

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ*

© 2017 г.

**Мицкевич С.А.¹, Крысько А.В.^{1,2},
Жигалов М.В.¹, Крысько В.А.¹**

¹*Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томск, Российская Федерация*

zhigalovm@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.06.2017

Разработан динамический критерий потери устойчивости прямоугольных в плане сферических оболочек при действии переменной во времени поперечной нагрузки с учетом двух типов нелинейности – геометрической и физической. Построена математическая модель тонких пологих оболочек на базе кинематической гипотезы Кирхгофа – Лява. Геометрическая нелинейность учитывается на основе соотношений Т. Кармана. Физическая нелинейность описывается деформационной теорией пластичности А.А. Ильюшина. Разработан подход к расчету динамики оболочек под действием переменной во времени поперечной нагрузки, в основу которого положены метод конечных разностей второго порядка точности, метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях и метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Результаты, полученные при помощи метода конечных разностей и метода Бубнова – Галеркина, хорошо согласуются между собой. Для ряда геометрических параметров построены зависимости видов колебаний от амплитуды вынуждающей нагрузки и частоты. Проанализированы сценарии перехода гармонических колебаний в хаотические, полученные для различных геометрических и физических параметров. Отмечено, что единого сценария нет, он зависит от управляющих параметров. Возможно существование трех классических сценариев (Фейгенбаума, Рюэля – Таккенза – Ньюхауза и Помо – Манневилля) с незначительными изменениями.

Ключевые слова: хаос, гармонические колебания, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, пологие оболочки, метод конечных разностей, метод Бубнова – Галеркина.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №16-08-01108а и №16-01-00721а).

Введение

Оболочечные системы широко применяются в различных областях промышленности: в авиа- и ракетостроении, судостроении, строительстве, энергетике и др. Такие системы деформируются нелинейно. Исследования нелинейного деформирования тонкостенных оболочек имеют большую историю и не потеряли актуальности в наши дни. В статье О.Н. Попова [1] проводится анализ работ по расчету пластин и оболочек за пределом упругости с учетом неоднородности материала. На основании проведенного анализа делается вывод о том, что необходима разработка методов и алгоритмов, позволяющих вести расчет пластин и пологих оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей и с начальными несовершенствами формы срединной поверхности. Статья С.П. Иванова [2] посвящена расчету на динамическую устойчивость пластинчатых систем из физически нелинейных материалов. В качестве примера выполнен расчет на устойчивость П-образной оболочки. Публикации В.В. Петрова и И.В. Кривошеина [3, 4] посвящены методике расчета неоднородных по толщине цилиндрических панелей, основанной на двухшаговом методе последовательных нагружений и методе конечных разностей. Неоднородность задается в виде степенной функции [3] или по экспоненте [4]. Еще один итерационный подход к решению дважды нелинейных задач теории оболочек предложен в работе О.В. Старожиловой [5]. Внешний цикл решения, где вычисляются невязки, основан на методе переменных параметров упругости. Во внутреннем цикле решаются интегральные уравнения с использованием метода переменных направлений. Статья С.С. Гаврюшина [6] посвящена подходу, основанному на использовании метода продолжения решения по параметру в сочетании с приемом смены подпространства управляющих параметров. Методы Галеркина и Рунге – Кутты четвертого порядка используются для расчета собственных частот, нелинейного соотношения амплитудно-частотной характеристики и динамического отклика геометрически нелинейных, но физически линейных оболочек из функционально-градиентных материалов [7]. Отметим публикацию [8], в которой предложены смешанные методы конечных элементов для приближенных решений задач равновесия пологих оболочки в рамках геометрически и физически нелинейной теории, основанные на использовании вторых производных изгиба в качестве вспомогательных переменных. Установлены оценки точности приближенных решений. В статье [9] представлен численный анализ устойчивости стальной цилиндрической оболочки, для чего использована система COSMOS/M, базирующаяся на методе конечных элементов. Сравнительный анализ устойчивости оболочек позволил оценить влияние нескольких факторов на поведение конструкции как в геометрическом, так и в физическом нелинейных диапазонах. Исследовано влияние предела текучести на локализацию предельных точек на траектории равновесия и на расширение пластической зоны в оболочке. Статья [10] посвящена исследованию упругопластического деформирования цилиндрической оболочки при квазистатическом нагружении. В монографиях [11, 12] были обобщены результаты по хаотической динамике нелинейных механических конструкций, находящихся под действием полей различной природы. Построена математическая модель вынужденных колебаний сферической оболочки при действии знакопеременной поперечной нагрузки и разработан алгоритм решения системы нелинейных дифференциальных уравнений при помощи метода конечных разностей, матричного метода и метода Рунге – Кутты [13]. В статье [14] представлены новые методы и подходы для полу-

чения надежных и обоснованных результатов численного анализа нелинейных уравнений в частных производных на примере гибких оболочек.

