(r) = \sum_{k=1}^n \sigma_{0jk}(r)(h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (j=1, 2),$$

$$\sigma_{0jk}(r) = [1 - \omega_{jk}(r) - \omega_{jk}^a(r)]\sigma_{0k} + \omega_{jk}(r)\sigma_{jk} + \omega_{jk}^a(r)\sigma_{3k},$$

$$\omega_{1k}^a(r) = 2\omega_{3k}(r)\cos^2\mu_k(r), \quad \omega_{2k}^a(r) = 2\omega_{3k}(r)\sin^2\mu_k(r).$$

Здесь  $\sigma_{0k}$  – предел текучести связующего материала в  $k$ -м слое;  $\sigma_{jk}$ ,  $\sigma_{3k}$  – пределы текучести материала арматуры, расположенной в радиальном, окружном и угловом направлениях в  $k$ -м слое;  $\mu_k(r)$  – угол армирования угловых волокон в  $k$ -м слое (см. рис. 1).

Для рассматриваемой пластины из жесткопластического материала возможны две схемы деформирования в зависимости от величины  $P_{\max}$ . При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (при «низких» нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные, «средних» нагрузках, в случае шарнирного опирания опорного контура  $L_1$  плоскость пластины поворачивается вокруг контура  $L_1$  с углом поворота  $\alpha_1$  и деформируется в коническую поверхность (рис. 1, схема 1). В отличие от однородных пластин [25], в случае защемления опорного контура армированной пластины плоскость пластины поворачивается конусообразно вокруг окружности с радиусом  $r = R_1 - d$ ,  $d \geq 0$ . Часть пластины между контуром  $L_1$  и окружностью радиуса  $r$  не деформируется. Величина  $d$  определяется из условия минимума предельной нагрузки пластины. При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  (при «высоких» нагрузках) возможна схема 2, в которой, как и для однородных пластин [16, 22, 24, 25], деформирование сопровождается возникновением нестационарной пластической шарнирной окружности  $l$ , движущейся поступательно (рис. 2).

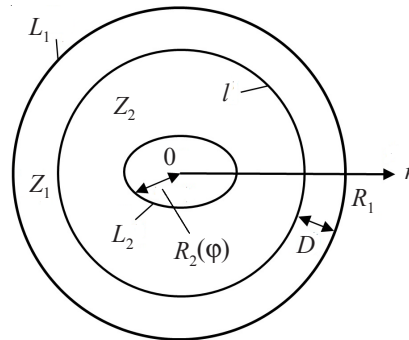


Рис. 2. Круглая пластина с отверстием. Схема 2

## 2. Вывод уравнений движения и анализ поведения пластины для схемы 1

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [26]:

$$K = A - N, \quad (1)$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds, \quad A = \iint_S [P(t) - k_v \dot{u}] \dot{u}^* ds, \quad (2)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_{l_m} dl_m + \iint_S (M_{01} |\kappa_1^*| + M_{02} |\kappa_2^*|) ds. \quad (3)$$

Здесь  $K, A, N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S, ds$  – площадь и элемент площади пластины;  $u$  – прогиб;  $k_v$  – коэффициент вязкого сопротивления основания (например, в случае действия ударных волн на корабельные конструкции коэффициент  $k_v$  принимают равным  $\rho_s c$ , где  $\rho_s$  – плотность среды,  $c$  – скорость звука [27]);  $m$  – количество линий разрыва поля скоростей;  $l_m$  – линии разрыва поля скоростей, включая контур пластины;  $[\dot{\theta}]_{l_m}$  – разрыв скорости угла поворота плоскости пластины на  $l_m$ ;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $\kappa_1, \kappa_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. Точки над символами обозначают производные по времени, звездочкой обозначены кинематически допустимые величины.

Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде:

$$(r, \varphi) \in S: \dot{u}(r, \varphi, t) = \dot{\alpha}_1(t)(\bar{R}_1 - r), \quad (4)$$

где  $\bar{R}_1 = R_1 - d(1 - \eta)$  ( $d \geq 0$ );  $\eta = 0$  при защемлении контура  $L_1$ ,  $\eta = 1$  при его шарнирном опирании. Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины равны:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{r}. \quad (5)$$

Выражения (2) будут иметь вид:

$$K = 4\ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} \rho(r)(\bar{R}_1 - r)^2 r dr d\varphi, \quad (6)$$

$$A = 4\dot{\alpha}_1^* \left[ P(t) \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} (\bar{R}_1 - r) r dr d\varphi - k_v \dot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} (\bar{R}_1 - r)^2 r dr d\varphi \right] =$$

$$= \frac{\dot{\alpha}_1^*}{3} \left[ 2P(t) \int_0^{\pi/2} (\bar{R}_1 - R_2)^2 (\bar{R}_1 + 2R_2) d\varphi - k_v \dot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} (\bar{R}_1 - R_2)^3 (\bar{R}_1 + 3R_2) d\varphi \right]. \quad (7)$$

Мощность внутренних сил (3) с учетом (5) записывается в виде:

$$N = 4\dot{\alpha}_1^* \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \eta) M_{01}(\bar{R}_1) \bar{R}_1 + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} M_{02}(r) |\dot{\kappa}_2^*| r dr d\varphi \right] =$$

$$= 4\dot{\alpha}_1^* \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \eta) M_{01}(\bar{R}_1) \bar{R}_1 + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} M_{02}(r) dr d\varphi \right]. \quad (8)$$

Уравнение движения (1) для схемы деформирования 1 имеет вид:

$$12\ddot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} \rho(r)(\bar{R}_1 - r)^2 r dr d\varphi - k_v \dot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} (\bar{R}_1 - R_2)^3 (\bar{R}_1 + 3R_2) d\varphi =$$

$$= 2P(t) \int_0^{\pi/2} (\bar{R}_1 - R_2)^2 (\bar{R}_1 + 2R_2) d\varphi - 12 \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \eta) M_{01}(\bar{R}_1) \bar{R}_1 + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} M_{02}(r) dr d\varphi \right]. \quad (9)$$

В начальный момент пластина покоится и выполняются условия

$$\dot{\alpha}_1(0) = \alpha_1(0) = 0. \quad (10)$$

Предельную нагрузку  $P_0$  определим из (9), принимая  $\ddot{\alpha}_1 = 0$ :

$$P_0 = 6 \min_{0 \leq d < \min_{\varphi} [\bar{R}_1 - R_2(\varphi)]} \frac{(\pi/2)(1 - \eta) M_{01}(\bar{R}_1) \bar{R}_1 + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_1} M_{02}(r) dr d\varphi}{\int_0^{\pi/2} (\bar{R}_1 - R_2)^2 (\bar{R}_1 + 2R_2) d\varphi} = 6 \frac{(\pi/2)(1 - \eta) M_{01}(\bar{R}_0) \bar{R}_0 + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_0} M_{02}(r) dr d\varphi}{\int_0^{\pi/2} (\bar{R}_0 - R_2)^2 (\bar{R}_0 + 2R_2) d\varphi}, \quad (11)$$

где  $\bar{R}_0 = \bar{R}_1 - d_0$ ,  $d_0$  – значение  $d$ , при котором реализуется минимум в (11).

