

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЛОКАЛЬНЫМ НАБОРОМ РЕБЕР, В УСЛОВИЯХ АДДИТИВНОГО БЕЛОГО ШУМА\*

© 2017 г.     **Баженов В.Г., Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В.**

*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

yan-tan1987@mail.ru

*Поступила в редакцию 20.06.2017*

Предложен общий метод исследования математической модели колебаний в виде пространственно-временного хаоса для пластины, подкрепленной ребрами жесткости, роль которых играют три балки, с учетом их контактного взаимодействия и внешнего воздействия – белого шума. Рассмотрен случай симметричного расположения подкрепляющих ребер относительно центра пластины. Выявлено, что форма колебаний существенно изменяется в зависимости от величины интенсивности шумового воздействия. Для решения и анализа этих конструктивно нелинейных задач применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, вейвлет-анализ, методы анализа знака старшего показателя Ляпунова. Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом Фаэдо – Галеркина в высших приближениях по пространственной координате. Задача Коши по времени решается методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности.

*Ключевые слова:* контактное взаимодействие пластин и балок, нелинейные колебания, белый шум, методы Фаэдо – Галеркина, Рунге – Кутты, вейвлет-анализ.

### **Введение**

Двухслойные механические системы в виде пластин и балок [1, 2] являются основой различных приборов навигации, электронной техники, в частности слоистых плоских микромеханических акселерометров (ММА) [3]. Наличие зазора между элементами уже при малых прогибах индуцирует хаотические колебания, что обуславливает необходимость учитывать контактное взаимодействие между ними, то есть решать конструктивно нелинейную задачу по классификации П.А. Лукаша [4]. Сложные нелинейные колебания и хаотические состояния приводят к погрешностям в работе измерительных приборов и поэтому требуют управления режимами колебаний [5–9]. Случайные воздействия со стороны внешней среды можно ис-

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект №15-19-10039).

следовать с помощью математической модели аддитивного белого шума [10, 11]. В большинстве работ рассматриваются системы с одной степенью свободы и без учета контактного взаимодействия. В целях приближения к реальным условиям работы навигационных приборов используется математическое моделирование хаотической динамики систем с большим числом степеней свободы с учетом контактного взаимодействия и внешних случайных воздействий.

## 1. Постановка задачи и метод решения

Построена математическая модель сложных колебаний двухслойного пакета из пластины и трех балок под воздействием усилия в виде внешнего аддитивного белого шума (рис. 1).

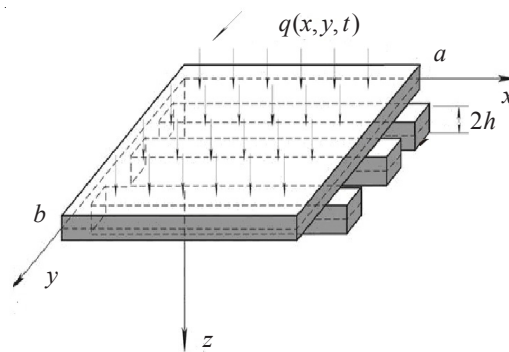


Рис. 1

Математическая модель описывается системой уравнений, записанных в безразмерных параметрах [1, 11]:

$$\begin{cases} \frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla_\lambda^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q_1(x, y, t) - K \sum_{i=1}^3 (w - w_i - h_k) \Psi_{i-1} = 0, \\ \frac{1}{12\lambda_1} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial t} - q_i(x, t) + K(w - w_i - h_k) \Psi_{i-1} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Psi_{i-1} = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w - h_k - w_i)] \quad (i = \overline{1, 3})$$