На основании обзора публикаций можно сделать следующий вывод: математические модели нелинейных колебаний, вызванных поперечной гармонической нагрузкой, прямоугольных в плане геометрически и физически нелинейных пологих оболочек не изучались. Решению этой проблемы посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную в плане пологую оболочку с размерами a, b, h вдоль осей x_1, x_2, x_3 соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу оболочки в ее срединной поверхности. Оси x_1, x_2 параллельны сторонам оболочки, ось x_3 направлена внутрь кривизны. В указанной системе координат оболочка как трехмерная область Ω определяется так:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3 : (x_1, x_2, x_3) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]\}.$$

Через u_1, u_2 обозначим перемещения вдоль осей x_1, x_2 . При этом прогиб вдоль оси x_3 для удобства, в отличие от остальных перемещений, будем записывать как w . Пусть k_1 и k_2 – кривизны оболочки, $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$. Материал оболочки считается изотропным. Обозначим: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $K = E/[3(1 - 2\nu)]$ – модуль объемного сжатия, $G = E/[2(1 + \nu)]$ – модуль сдвига. Эти константы берутся для случая малых деформаций, когда физической нелинейностью можно пренебречь. Связь между деформациями и перемещениями в срединной поверхности записывается соотношениями Кармана. Принимается гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемости нормалей. Для случая малых упругопластических деформаций введем $\gamma(e_i) = 1 - \omega(e_i)$, где $\omega(e_i) = [3Ge_i - \sigma_i(e_i)]/(3Ge_i)$ – функция Ильюшина [15]. Следовательно, $\gamma(e_i) = \sigma_i(e_i)/(3Ge_i)$. Уравнения движения оболочки в безразмерном виде (черточки над безразмерными переменными для сокращения записи опущены):

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1 - \nu^2)} \nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F - \lambda^{-1} (\Delta M_{11})_{x_1 x_1} - \lambda (\Delta M_{22})_{x_2 x_2} - \\ - 2(\Delta M_{12})_{x_1 x_2} - q + \kappa(\ddot{w} + \epsilon \dot{w}) = 0, \\ \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L(w, w) - \lambda^{-1} (\Delta T_{22} - \nu \Delta T_{11})_{x_1 x_1} - \lambda (\Delta T_{11} - \nu \Delta T_{22})_{x_2 x_2} + \\ + 2(1 + \nu) (\Delta T_{12})_{x_1 x_2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\kappa = a^2 b^2 \rho / (Eh^6)$. Здесь слагаемые типа $\Delta(\cdot)$ являются поправками на физическую нелинейность (в случае линейного материала эти добавки равны нулю):

$$\begin{aligned} \Delta T_{ii} &= \frac{Eh}{1 + \nu} (\epsilon_{ii} P + \epsilon_{jj} Q) + \frac{Eh^2}{1 + \nu} (k_{ii} L + k_{jj} M) \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \\ \Delta T_{12} &= \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \epsilon_{12} R + \frac{Eh^2}{1 + \nu} k_{12} N, \\ \Delta M_{ii} &= \frac{Eh^2}{1 + \nu} (\epsilon_{ii} L + \epsilon_{jj} M) + \frac{Eh^3}{1 + \nu} (k_{ii} X + k_{jj} Y) \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \end{aligned}$$

$$\Delta M_{12} = \frac{Eh^2}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} N + \frac{Eh^3}{1+\nu} k_{12} Z, \quad (2)$$

имеют место следующие выражения для коэффициентов из (2):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} F_1 dx_3, & Q &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} F_2 dx_3, & R &= -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w dx_3, & L &= \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} F_1 x_3 dx_3, \\ M &= \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} F_2 x_3 dx_3, & N &= -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w x_3 dx_3, & X &= \frac{1}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} F_1 x_3^2 dx_3, & Y &= \frac{1}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} F_2 x_3^2 dx_3, \\ Z &= -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w x_3^2 dx_3, & F_1 &= \frac{1}{1-\mu} \gamma - \frac{1}{1-\nu}, & F_2 &= \frac{\mu}{1-\mu} \gamma - \frac{\nu}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