Запишем уравнение движения (9) в виде

$$\ddot{\alpha}_1(t) + G_1 \dot{\alpha}_1(t) = G_2 [P(t) - P_0], \quad (12)$$

$$G_1 = k_v \frac{\int_0^{\pi/2} (\bar{R}_0 - R_2)^3 (\bar{R}_0 + 3R_2) d\varphi}{12 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_0} \rho(r) (\bar{R}_0 - r)^2 r dr d\varphi}, \quad G_2 = \frac{\int_0^{\pi/2} (\bar{R}_0 - R_2)^2 (\bar{R}_0 + 2R_2) d\varphi}{6 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{\bar{R}_0} \rho(r) (\bar{R}_0 - r)^2 r dr d\varphi}.$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$\dot{\alpha}_1(t) = G_2 e^{-G_1 t} \int_0^t e^{G_1 \tau} [P(\tau) - P_0] d\tau, \quad \alpha_1(t) = G_2 \int_0^t e^{-G_1 x} \int_0^x e^{G_1 \tau} [P(\tau) - P_0] d\tau dx.$$

Пластина будет двигаться до остановки в момент времени  $t_f$ , когда выполняется равенство

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0, \quad (13)$$

$t_f$  определяется из соотношения

$$\int_0^{t_f} e^{G_1 \tau} P(\tau) d\tau = \frac{P_0}{G_1} [e^{G_1 t_f} - 1].$$

Максимальный остаточный прогиб будет равен

$$u_f = \alpha_1(t_f) \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} [\bar{R}_0 - R_2(\varphi)].$$

В случае нагрузки с прямоугольной формой импульса:  $P(t) = P_{\max}$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ , момент остановки  $t_f$  равен

$$t_f = \frac{\ln [1 + P_{\max} (e^{G_1 T} - 1) / P_0]}{G_1},$$

и максимальный остаточный прогиб вычисляется по формуле:

$$u_f = \max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} [\bar{R}_0 - R_2(\varphi)] G_2 (P_{\max} (G_1 T + e^{-G_1 T} - 1) - P_0 \{ \ln[1 + P_{\max} (e^{G_1 T} - 1) / P_0] + 1 / [1 + P_{\max} (e^{G_1 T} - 1) / P_0] \}) / G_1^2.$$

Все прогибы в пластине определяются соотношениями (4).

Отметим, что в случае шарнирного закрепления контура параметры радиального армирования не входят в выражение (11), но они присутствуют в коэффициентах  $G_1, G_2$  в формуле (12). Следовательно, в рассматриваемой модели в случае шарнирного закрепления армирование в радиальном направлении не влияет на величину предельной нагрузки, но влияет на динамическое поведение пластины и ее остаточный прогиб.

### 3. Вывод уравнений движения и анализ поведения пластины для схемы 2

Рассмотрим схему 2, в которой движение пластины сопровождается возникновением нестационарной пластической шарнирной окружности  $l$ , движущейся поступательно. Кривая  $l$  разбивает пластину на две линейчатые поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  (см. рис. 2). Область  $Z_2$  движется поступательно и поворачивается вокруг кривой  $l$ . Поскольку кривая  $l$  движется поступательно, то все ее точки движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим через  $\dot{w}_c(t)$ . Как в [22, 25], из непрерывности скоростей на  $l$  следует, что нормаль к линии  $l$  является нормалью к окружности  $L_1$  и что расстояние  $D$  между  $L_1$  и  $l$  не зависит от параметра  $\varphi$ . Следовательно, линия  $l$  будет окружностью радиуса  $R_1 - D$ . Из непрерывности скоростей на линии  $l$  следует, что область  $Z_1$  поворачивается вокруг опорного контура  $L_1$  с одинаковой скоростью; обозначим ее через  $\dot{\alpha}_1(t)$ . Считаем, что область  $Z_2$  поворачивается вокруг подвижной шарнирной окружности  $l$  со скоростью  $\dot{\alpha}_2(t)$ , также не зависящей от угла  $\varphi$ . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 2 будут представлены в виде (рис. 3):

$$\begin{aligned} (r, \varphi) \in Z_1: \dot{u}(r, \varphi, t) &= \dot{\alpha}_1(t)(R_1 - r), \\ (r, \varphi) \in Z_2: \dot{u}(r, \varphi, t) &= \dot{w}_c(t) + \dot{\alpha}_2(t)(R_1 - D - r), \end{aligned} \quad (14)$$

где области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены так:

$$Z_1: R_1 - D \leq r \leq R_1, \quad Z_2: R_2(\varphi) \leq r \leq R_1 - D, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

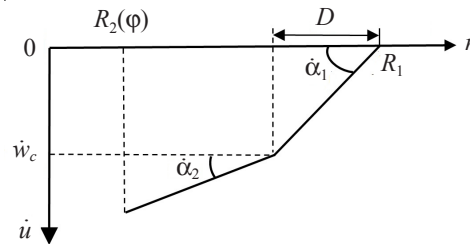


Рис. 3. Скорости прогибов пластины для схемы 2

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в области  $Z_1$  имеют вид (5) и в области  $Z_2$  равны:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \frac{\dot{\alpha}_2(t)}{r}.$$