– винклера связь между обжатием и контактным давлением ( $i$  – номер балки) [9],  $w, w_i$  – функции прогибов пластины и балок соответственно;  $K$  – коэффициент жесткости трансверсального обжатия пластины в зоне контакта;  $h_k$  – зазор между слоями;  $t$  – время;  $\varepsilon$  – коэффициент затухания;  $q(x, y, t), q_i(x, t)$  – поперечные нагрузки, действующие на пластину и балки соответственно;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Аддитивный шум добавлен в систему в форме случайного слагаемого с интенсивностью  $a_{0i}$ , используется только во внешней нагрузке и задается формулой:  $a_{0i}(2\text{rand}/(\text{rand\_max} + 1) - 1)$ , где  $a_{0i}$  – интенсивность шумового воздействия;  $\text{rand}()$  – стандартная функция языка C++, принимающая значение случайного целого числа от 0 до  $\text{rand\_max}$ ;  $\text{rand\_max}$  – константа, равная 65535. Выражение  $2\text{rand}/(\text{rand\_max} + 1) - 1$  принимает произвольные дробные значения в диапазоне  $(-1; 1)$ . Данная математическая модель белого шума предложена P.R. Cook и

G.P. Scavone (Центр компьютерных исследований в области музыки и акустики (CCRMA) Стэнфордского университета).

К исходным уравнениям следует присоединить условия непроникновения одной системы в тело другой, граничные условия – шарнирное опирание по контуру для пластины и шарнирное опирание по концам для балки, нулевые начальные условия [11]. Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Фаэдо – Галеркина в высших приближениях [13]. Далее систему уравнений второго порядка сводим к системе уравнений первого порядка с помощью метода замены переменной. Задачи Коши для нелинейной системы уравнений первого порядка решаются методом Рунге – Кутты 4-го порядка по временной координате. Достоверность полученных результатов, сравнение различных численных методов, обоснование выбора методов расчета приведены в статье [14]. Для анализа получаемых результатов для каждого элемента пакета строятся сигналы, фазовые портреты, сечения Пуанкаре, фурье-спектры, применяются вейвлет-преобразования. Преимущества вейвлет-преобразования и выбор анализирующего вейвлета приведены в статьях [1, 15, 16]. Важным компонентом при исследовании сложных колебаний является анализ знаков показателей Ляпунова. Для получения достоверных результатов при анализе знаков спектра показателей Ляпунова [17] используются три алгоритма: метод Вольфа [18], метод Канца [19], метод Розенштейна [20]. Для описания и анализа фазовой хаотической синхронизации механических динамических систем на базе вейвлет-анализа, как правило, вводится фаза хаотического сигнала. Фазовая хаотическая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы. Фазовая синхронизация ведет к появлению захвата фаз на синхронизированных временных масштабах [1].

## 2. Численные результаты

Изучим влияние белого шума на форму и характер колебаний двухслойной структуры. Рассмотрим пакет, состоящий из пластины и трех параллельных балок, расположенных симметрично относительно центра пластины ( $y = 0,25$ ,  $y = 0,5$  и  $y = 0,75$ ), зазор между пластиной и каждой из балок равен  $h_k = 0,01$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . На верхнюю пластину действует внешняя распределенная поперечная нагрузка  $q(x, y, t) = q_0 \sin \omega_p t$ , где  $q_0 = 0,07$ ,  $\omega_p = 5$  – частота, близкая к частоте собственных колебаний пластины. Исследуем влияние белого шума интенсивностью  $a_{0i} = 10^{-3}$  на формы колебаний этой системы в зависимости от того, на какую балку действует шум.

В случае отсутствия шумового воздействия ( $a_{0i} = 0$ ) на элементы двухслойной системы форма колебаний пакета симметричная, то есть крайние балки совершают синхронные колебания на одинаковых частотах. Происходит контактное взаимодействие пластины и крайних балок, при этом средняя балка находится в состоянии покоя. Пластина и крайние балки совершают хаотические симметричные колебания на утроенном периоде:  $\omega_p/3 = 1,6$ ,  $2\omega_p/3 = 3,3$ ,  $\omega_p = 5$ , о чем свидетельствуют 2D-вейвлеты Морле ( $a1, a2, a3$ ), спектры мощности Фурье ( $b1, b2, b3$ ) и фазовые портреты ( $c1, c2, c3$ ) (рис. 2).