В линейном случае $F_1 = F_2 = 0$. Безразмерные переменные введены следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{a}, & \bar{x}_2 &= \frac{x_2}{b}, & \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{h}, & \bar{w} &= \frac{w}{h}, & \bar{F} &= \frac{F}{Eh^3}, & \lambda &= \frac{a}{b}, & \bar{t} &= \frac{t}{h^2}, \\ \bar{q} &= q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, & \bar{k}_1 &= k_1 \frac{a^2}{h}, & \bar{k}_2 &= k_2 \frac{b^2}{h}, & \bar{\Delta T}_{ij} &= \Delta T_{ij} \frac{ab}{Eh^3}, & \bar{\Delta M}_{ij} &= \Delta M_{ij} \frac{ab}{Eh^4}. \end{aligned}$$

В конкретных задачах приняты нулевые начальные условия $w|_{t=0} = 0$ и граничные условия вида: $w = 0, \partial w / \partial x_1 = 0, T_{11} = 0, \varepsilon_{22} = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$; $w = 0, \partial w / \partial x_2 = 0, T_{22} = 0, \varepsilon_{11} = 0$ при $x_2 = 0, x_2 = b$ [16].

Уравнения в частных производных (1) методом конечных разностей с аппроксимацией $O(h^2)$ и методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях по пространственным координатам сводятся к задачам Коши, которые решаются методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности был выбран на основании сопоставления с решениями, полученными методами Рунге – Кутты 2-го порядка (RK2), Рунге – Кутты – Фельберга 4-го порядка (rkf45), Кеш – Карпа 4-го порядка (RKCK), Рунге – Кутты – Дорманда – Принса восьмого порядка (rk8pd), неявными методами Рунге – Кутты 2-го порядка (rk2imp) и 4-го порядка (rk4imp). На каждом шаге по времени была использована простая итерационная процедура А.А. Ильюшина [15].

В результате численного эксперимента было установлено, что решения, полученные методом Бубнова – Галеркина ($N = 15$) и методом конечных разностей ($n = m = 26$), практически совпали как по характеру колебаний, так и по величине.

2. Численные результаты

Рассмотрим динамику диссипативной системы ($\varepsilon = 1$) в виде квадратной в плане ($\lambda = a/b = 1$) сферической оболочки, совершающей колебания под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $q = q_0 \sin \omega_p t$.

Оболочка изготовлена из сплава en aw 3003 [17] и имеет следующие геометрические и физические параметры: $a = b = 0,1$ м, $h = 0,89 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 70$ ГПа, $\nu = 0,33$, $\rho = 2730$ кг/м³, $a/h \approx 100$. Зависимость аппроксимирована билинейной диаграммой:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= Ee_i \text{ при } e_i \leq e_s, & \sigma_i &= Ee_s + E^*(e_i - e_s) \text{ при } e_i > e_s, \\ e_s &= 1,35 \cdot 10^{-3}, & E^*/E &= 0,4478. \end{aligned} \quad (4)$$

Для изучения характера колебаний была рассмотрена знакопеременная нагрузка с частотой, совпадающей с собственной линейной частотой колебаний оболочки, и частотами, находящимися в окрестностях собственной линейной частоты. Для оболочечных систем, когда нагрузка не зависит от времени, известно несколько динамических критериев потери устойчивости. Так, Б.Я. Кантор [18] в качестве динамического критерия условно принимает прохлопывание оболочки, если прогиб в центре достигает значения, большего относительной высоты оболочки $w \approx 2f$, где f – высота подъема оболочки над планом. А.С. Вольмир [19] связывает потерю устойчивости с быстрым ростом прогиба при незначительном изменении нагрузки. Шю, Сунг и Рот [20] отмечают, что в начале динамического процесса потери устойчивости при увеличении нагрузки время, необходимое для достижения значительной амплитуды прогиба, также растет до тех пор, пока не будет достигнуто некоторое значение нагрузки, выше которого рассматриваемое время начинает убывать. Нагрузка, при которой начинается обратный процесс изменения времени, необходимого для достижения первого максимума, считается критической.