С учетом введенных обозначений выражения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
K &= \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} \rho(R_1 - r)^2 r dr d\varphi + \iint_{Z_2} \rho[\ddot{\alpha}_2(R_1 - D - r) + \dot{w}_c][\dot{\alpha}_2^*(R_1 - D - r) + \dot{w}_c^*] r dr d\varphi = \\
&= 4\dot{\alpha}_1^* \ddot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} \int_{R_1-D}^{R_1} \rho(R_1 - r)^2 r dr d\varphi + 4\dot{\alpha}_2^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} \rho(R_1 - D - r)^2 r dr d\varphi + \right. \\
&+ \dot{w}_c \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} \rho(R_1 - D - r) r dr d\varphi \left. + 4\dot{w}_c^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} \rho(R_1 - D - r) r dr d\varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \dot{w}_c \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} \rho r dr d\varphi \right] \right], \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \iint_{Z_1} [P(t) - k_v \dot{u}] \dot{u}^* ds + \iint_{Z_2} [P(t) - k_v \dot{u}] \dot{u}^* ds = 4P(t) \dot{\alpha}_1^* \left[ \int_0^{\pi/2} \int_{R_1-D}^{R_1} (R_1 - r) r dr d\varphi + \right. \\
&+ \dot{w}_c^* \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} r dr d\varphi + \dot{\alpha}_2^* \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} (R_1 - D - r) r dr d\varphi \left. \right] - 4k_v \left\{ \dot{\alpha}_1^* \dot{\alpha}_1 \int_0^{\pi/2} \int_{R_1-D}^{R_1} (R_1 - r)^2 r dr d\varphi + \right. \\
&+ \dot{\alpha}_2^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} (R_1 - D - r)^2 r dr d\varphi + \dot{w}_c \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} (R_1 - D - r) r dr d\varphi + \right. \\
&\left. \left. + \dot{w}_c^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} (R_1 - D - r) r dr d\varphi + \dot{w}_c \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} r dr d\varphi \right] \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Выражение (3) для мощности внутренних сил  $N$  представим в виде

$$N = \sum_{i=1}^4 N_i,$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – мощности внутренних сил на контуре  $L_1$ , на линии  $l$ , внутри областей  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно. Мощности  $N_i$  будут равны

$$N_1 = (1 - \eta) M_{01}(R_1) \oint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dl = 2\pi \dot{\alpha}_1^* (1 - \eta) M_{01}(R_1) R_1,$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= M_{01}(R_1 - D) \oint_l [\dot{\theta}^*]_l dl = 2|\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^*| M_{01}(R_1 - D) \int_0^\pi dl = \\
&= 2\pi |\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^*| (R_1 - D) M_{01}(R_1 - D),
\end{aligned}$$

$$N_3 = \iint_{Z_1} M_{02}(r) |\kappa_2^*| ds = 2\pi \dot{\alpha}_1^* \int_{R_1-D}^{R_1} M_{02}(r) dr,$$

$$N_4 = \iint_{Z_2} M_{02}(r) |\kappa_2^*| ds = 4\dot{\alpha}_2^* \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} M_{02}(r) dr d\varphi.$$



Полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определяется выражением

$$N = \dot{\alpha}_1^* m_1 + \dot{\alpha}_2^* m_2, \quad (17)$$

$$m_1(D) = 2\pi \left[ (1 - \eta) M_{01}(R_1) R_1 + \int_{R_1-D}^{R_1} M_{02}(r) dr \pm (R_1 - D) M_{01}(R_1 - D) \right],$$

$$m_2(D) = 4 \left[ \mp \frac{\pi}{2} (R_1 - D) M_{01}(R_1 - D) + \int_0^{\pi/2} \int_{R_2(\varphi)}^{R_1-D} M_{02}(r) dr d\varphi \right],$$

где верхний знак в выражениях для  $m_1$  и  $m_2$  соответствует  $\dot{\alpha}_1^* > \dot{\alpha}_2^*$  (вариант  $a$  схемы 2), нижний знак – случаю  $\dot{\alpha}_1^* < \dot{\alpha}_2^*$  (вариант  $b$  схемы 2). При условии  $\dot{\alpha}_1^* = \dot{\alpha}_2^*$  схема 2 переходит в схему 1.

Подставляя (15)–(17) в (1), учитывая независимость функций  $\dot{\alpha}_1^*$ ,  $\dot{\alpha}_2^*$ ,  $\dot{w}_c^*$ , получим уравнения движения пластины:

$$\ddot{\alpha}_1 \Sigma_{11}(D) + \dot{\alpha}_1 k_v \Sigma_{12}(D) = P(t) \Sigma_{13}(D) - m_1(D), \quad (18)$$

$$\ddot{\alpha}_2 \Sigma_{21}(D) + \dot{\alpha}_2 k_v \Sigma_{22}(D) + \dot{w}_c k_v \Sigma_{23}(D) = P(t) \Sigma_{23}(D) - m_2(D) \Sigma_{24}(D), \quad (19)$$

$$\ddot{w}_c \Sigma_{21}(D) + \dot{\alpha}_2 k_v \Sigma_{32}(D) + \dot{w}_c k_v \Sigma_{33}(D) = P(t) \Sigma_{33}(D) + m_2(D) \Sigma_{34}(D), \quad (20)$$

$$\Sigma_{11}(D) = \iint_{Z_1} \rho(r) (R_1 - r)^2 ds = 2\pi \int_{R_1-D}^{R_1} \rho (R_1 - r)^2 r dr,$$

$$\Sigma_{12}(D) = \iint_{Z_1} (R_1 - r)^2 ds = \frac{\pi}{6} D^3 (4R_1 - 3D),$$

$$\Sigma_{13}(D) = \iint_{Z_1} (R_1 - r) ds = \frac{\pi}{3} D^2 (3R_1 - 2D),$$

$$\Sigma_{21}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) ds \iint_{Z_2} \rho(r) r^2 ds - \left[ \iint_{Z_2} \rho(r) r ds \right]^2,$$

$$\Sigma_{22}(D) = \iint_{Z_2} r^2 ds \iint_{Z_2} \rho ds - \iint_{Z_2} r ds \iint_{Z_2} \rho r ds,$$

$$\Sigma_{23}(D) = \iint_{Z_2} ds \iint_{Z_2} \rho r ds - \iint_{Z_2} r ds \iint_{Z_2} \rho ds, \quad \Sigma_{24}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) ds,$$

$$\Sigma_{32}(D) = \iint_{Z_2} \rho (R_1 - D - r)^2 ds \iint_{Z_2} (R_1 - D - r) ds - \iint_{Z_2} (R_1 - D - r)^2 ds \iint_{Z_2} \rho (R_1 - D - r) ds,$$

$$\Sigma_{33}(D) = \iint_{Z_2} ds \iint_{Z_2} \rho(r) r^2 ds - \iint_{Z_2} r ds \iint_{Z_2} \rho(r) r ds - (R_1 - D) \Sigma_{23}(D),$$

$$\Sigma_{34}(D) = \iint_{Z_2} \rho(r) (R_1 - D - r) ds.$$

Из непрерывности скоростей на границе областей  $Z_1$  и  $Z_2$  имеем равенство

$$\dot{\alpha}_1 D = \dot{w}_c. \quad (21)$$

Система уравнений (18)–(21) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид (10) и

$$\dot{\alpha}_2(0) = \alpha_2(0) = \dot{w}_c(0) = w_c(0) = 0, \quad D_0 = D(0). \quad (22)$$

Начальное значение  $D_0$  определяется в зависимости от  $P_{\max}$ , как это будет показано далее.