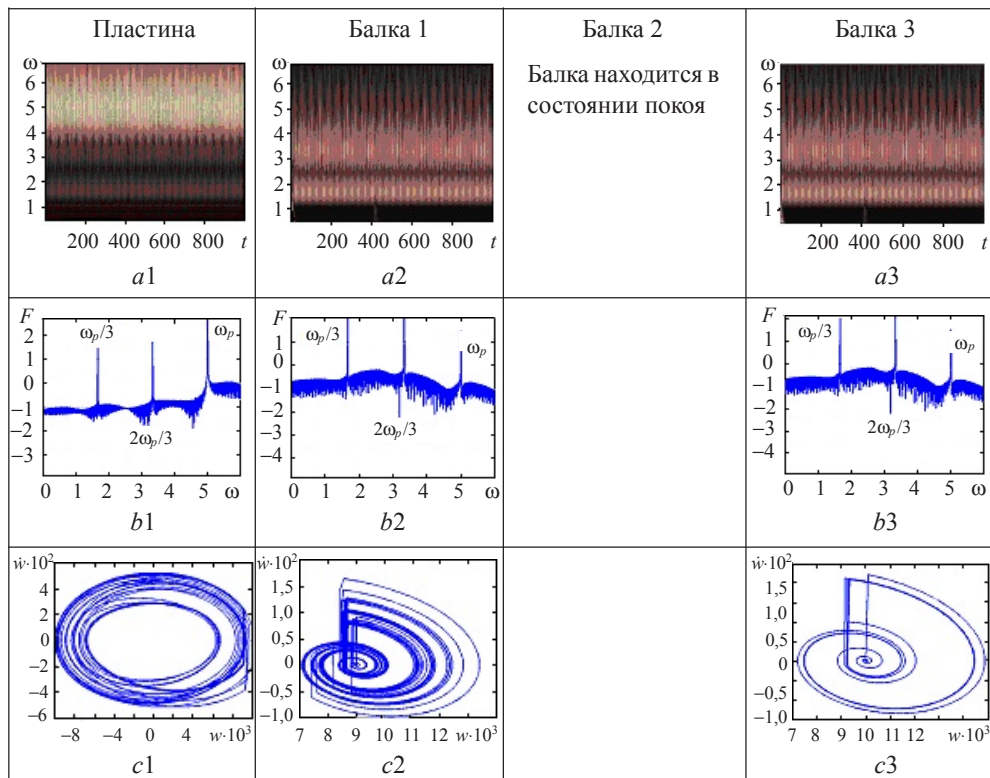


Рис. 2

Значения старшего показателя Ляпунова для пластины, вычисленные тремя методами, находятся в положительной области, что также характеризует хаотическое состояние. Так, например, старший показатель Ляпунова, вычисленный по методу Вольфа, равен 0,01495. При дальнейшем увеличении амплитуды поперечной нагрузки ( $q_0 = 0,1$ ) колебания также носят хаотический характер, а знак старшего показателя Ляпунова остается положительным на всем интервале времени. В ходе изучения фазовой хаотической синхронизации совместных колебаний пластины и симметрично расположенных балок было показано, что в случае отсутствия шумового воздействия на двухслойную структуру наблюдается фазовая хаотическая синхронизация пластины с первой и третьей балками в диапазоне частот  $\omega \in (3; 5)$ . Так как средняя балка находится в состоянии покоя, то синхронизация колебаний пластины и этой балки отсутствует.

Рассмотрим задачу, когда аддитивный белый шум действует на все элементы двухслойной конструкции, то есть на пластину и все три балки (рис. 3).