В настоящей статье предлагается новая идея динамического критерия потери устойчивости для случая колебаний пологой оболочки на прямоугольном плане под действием поперечного знакопеременного нагружения. Для этого строятся зависимости «нагрузка–максимальный прогиб» и «нагрузка–интенсивность деформаций» на верхней поверхности оболочки при $x_1 = x_2 = 0,5$, $x_3 = -0,5$, а также зависимость «нагрузка–усилие». Все зависимости строились в одни и те же моменты времени, соответствующие максимальным прогибам оболочки. Анализы полученных результатов позволяют установить следующие закономерности. В тех случаях когда прогиб быстро растет при незначительном увеличении нагрузки, наблюдается убывание интенсивности деформаций. При этом точке перегиба функции $q_0(w)$ соответствует точка экстремального значения на графике $q_0(e_i)$. Как отмечалось, быстрый рост прогиба при незначительном увеличении нагрузки является динамическим критерием потери устойчивости. Можно считать, что указанные экстремальные точки функции $q_0(e_i)$ являются индикаторами качественной перестройки колебательного процесса оболочки. Оболочка в начальном своем состоянии под действием нагрузки имеет отрицательные усилия в срединной поверхности ($-T_1$ на рис. 1), при увеличении интенсивности нагрузки происходит смена знака усилий ($+T_1$ на рис. 1).

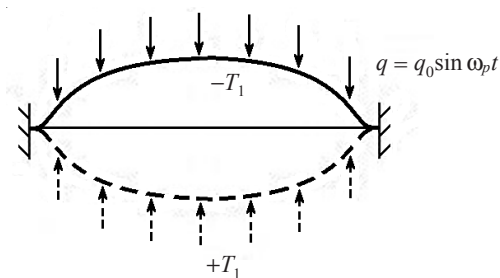


Рис. 1

Это свидетельствует о том, что произошел «хлопок» – потеря устойчивости, и оболочка начинает колебаться вокруг нового состояния равновесия. Эти три зависимости хорошо согласуются между собой и в совокупности дают критерий динамической потери устойчивости для оболочечных систем рассматриваемого типа с нагрузкой, зависящей от времени.

Рассмотрим типичный пример для скользящей заделки при $k_1 = k_2 = 12$, $\omega_p \approx 23$, $\omega_0 \approx 25,2$. При величине нагрузки $q_0 = 250$ (точка I на рис. 2) происходит бифуркация периодических колебаний, в результате которой наступают колебания 3-го типа. При этом на графике зависимости $W_{\max}(q_0)$ появляется точка перегиба, на графике $e_i(q_0)$ наблюдается экстремальная точка, а на зависимости $T_1(q_0)$ происходит смена знака с минуса на плюс (см. рис. 2). Оболочка, меняя режим колебаний сначала на квазипериодический ($q_0 = 410$), а затем на хаотический ($q_0 = 520$), продолжает находиться в новом равновесном состоянии.

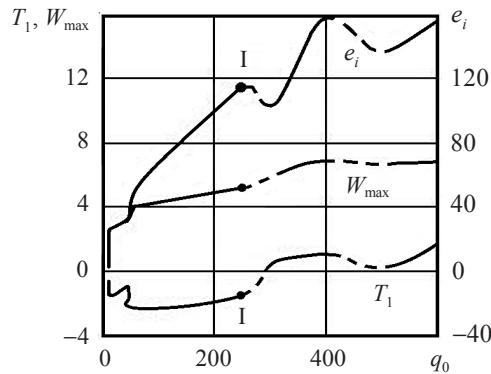
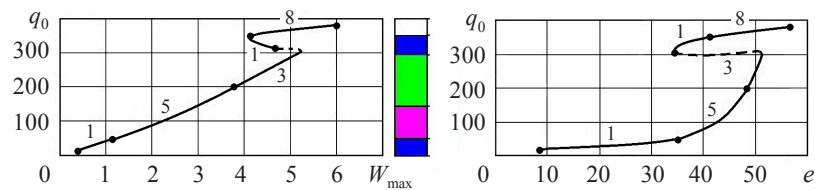


Рис. 2

Существуют разные сценарии перехода от гармонических колебаний к хаотическим.