Из неравенства Коши – Буняковского для вещественного гильбертова пространства интегрируемых функций, определенных на  $Z_2$ , с интегрируемым квадратом и скалярным произведением функций  $f, g$ , определенным как  $\iint_{Z_2} (fg) ds$ , следует [28], что если область  $Z_2$  не вырождена, то

$$\left( \iint_{Z_2} fg ds \right)^2 \leq \iint_{Z_2} f^2 ds \iint_{Z_2} g^2 ds.$$

Тогда, принимая  $f = r\sqrt{\rho} > 0$  и  $g = \sqrt{\rho} > 0$ , получим, что выполняется неравенство  $\Sigma_{21}(D) > 0$ , которое необходимо для последующего анализа системы уравнений движения.

Величину нагрузки  $P_1$ , являющейся минимальным значением  $P_{\max}$ , при котором реализуется схема 2, определим из условия  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ . Значение  $D(t)$ , соответствующее нагрузке  $P_1$ , обозначим через  $D_1$ . Из (18), (19) при условии  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$  при  $t \geq 0$  получим:

$$(P\Sigma_{13} - m_1 - k_v\dot{\alpha}_1\Sigma_{12})\Sigma_{21} = [P\Sigma_{23} - m_2\Sigma_{24} - k_v(\dot{\alpha}_1\Sigma_{22} + \dot{w}_c\Sigma_{23})]\Sigma_{11}.$$

С учетом начальных условий (10), (22) последнее равенство запишем в виде:

$$P_{\max} = \frac{m_1(D_0)\Sigma_{21}(D_0) - m_2(D_0)\Sigma_{11}(D_0)\Sigma_{24}(D_0)}{\Sigma_{13}(D_0)\Sigma_{21}(D_0) - \Sigma_{23}(D_0)\Sigma_{11}(D_0)}. \quad (23)$$

Дифференцируя (21) по времени и с помощью полученного выражения исключая функции  $\ddot{\alpha}_1, \ddot{w}_c$  из (17), (19), получим

$$-\dot{\alpha}_1(t)\dot{D}(t) = \frac{D(P\Sigma_{13} - m_1 - \dot{\alpha}_1 k_v \Sigma_{12})}{\Sigma_{11}} - \frac{P\Sigma_{33} + m_2\Sigma_{34} - k_v(\dot{\alpha}_2\Sigma_{32} + \dot{w}_c\Sigma_{33})}{\Sigma_{21}}. \quad (24)$$

С учетом начальных условий (10), (22) равенство (24) принимает вид:

$$P_{\max} = \frac{m_1(D_0)D_0\Sigma_{21}(D_0) + m_2(D_0)\Sigma_{11}(D_0)\Sigma_{34}(D_0)}{D_0\Sigma_{13}(D_0)\Sigma_{21}(D_0) - \Sigma_{33}(D_0)\Sigma_{11}(D_0)}. \quad (25)$$

Считая в (23), (25)  $P_{\max} = P_1$  и  $D = D_0 = D_1$ , получим равенство для определения  $P_1$ :

$$P_1 = \frac{m_1(D_1)D_1\Sigma_{21}(D_1) + m_2(D_1)\Sigma_{11}(D_1)\Sigma_{34}(D_1)}{D_1\Sigma_{13}(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{33}(D_1)\Sigma_{11}(D_1)}, \quad (26)$$

$D_1$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{m_1(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - m_2(D_1)\Sigma_{11}(D_1)\Sigma_{24}(D_1)}{\Sigma_{13}(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{23}(D_1)\Sigma_{11}(D_1)} = \\ & = \frac{m_1(D_1)D_1\Sigma_{21}(D_1) + m_2(D_1)\Sigma_{11}(D_1)\Sigma_{34}(D_1)}{D_1\Sigma_{13}(D_1)\Sigma_{21}(D_1) - \Sigma_{33}(D_1)\Sigma_{11}(D_1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим динамическое поведение пластины при «высоких» нагрузках  $P_{\max} > P_1$ . В этом случае движение начнется по схеме 2 при наличии линии  $l$ , начальное положение которой определяется значением  $D_0$  из (25). Чтобы выяснить, по какому варианту схемы 2 ( $a$  или  $b$ ) будет деформироваться пластина, надо выбрать минимальную нагрузку  $P_1$  из (26) при верхнем и нижнем знаке в выражениях для  $m_1, m_2$  в формуле (17). Если армирование таково, что функция  $\rho(r)$  постоянна или изменяется только вблизи опорного контура  $L_1$  и постоянна в остальной части пластины, то  $\rho(r)$  постоянна в области  $Z_2$ , поэтому  $\Sigma_{23} = 0, \Sigma_{22} = \Sigma_{21} > 0$ . Из (19) следует, что поскольку  $\Sigma_{24} > 0$  и  $\ddot{\alpha}_2(0)$  не может быть отрицательным, то  $m_2 < 0$ . Тогда из выражения для  $m_2$  следует, что  $\dot{\alpha}_1 > \dot{\alpha}_2$ , и реализуется вариант  $a$  схемы 2.