На интервале времени  $t \in [0; 860]$  пластина совершает совместные колебания с первой балкой ( $y = 0,25$ ), при  $t \in [860; 900]$  – со второй балкой ( $y = 0,5$ ). Третья балка ( $y = 0,75$ ) под действием внешнего шума совершает хаотические колебания на всем промежутке времени, но при этом пластины не касается. Для пластины и первой и второй балок можно выделить основные частоты, на которых происходят их колебания:  $\omega_p/3 = 1,6$ ,  $2\omega_p/3 = 3,3$ ,  $\omega_p = 5$  (рис. 3:  $a1$ ,  $a2$ ,  $a3$ ,  $b1$ ,  $b2$ ,  $b3$ ). Для третьей балки это сделать нельзя, так как там другой тип хаоса: спектр мощности Фурье  $b4$  представляет собой сплошной пьедестал и фазовый портрет  $c4$  является сплошным пятном (см. рис. 3). Для третьей балки старший показатель Ляпунова по

методу Канца равен 0,01593, по методу Розенштейна – 0,28377, по методу Вольфа – 0,90279. Таким образом, все методы дают положительное значение показателя Ляпунова, что подтверждает хаотический характер колебаний.

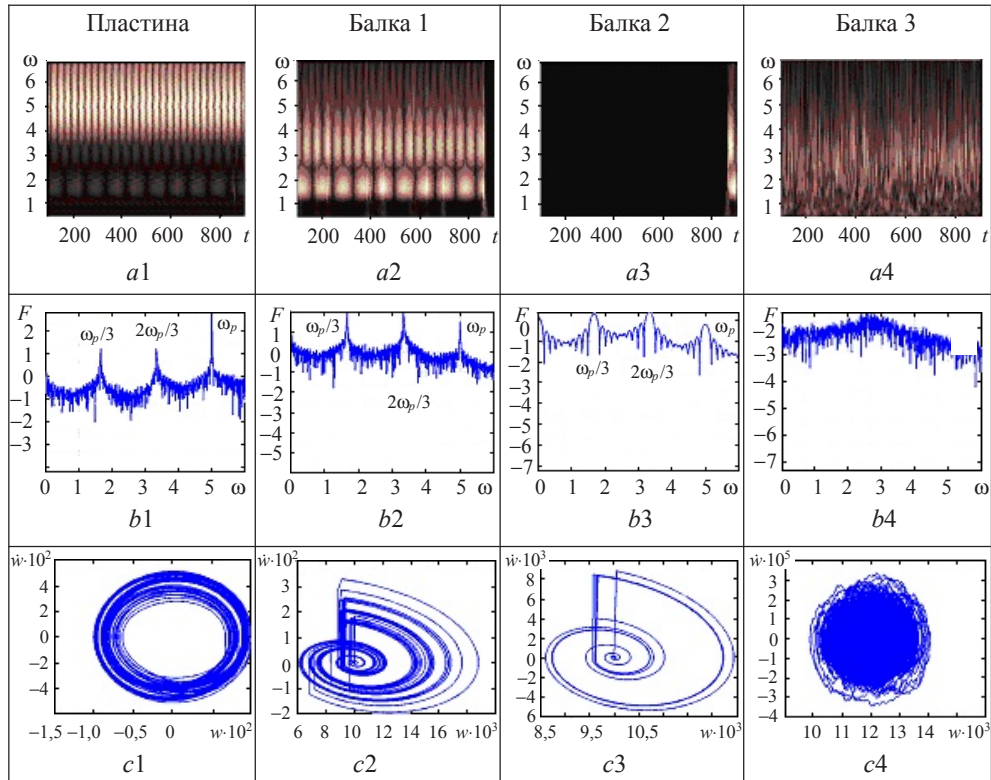


Рис. 3

В случае воздействия аддитивного внешнего шума на все элементы двухслойной конструкции возникает фазовая хаотическая синхронизация пластины с каждой из балок в разные моменты времени. При этом фазовая хаотическая синхронизация пластины с первой балкой происходит в диапазоне частот  $\omega \in (3; 5)$  так же, как и в случае отсутствия шума. На графиках разности фаз колебаний пластины со второй и третьей балками на некоторых временных отрезках присутствуют отдельные элементы включения синхронизации на частотах  $\omega_p/3 = 1,6$  и  $\omega \in (3; 7)$  вследствие того, что под действием белого шума балки совершают малые по амплитуде хаотические колебания.