Задача 1. Рассмотрим оболочку с безразмерным параметром кривизны $k_1 = k_2 = 18$ и частотой вынуждающих колебаний $\omega_p = 35$ (рис. 3). На рис. 3 и 4 использованы следующие обозначения: 1 – периодические колебания (■); 2 – периодические колебания в режиме бифуркации удвоения периода (■); 3 – периодические колебания в режиме бифуркации утроения периода (■); 4 – периодические колебания в режиме двойной бифуркации удвоения периода (■); 5 – двухчастотные квазипериодические колебания (■); 6 – трехчастотные квазипериодические колебания (■); 7 – режим перемежаемости (5-го типа) (■); 8 – хаотические колебания (□).



Распределение интенсивности деформаций по плану оболочки

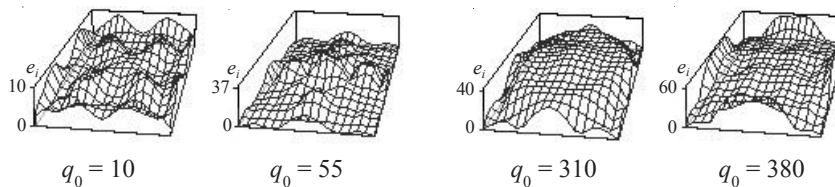


Рис. 3

При $q_0 = 20$ начинается переход периодических колебаний в квазипериодические (во временном ряде наблюдаются два типа колебаний), а при $q_0 = 50$ колебания становятся квазипериодическими с двумя основными частотами на всем прослеживаемом интервале времени. Такой режим сохраняется до $q_0 = 200$, когда во временном ряде появляются участки периодических колебаний 3-го типа. Постепенно этот режим разрушается, и к $q_0 = 350$ временной ряд полностью состоит из периодических колебаний 1-го типа. Происходит уменьшение амплитуды колебаний, интенсивность деформации резко снижается. При $q_0 = 380$ система переходит в состояние хаоса. При каждой смене режима колебаний происходит перераспределение зон максимальной интенсивности деформаций.

Задача 2. Рассмотрим оболочку с безразмерным параметром кривизны $k_1 = k_2 = 24$ и частотой вынуждающих колебаний $\omega_p = 44$. Периодические колебания сопровождаются двумя бифуркациями удвоения периода ($q_0 = 67$ и $q_0 = 100$). Во время первой бифуркации прогибы возрастают постепенно, а интенсивность деформаций очень резко (рис. 4).

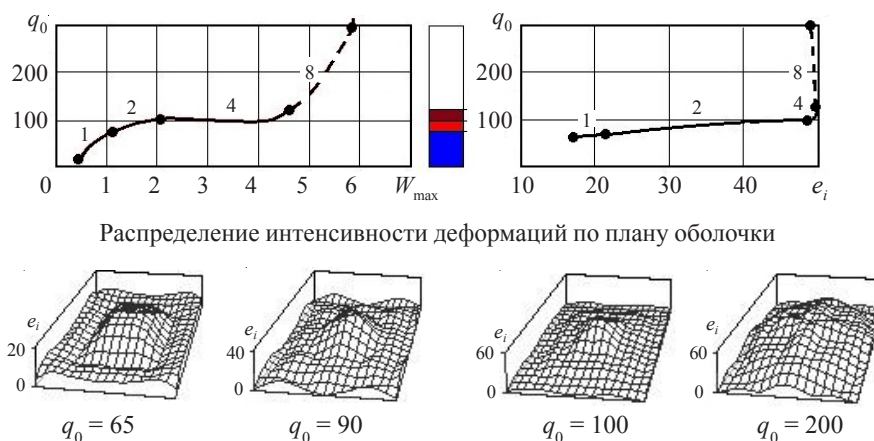


Рис. 4

При второй бифуркации наблюдается обратная картина: интенсивность деформаций прекращает свой рост, а прогибы возрастают в два раза. При дальнейшем увеличении нагрузки ($q_0 = 120$) колебания становятся хаотическими: во временном ряде не наблюдается какой-либо регулярности.

Заключение

На основании анализа зависимостей «нагрузка–прогиб», «нагрузка–интенсивность деформаций» и «нагрузка–усилие» сформулирован динамический критерий потери устойчивости для оболочечных систем с зависящей от времени нагрузкой. В предлагаемом критерии важным является знак усилия в срединной поверхности: смена этого знака характеризует выпучивание оболочки. В критических точках происходит качественная перестройка формы колебаний системы.