В первой фазе ( $0 \leq t \leq t_1$ ) движение пластины описывается уравнениями (18)–(21) при начальных условиях (10), (22). Движение шарнирной линии  $l$  определяется из (24). Для обоих вариантов схемы 2 ( $a$  и  $b$ ) либо существует момент времени  $t_1$ , когда выполняется равенство  $\dot{\alpha}_1(t_1) = \dot{\alpha}_2(t_1)$  и дальнейшее движение осуществляется по схеме 1 во второй фазе, либо происходит остановка движения в момент времени  $t = t_f$ , который определится из равенства, полученного из (24) при условии  $\dot{\alpha}_1(t_f) = \dot{\alpha}_2(t_f) = 0$  и (21):

$$P(t_f) \{ D(t_f) \Sigma_{13}(D(t_f)) \Sigma_{21}(D(t_f)) - \Sigma_{33}(D(t_f)) \Sigma_{11}(D(t_f)) \} = \\ = m_1(D(t_f)) D(t_f) \Sigma_{21}(D(t_f)) + m_2(D(t_f)) \Sigma_{11}(D(t_f)) \Sigma_{34}(D(t_f)).$$

Если движение продолжается во второй фазе ( $t_1 < t \leq t_f$ ), поведение пластины описывается уравнением (12) с начальными условиями для  $\dot{\alpha}_1(t_1)$  и  $\alpha_1(t_1)$ . Пластина останавливается в момент  $t_f$ , определяемый из условия (13). Все прогибы вычисляются из (14), (4) с учетом обеих фаз.

#### 4. Армированная круглая пластина с центральным квадратным отверстием

В качестве примера рассмотрим армированную круглую пластину радиуса  $R_1$  с центральным квадратным отверстием со сторонами  $2\gamma R_1$  ( $\gamma < \sqrt{2}/2$ ) (рис. 4). В этом случае для четверти пластины в силу симметрии уравнение отверстия имеет вид:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}: R_2(\varphi) = \frac{\gamma R_1}{\cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: R_2(\varphi) = \frac{\gamma R_1}{\sin \varphi}.$$

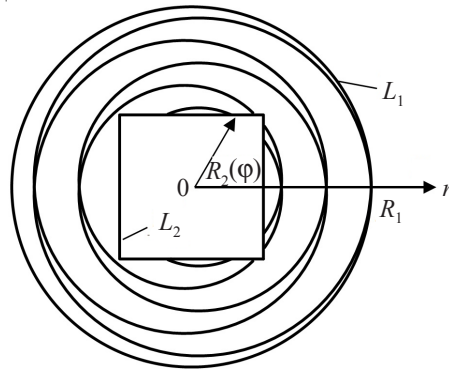


Рис. 4. Круглая пластина с квадратным отверстием

Считаем, что пластина является четырехслойной и армированы только внешние слои:  $n = 2$ ,  $h_1 = 0,85H$ ,  $h_2 = H$ ,  $\omega_{i2} = \omega_i$ ,  $\omega_{i1} = 0$ ,  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{12} = \rho_0$ ,  $\rho_{i2}/\rho_0 = 3$ ,  $\sigma_{02} = \sigma_{i1} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{i2} = \sigma_i = 10\sigma_0$  ( $i = 1, 3$ ). Такое соотношение армирующих параметров возможно, например, если связующий материал является алюминием, а материал арматуры – сталью.

Рассматриваем следующие способы армирования волокнами постоянного сечения:

а) угловое армирование в форме логарифмической спирали:

$$\omega_3(r) = \omega_{30} \frac{R_1}{r}, \quad \mu(x) = \mu_0 = \text{const}; \quad (28)$$

б) армирование по радиусам окружности:

$$\omega_1(r) = \omega_{10} \frac{R_1}{r}; \quad (29)$$

в) армирование по окружности:

$$\omega_2(r) = \omega_{20}, \quad (30)$$

где  $\omega_{i0} = \omega_i(R_1)$  ( $i = 1, 3$ ),  $\mu_0 = \mu(R_1)$  – заданные на опорной окружности плотности армирования и угол армирования.

Для рассматриваемой пластины на рис. 5 изображены зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0 = P_0 b$  ( $b = R_1^2 / (\sigma_0 H^2)$ ) от параметра  $\gamma$ , вычисленные по (11), при разном креплении контура пластины и различном армировании. Кривая 1 – шарнирное опирание, армирование (30) с  $\omega_{20} = 0,2$  и (33) с  $\omega_{30} = 0,2$ ,  $\mu_0 = \pi/6$ . Кривая 2 – шарнирное опирание, армирование (30),  $\omega_{20} = 0,2$ . Кривая 3 – шарнирное опирание, армирование отсутствует. Кривые 4–6: защемление, армирование, как в случаях 1–3 соответственно. Из рисунка видно, что при рассматриваемых способах армирования при увеличении отверстия предельная нагрузка сначала немного снижается, а затем увеличивается.

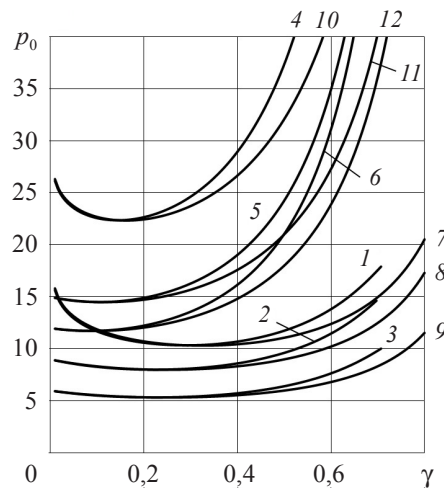


Рис. 5. Безразмерная предельная нагрузка в зависимости от размеров отверстия

На рис. 6 приведены безразмерные прогибы  $w = uR_1^2 \rho_0 / (\sigma_0 H^2 T^2)$  в сечении  $\varphi = 0$ , полученные по предлагаемой методике, для круглой защемленной пластины

с отверстием в форме квадрата со стороной  $2\gamma R_1$  ( $R_2(0) = \gamma R_1$ ) при армировании (29), (30) с  $\omega_{20} = 0,2$  и  $\omega_{10} = 0,1$  при воздействии «высокой» нагрузки прямоугольного вида. Кривые 1–3 соответствуют отверстию с  $\gamma = 0,1$  (в этом случае  $P_0 = 16,05/b$ ,  $P_1 = 61,85/b$ ,  $D_1 = 0,49R_1$ ) и  $P_{\max} = 81/b$ ,  $\bar{k} = k_v T / \rho_0 = 0,2$ . Прогибы изображены в момент снятия нагрузки  $t = T$  (кривая 1), в момент перехода схемы 2 в схему 1:  $t = t_1 = 1,36T$  (кривая 2) и остаточные прогибы при  $t = t_k = 3,74T$  (кривая 3). Линия 4 изображает остаточные прогибы этой же пластины в случае  $\bar{k} = 0,5$ , при этом  $t_k = 2,96T$ . Линии 5, 6 изображают остаточные прогибы в случае  $\gamma = 0,3$  ( $P_0 = 18,32/b$ ,  $P_1 = 113,64/b$ ,  $D_1 = 0,32R_1$ ),  $P_{\max} = 120/b$  при  $\bar{k} = 0,2$  ( $t_k = 4,54T$ ) и  $\bar{k} = 0,5$  ( $t_k = 3,42T$ ) соответственно.