### Заключение

Действие аддитивного белого шума существенно влияет на форму колебаний конструкции (симметричная или несимметричная формы колебаний). В случае подкрепления пластины симметрично расположенными балками при отсутствии шума во внешней нагрузке форма колебаний симметричная, то есть крайние балки совершают синхронные хаотические колебания на всем интервале времени. Как только шум оказывает воздействие на элементы конструкции, форма колебаний сразу становится несимметричной, то есть колебания балок несинхронные, контакт пластины с каждой из балок происходит в разные моменты времени поочередно, хаотичес-

кие колебания происходят на частотах  $\omega_p = 5$ ,  $\omega_p/3$  и  $2\omega_p/3$ , при этом фазовая синхронизация колебаний пластины с соответствующей балкой возникает в окрестности частоты  $2\omega_p/3 = 3,33$ . Установлено, что интенсивность белого шума влияет на продолжительность временных интервалов, на которых происходит контактное взаимодействие пластины с той или иной балкой.

#### Список литературы

1. Awrejcewicz J., Krysko Jr V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 88. P. 21–30.
2. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Szymanowska O., Krysko V.A. Principal component analysis in the nonlinear dynamics of beams: Purification of the signal from noise induced by the nonlinearity of beam vibrations. *Advances in Mathematical Physics*. 2017. Vol. 2017. P. 1–9.
3. Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Голиков А.В., Николаев С.Г., Колеватов А.П., Плотников А.Д., Коффер К.В. Иерархические тепловые модели бесплатформенной инерциальной навигационной системы на волоконно-оптических гироскопах. *Гироскопия и навигация*. 2013. №1 (80). С. 49–63.
4. Лукаш П.А. *Основы нелинейной строительной механики*. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
5. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Папкова И.В., Крысько В.А. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. №3. С. 235–243.
6. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of size dependent Timoshenko beams with functionally graded properties along their thickness. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 93. P. 415–430.
7. Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear dynamics of multilayer beam structures with gaps between them taking into account the geometrical and physical nonlinearities. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2016. Vol. 11. No 21. P. 10427–10432.
8. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 96–105.
9. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 106–121.
10. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer Verlag, 1984. 318 p.
11. Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. №4. С. 259–272.
12. Кантор Б.Я. *Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения*. Киев: Наукова думка, 1990. 136 с.
13. Faedo S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitative dei problemi di propagazione. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*. 1949. P. 1–40.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Kutepov I.E., Zagniboroda N.A., Dobriyan V., Krysko V.3. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. **23**. P. 043130-1–043130-25. DOI: 10.1063/1.4838955
15. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Erofeev N.P., Krysko V.A. Chaotic dynamics of structural members under regular periodic and white noise excitations. *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. I. Dimov et al. (Eds.). Berlin: Springer, 2017. Vol. 10187 LNCS. P. 25–32.
16. Awrejcewicz J., Krysko Jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Noisy contact interactions

of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. No. 369. P. 77–86.

17. Yang Caixia, Wu Christine Qiong. A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series. *Nonlinear Dyn.* 2011. Vol. 64. No 3. P. 279–292.

18. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*. 1985. Vol. D16. P. 285–317.

19. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett. A* 185. 1994. P. 77–87.

20. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D* 65. 1993. P. 117–134.

### References

1. Awrejcewicz J., Krysko-jr V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 88. P. 21–30.

2. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Szymanowska O., Krysko V.A. Principal component analysis in the nonlinear dynamics of beams: Purification of the signal from noise induced by the nonlinearity of beam vibrations. *Advances in Mathematical Physics*. 2017. Vol. 2017. P. 1–9.