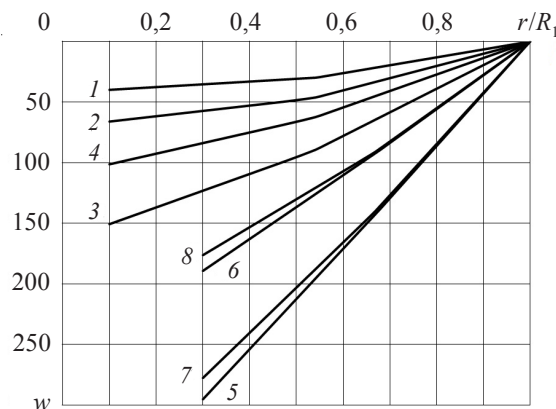


Рис. 6. Безразмерные прогибы пластин

### 5. Армированная кольцевая пластина

В качестве другого примера рассмотрим армированную кольцевую пластину с радиусом свободного отверстия  $R_2 = \gamma R_1$  ( $\gamma < 1$ ). В случае шарнирного закрепления контура ( $\eta = 1$ ) предельная нагрузка (11) равна

$$P_0 = 6 \frac{\int_{\gamma R_1}^{R_1} M_{02}(r) dr}{R_1^3 (1 - \gamma)^2 (1 + 2\gamma)}. \quad (31)$$

Это значение полностью совпадает с точным значением предельной нагрузки армированной кольцевой пластины, шарнирно опертой по внешнему контуру, вычисленной при условии пластичности, в форме прямоугольника, записанного для радиального и окружного изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$  (типа прямоугольника  $ABCD$  на рис. 7) [29]. Очевидно, что в случае условия пластичности типа Треска в форме шестиугольника ( $AA_1B_1CC_1D_1A$  или  $AA_2B_2CC_2D_2A$ , как в [30], на рис. 7) предельная нагрузка также будет иметь вид (31).

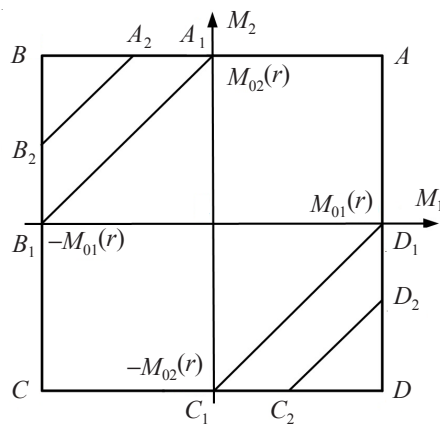


Рис. 7. Условия пластичности

Для кольцевой пластины на рис. 5 кривые 7–12 изображают зависимости предельной нагрузки  $p_0$  от параметра  $\gamma$ , вычисленные по (31). Способы крепления контура и параметры армирования для кривых 7–12 те же, что и в случаях 1–6 соответственно. Для рассматриваемых пластин из рис. 5 видно, что при увеличении размера свободного отверстия предельная нагрузка сначала снижается, а затем возрастает. Также видно, что кривые 1 и 7, 2 и 8, 3 и 9, 4 и 10, 5 и 11, 6 и 12 при малых размерах отверстия находятся очень близко. Следовательно, в рассматриваемых видах армирования в случае малых размеров отверстия ( $\gamma \leq 0,2$ ) предельные нагрузки для кольцевой пластины и для круглой пластины с квадратным отверстием практически совпадают.

На рис. 6 линии 7, 8 соответствуют остаточным прогибам в случае  $\gamma = 0,3$  ( $P_0 = 17,6/b$ ,  $P_1 = 102,83/b$ ,  $D_1 = 0,35R_1$ ),  $P_{\max} = 120/b$  при  $\bar{k} = 0,2$  ( $t_k = 4,6T$ ) и  $\bar{k} = 0,5$  ( $t_k = 3,45T$ ). Из рис. 6 видно, что при увеличении коэффициента вязкого сопротивления основания остаточный прогиб рассматриваемых пластин уменьшается (кривые 3, 4, 5–8).

Во всех приведенных примерах системы дифференциальных уравнений, описывающих динамическое поведение, решались численно методом Рунге–Кутты, и при деформировании по схеме 2 реализовывался вариант *a* схемы 2.

### Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах построено общее решение задачи о динамическом изгибе композитных круглых шарнирно опертых или защемленных пластин с произвольным кусочно-гладким свободным отверстием. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластины находятся на вязком основании. Пластины являются гибридными слоисто-волокнистыми с распределением слоев симметрично относительно срединной поверхности. В каждом слое находится семейство армирующих волокон, расположенных по радиальным, окружным и угловым направлениям. В зависимости от амплитуды нагрузки возможны несколько схем деформирования пластин в форме линейчатых поверхностей. На основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждой из схем получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Представлены аналитические зависимости для описания движения пластических шарниров, времени остановки и остаточных прогибов, позволяющие построить простую программную процедуру для решения рассматриваемой сложной проблемы. Получены простые аналитические выражения для оценки предельных нагрузок. Найденная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. Приведены примеры численных решений для четырехслойной круглой пластины с квадратным свободным отверстием и кольцевой пластины в случае радиального, окружного армирования и углового армирования в форме логарифмических спиралей. Предложенные решения могут быть использованы при проектировании армированных металлокомпозитных плоских круглых элементов конструкций с произвольным свободным отверстием. Количество параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять структуру армирования пластин, объем

ное содержание армирующих волокон, толщину слоев и физические характеристики композита, вязкого основания, а также форму отверстия и способ крепления внешнего контура.