3. Dzhashitov V.E., Pankratov V.M., Golikov A.V., Nikolaev S.G., Kolevatov A.P., Plotnikov A.D., Koffer K.V. Ierarkhicheskie teplovye modeli besplatformennoy inertsiyalnoy navigatsionnoy sistemy na volokonno-opticheskikh giroskopakh [Hierarchical thermal models of the free inertial navigation system on fiber optic gyroscopes]. *Girokopiya i navigatsiya [Gyroscopy and navigation]*. 2013. No 1 (80) P. 49–63 (In Russian).

4. Lukash P.A. *Osnovy nelineinoy stroitelnoy mehaniki [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]*. Moscow. Stroyizdat Publ. 1978. 204 p. (In Russian).

5. Krylova E.Y., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Khaoticheskaya dinamika gibkikh pryamougolnykh v plane plastin pri deystvii prodolnykh nagruzok [Chaotic dynamics of flexible rectangular plates in the plan under the action of longitudinal loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 3. P. 235–243 (In Russian).

6. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of size dependent Timoshenko beams with functionally graded properties along their thickness. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 93. P. 415–430.

7. Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear dynamics of multilayer beam structures with gaps between them taking into account the geometrical and physical nonlinearities. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2016. Vol. 11. No 21. P. 10427–10432.

8. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 96–105.

9. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Pavlov S.P., Krysko V.A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 106–121.

10. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo. Springer-Verlag. 1984. 318 p.

11. Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova C.Y. Kontaktnoe vzaimodeystvie plastiny s sistemoy balok pri nalichii zazorov s uchedom belogo shuma [Contact interaction plates, reinforced by ribs, with gaps under the influence of white noise]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 4. P. 259–272 (In Russian).

12. Kantor B.Ya. *Kontaktnye zadachi nelineinoy teorii obolochek vrascheniya [Contact Problems of the Nonlinear Theory of Shells of Revolution]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1990. 136 p. (In Russian).

13. Faedo S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitative dei problemi di propagazione. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*. 1949. P. 1–40.

14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Kutepov I.E., Zagniboroda N.A., Dobriyan V., Krysko V.3. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. **23**. P. 043130-1–043130-25. DOI: 10.1063/1.4838955

15. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Erofeev N.P., Krysko V.A. Chaotic dynamics of structural members under regular periodic and white noise excitations. *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. I. Dimov et al. (Eds.). Berlin. Springer. 2017. Vol. 10187 LNCS. P. 25–32.

16. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. No. 369. P. 77–86.

17. Yang Caixia, Wu Christine Qiong. A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series. *Nonlinear Dyn.* 2011. Vol. 64. No 3. P. 279–292.

18. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*. 1985. Vol. D16. P. 285–317.

19. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett. A* 185. 1994. P. 77–87.

20. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D* 65. 1993. P. 117–134.

#### **NONLINEAR VIBRATIONS OF A PLATE STIFFENED WITH A LOCAL SET OF RIBS IN THE CONDITIONS OF ADDITIVE WHITE NOISE**

**Bazhenov V.G., Krylova E.Yu., Yakovleva T.V.**

*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

A general method is introduced for studying a mathematical model of vibrations in the form of spatial-time chaos for a plate stiffened with ribs in the form of three beams, accounting for their contact interaction and an external effect in the form of white noise. An example with stiffening ribs symmetrical relative to the plate center is considered. The vibration form is found to change substantially as a function of the noise effect intensity value. These structurally nonlinear problems are solved and analyzed using methods of the qualitative theory of differential equations, the wavelet analysis, methods of analyzing the sign of the highest Lyapunov index. A system of nonlinear partial differential equations is reduced to a system of ordinary differential equations, using Faedo – Galerkin method in the highest approximations along the spatial coordinate. Cauchy problem in time is solved using the 4<sup>th</sup> order of accuracy Runge – Kutta method.

*Keywords:* contact interaction of plates and beams, nonlinear vibrations, white noise, Faedo – Galerkin method, Runge – Kutta method, wavelet analysis.