#### Список литературы

1. Янковский А.П. Вязкопластическая динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнутой структуры при действии нагрузок взрывного типа. I. Постановка задачи и метод решения. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т. 55. №2. С. 119–130.
2. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9. №3. С. 279–297. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24.
3. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Трепутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости. *Вестник ТГАСУ*. 2013. №4. С. 127–142.
4. Абросимов Н.А., Елесин А.В., Новосельцева Н.А. Численный анализ влияния структуры армирования на динамическое поведение и предельную деформируемость композитных оболочек вращения. *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50. №2. С. 313–326. DOI: 10.1007/s11029-014-9409-z.
5. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009. *Composite Structures*. 2010. Vol. 93. P. 14–31. DOI:10.1016/j.compstruct.2010.05.014.
6. Arora H., Del Linz P., Dear J.P. Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts. *Int. J. Impact Eng.* 2017. Vol. 104. P. 95–106. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.01.017.
7. Jones N. Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures. *Ships and Offshore Structures*. 2006. Vol. 1. No 1. P. 37–44. DOI: 10.1533/saos.2005.0007.
8. Немировский Ю.В., Романова Т.П. *Динамическое сопротивление плоских пластических преград*. Новосибирск: ГЕО, 2009. 311 с.
9. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя. *Прикл. механика и техн. физика*. 1969. №5. С. 81–88.
10. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Archiwum Inzynierii Ladowej*. 1975. Vol. XXI. No 1. P. 57–67.
11. Kelly A., Tyson W.R. Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum. *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. No 6. P. 329–350. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90035-9.
12. Сарбаев Б.С. Анализ несущей способности слоистых волокнустых композиционных материалов. *Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение*. 2000. №4. С. 59–72.
13. Сарбаев Б.С. Расчет нижней границы предельной нагрузки для многослойных волокнустых композитов при двухосном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2013. Вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/856.html>.
14. Ржаницын А.Р. *Предельное равновесие пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1983. 288 с.
15. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 391 с.
16. Mazalov V.N., Nemirovsky Ju.V. Dynamic bending of rigid-plastic annular plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1976. Vol 11. No 1. P. 25–40. DOI: 10.1016/0020-7462(76)90036-6.
17. Jones N. Finite deflections of rigid-viscoplastic strain-hardening annular plate loaded impulsively. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35. No 2. P. 349–356. DOI: 10.1115/1.3601202.
18. Jones N. Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically. *Int. J. Solids and Struct.* 1968. Vol. 5. No 6. P. 593–603. DOI: 10.1016/0020-7683(68)90076-0.
19. Lellep J., Torn K. Dynamic plastic behaviour of annular plates with transverse shear effects. *Int. J. Impact Eng.* 2007. Vol. 34. No 6. P. 1061–1080. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2006.05.005.

20. Aggarwal H.R., Ablow C.M. Plastic bending of an annular plate by uniform impulse. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1971. Vol. 6. No 1. P. 69–80. DOI: 10.1016/0020-7462(71)90035-7.
21. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической правильной полигональной пластины с отверстием под действием взрывных нагрузок. *Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. статей. 9-й Всерос. науч. конф.* Под общ. ред. В.О. Каледина. Новокузнецк, 28–29 ноября 2008 г. В 3 т. Т. 1. НФИ ГОУ ВПО КемГУ. Новокузнецк, 2008. С. 93–97.
22. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование динамического поведения жесткопластической криволинейной пластины с произвольным свободным отверстием. *Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб.* Минск: БНТУ, 2007. №23. С. 26–34.
23. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates. *J. Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3. No 2. P. 313–334.
24. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным внутренним отверстием. *Прикладная механика*. 2010. Т. 46. №3. С. 70–82. DOI: 10.1007/s10778-010-0311-7.
25. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической круглой пластины с произвольным внутренним свободным отверстием. *Наука. Промышленность. Оборона (НПО-2008): Тр. 9-й Всерос. науч.-техн. конф.* Новосибирск, 23–25 апреля 2008 г. Новосибирск: НГТУ, 2008. С. 262–274.
26. Ерхов М.И. *Теория идеально пластических тел и конструкций*. М.: Наука, 1978. 352 с.
27. Кейл А. Проблемы пластичности корабельных конструкций при взрывном и ударном нагружении. *Механика (сборник переводов)*. 1961. №2. С. 197–223.
28. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984. 752 с.
29. Романова Т.П. Несущая способность и оптимизация трехслойных железобетонных кольцевых пластин, опертых по внутреннему контуру. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2015. №3. С. 114–132. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.09.
30. Шамиев Ф.Г. Об одной задаче оптимизации пластинок из композитного материала. *Механика композитных материалов*. 1981. №2. С. 244–248.

#### References

1. Yankovskii A.P. Viscoplastic dynamics of metallic composite shells of layered-fibrous structure under the action of loads of explosive type. I. Statement of the problem and method for solution. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 192. No 6. P. 623–633. DOI: 10.1007/s10958-013-1421-7.
2. Yankovskii A.P. Primenenie iavnogo po vremeni metoda tsentral'nykh raznostei dlia chislennogo modelirovaniia dinamicheskogo povedeniia uprugoplasticheskikh gibkikh armirovannykh plastin [Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational continuum mechanics]*. 2016. Vol. 9. No 3. P. 279–297. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24 (In Russian).
3. Popov O.N., Malinovskii A.P., Moiseenko M.O., Treputneva T. A. Sostoianie voprosa po raschetu neodnorodnykh elementov konstrukttsii za predelom uprugosti [The state of the question on the calculation of the heterogeneous elements of structures beyond the elastic limit]. *Vestnik TGASU [Scientific Journal "Vestnik of TSUAB"]*. 2013. No 4. P. 127–142 (In Russian).
4. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Novoseltseva N.A. Numerical analysis of the effect of reinforcement structure on the dynamic behavior and ultimate deformability of composite shells of revolution. *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. No 2. P. 223–232. DOI: 10.1007/s11029-014-9409-z.
5. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009. *Composite Structures*. 2010. Vol. 93. P. 14-31. DOI:10.1016/j.compstruct.2010.05.014.
6. Arora H., Del Linz P., Dear J.P. Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts. *Int. J. of Impact Eng.* 2017. Vol. 104. P. 95–106. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.01.017.



7. Jones N. Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures. *Ships and Offshore Structures*. 2006. Vol. 1 No 1. P. 37–44. DOI: 10.1533/saos.2005.0007.
8. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. *Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad* [Dynamic Behavior of Flat Plastic Barriers]. Novosibirsk. GEO Publ. 2009. 311 p. (In Russian).
9. Nemirovsky Ju.V. Plasticity (strength) condition for a reinforced layer. *Appl. Mech. Tech. Phys.* 1969. Vol. 10. No 5. P. 759–765.
10. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Archiwum Inzynierii Ladowej*. 1975. Vol. XXI. No 1. P. 57–67.
11. Kelly A., Tyson W.R. Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum. *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. No 6. P. 329–350. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90035-9.
12. Sarbaev B.S. Analiz nesushchey sposobnosti sloistykh voloknistykh kompozitsionnykh materialov [Analysis of bearing capacity of layered-fibrous composite materials]. *Vestnik MGTU. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2000. No 4. P. 59–72 (In Russian).
13. Sarbaev B.S. Raschet nizhnei granitsy predel'noy nagruzki dlya mnogoslainnykh voloknistykh kompozitov pri dvukhosnom nagruzhenii [The calculation of lower bound of limit loads for multilayered fibrous composites under biaxial loading]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation]. 2013. Iss. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/856.html> (In Russian).
14. Rzhantsyn A.R. *Predelnoe ravnovesie plastinok i obolochek* [Limit equilibrium of plates and shells]. Moscow. Nauka Publ. 1983. 288 p. (In Russian).
15. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 2002. 391 p. (In Russian).
16. Mazalov V.N., Nemirovsky Ju.V. Dynamic bending of rigid-plastic annular plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1976. Vol. 11. No 1. P. 25–40. DOI: 10.1016/0020-7462(76)90036-6.
17. Jones N. Finite deflections of rigid-viscoplastic strain-hardening annular plate loaded impulsively. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35. No 2. P. 349–356. DOI: 10.1115/1.3601202.
18. Jones N. Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically. *Int. J. Solids and Structures*. 1968. Vol. 5. No 6. P. 593–603. DOI: 10.1016/0020-7683(68)90076-0.
19. Lellep J., Torn K. Dynamic plastic behaviour of annular plates with transverse shear effects. *Int. J. Impact Eng.* 2007. Vol. 34. No 6. P. 1061–1080. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2006.05.005.
20. Aggarwal H.R., Ablow C.M. Plastic bending of an annular plate by uniform impulse. *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1971. Vol. 6. No 1. P. 69–80. DOI: 10.1016/0020-7462(71)90035-7.
21. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. *Dinamika zhestkoplachesteskoi pravil'noi poligonal'noi plastiny s otverstiem pod deistviem vzryvnykh nagruzok* [Dynamics of rigid-plastic right polygonal plate with a hole under the action of explosive load]. *Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie. Sb. statey 9-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii*. Pod obshch. red. V.O. Kaledina. [Boundary Value Problems and Mathematical Modeling]. Novokuznetsk, 28–29 noiabria 2008 g. V 3 t. T. 1. NFI GOU VPO KemGU. Novokuznetsk. 2008. P. 93–97 (In Russian).
22. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Modelirovanie dinamicheskogo povedeniya zhestkoplachesteskoy krivolineinoy plastiny s proizvolnym svobodnym otverstiem [Modeling dynamic behavior of rigid-plastic curvilinear plates with arbitrary free hole]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: Mezhdunarod. nauch.-tekhn. sb.* [Theoretical and Applied Mechanics] Minsk. BNTU Publ. 2007. No 23. P. 26–34 (In Russian).
23. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates. *J. Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3. No 2. P. 313–334.
24. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dynamics of a rigid-plastic curvilinear plate of varying thickness with an arbitrary hole. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46. No 3. P. 304–314. DOI: 10.1007/s10778-010-0311-7.
25. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. *Dinamika zhestkoplachesteskoy krugloy plastiny s proizvolnym vnutrennim svobodnym otverstiem* [Dynamics of rigid-plastic circular plate with

arbitrary internal free hole]. *Nauka. Promyshlennost. Oborona. Tr: 9-i Vseros. nauch.-tekh. konf. [Science. Industry. Defense]* (NPO-2008). Novosibirsk, 23–25 aprelia 2008 g. Novosibirsk: NGTU Publ. 2008. P. 262–274 (In Russian).

26. Erkhov M.I. *Teoriya idealno plasticheskikh tel i konstruktsiy [Theory of Perfectly Plastic Bodies and Structures]*. Moscow. Nauka Publ. 1978. 352 p. (In Russian).

27. Keil A. Problems of plasticity in naval structures: explosive and impact loading. *Proc. Second Symp. on Naval Structural Mech.* Eds by E.H. Lee, P.S. Symonds. Pergamon Press. 1961. P. 22–42.

28. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktionalniy analiz [Functional Analysis]*. Moscow. Nauka Publ. 1984. 752 p. (In Russian).

29. Romanova T.P. Nesushchaya sposobnost i optimizatsiya trekhslonnykh zhelezobetonnykh koltsevykh plastin, opertykh po vnutrennemu konturu [Carrying capacity and optimization of three-layer reinforced concrete annular plate, supported on the internal contour]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 3. P. 114–132. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.09 (In Russian).

30. Shamiev F.G. Ob odnoi zadache optimizatsii plastinok iz kompozitnogo materiala [On one problem of optimization of plates from composite material]. *Mekhanika kompozitnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. 1981. No 2. P. 244–248 (In Russian).

#### **MODELING OF RIGID-PLASTIC DYNAMIC BENDING OF REINFORCED LAYERED CIRCULAR PLATES WITH ARBITRARY HOLE ON VISCOUS FOUNDATION UNDER EXPLOSIVE LOADS**

**Romanova T.P.**

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russian Federation*

The general method is developed for analysis of the dynamic behavior of rigid-plastic hybrid layered composite circular, simply supported or clamped plates with arbitrary free central hole. The plates are on a viscous basis, and under the action of uniformly distributed over the surface short-term dynamic loads of explosive type. The plates are hybrid, layered-fibrous with the distribution of layers symmetrically relative to the middle surface. In each layer a family of reinforcing fibres is located on the radial, circumferential and angular directions. Depending on the amplitude of load the different schemes of deformation of plates are possible. From the principle of virtual power in combination with the principle of d'Alembert for each of the schemes the equations of the dynamic deformation is obtained and conditions of their realization are analyzed. Analytical expressions are obtained for the estimation of limit loads. The time of deformation and final deflections of plates is defined. Numerical examples are given for annular plates and for circular plates with square hole. The number of parameters in the developed mathematical model allows for a wide range to change the structure of the reinforcement of plates, the volume content of reinforcing fibers, the thickness of the layers and physical properties of the composite, viscous base, and the shape of hole and conditions of support of the external contour. The proposed method can be used in the design of circular reinforced metal-composite plates with arbitrary free hole on a viscous foundation.

*Keywords:* rigid-plastic model, structural model, circular reinforced plate, arbitrary hole, viscous foundation, explosive load, limit load.