Установлено, что переходные процессы зависят от кривизны оболочки, частоты вынуждающих колебаний и некоторых других параметров, то есть единого сценария перехода нет. При этом составными элементами полученных сценариев являются схемы перехода к хаосу, известные из общей теории динамических систем.

Для зависимостей «нагрузка–прогиб», «нагрузка–интенсивность деформаций»

рассмотрены случаи, когда интенсивность деформаций e_i уменьшается, а прогиб w растет, то есть происходит рост прогиба при разгрузке системы; когда интенсивность деформаций растет и прогиб увеличивается; когда при росте интенсивности деформаций происходит уменьшение функции прогиба; когда интенсивность деформаций e_i уменьшается, а прогиб w не изменяется.

Список литературы

1. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Трепутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости. *Вестник ТГАСУ*. 2013. №4. С. 127–142.
2. Иванов С.П., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. №4. С. 9–18.
3. Петров В.В., Кривошеин И.В. Влияние неоднородности материала при расчете физически и геометрически нелинейных пологих оболочек на прочность и устойчивость. *ACADEMIA. Архитектура и строительство*. 2014. №4. С. 109–112.
4. Петров В.В. Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей. *ACADEMIA. Архитектура и строительство*. 2016. №1. С. 112–117.
5. Старожилова О.В. Численный метод определения состояния неоднородных оболочек. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. 2015. №1. С. 10–13.
6. Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. №1. С. 115–130.
7. Tran Quoc Quan, Nguyen Dinh Duc. Nonlinear vibration and dynamic response of shear deformable imperfect functionally graded double-curved shallow shells resting on elastic foundations in thermal environments. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39. No 4. P. 437–459.
8. Karchevsky M. Error estimations of mixed finite element methods for nonlinear problems of shallow shell theory. *Mesh Methods for Boundary-value Problems and Applications: 11th International Conference. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2016. **158**. P. 012048. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012048.
9. Marcinowski J. Stability of shells in the conditions of plastic flow of material. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2006. Vol. XXVIII. No 2–4. P. 31–37.
10. Artemyeva A., Bazhenov V., Zhegalov D., Ivanov V., Kibec A. The experimental and theoretical analysis of high strains and limit states of elastoplastic cylindrical shells under the complex loading of pressure and torsion. *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86. Iss. 11. P. 1805–1813.
11. Krysko V.A., Awrejcewicz J. *Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells*. Springer, 2003. 428 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. *Thermo-dynamics of Plates and Shells*. Springer, 2007. 777 p.
13. Мицкевич С.А., Папкина И.В., Захарова А.А., Крысько А.В. Нелинейная динамика сферических гидроакустических приборов, применяемых в нефтегазовой промышленности. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2016. Т. 327. №11. С. 17–23.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Krysko V.A., Krylova E.Yu., Mitskievich S.A., Papkova I.V., Yakovleva T.V., Zakharov V.M., Dobriyan V. Turbulent phenomena in flexible plates and shells. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2014. **12**. P. 49–76.
15. Ильюшин А.А. *Пластичность*. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
16. Корнишин М.С. *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. М.: Наука, 1964. 192 с.
17. *Handbook of Advanced Materials: Enabling New Designs*. J.K. Wessel (Ed. in chief), J.R. Kissell, S.G. Pantelakis, G.N. Haidemenopoulos (Eds). Published Online: 8 Jun. 2004. DOI: 10.1002/0471465186.ch9

18. Кантор Б.Я. *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*. Киев: Наукова думка, 1971. 136 с.
19. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
20. Shiau A.C., Soong T.T., Roth R.S. Dynamic buckling of conical shells with imperfections. *AIAA Journal*. 1974. Vol. 12. No 6. P. 755–760.

References

1. Popov O.N., Malinovskiy A.P., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Sostoyanie voprosa po raschetu neodnorodnykh elementov konstruksiy za predelom uprugosti [The state of the question on the calculation of the heterogeneous elements of structures beyond the elastic limit]. *Vestnik TGASU [Scientific Journal Vestnic of TSUAB]*. 2013. No 4. P. 127–142 (In Russian).
2. Ivanov S.P., Ivanova A.S. Dinamicheskaya ustoychivost fizicheski nelineynykh plastychnykh sistem [Dynamic stability of physically nonlinear plate systems]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]*. 2014. No 4. P. 9–18 (In Russian).
3. Petrov V.V., Krivoshein I.V. Vliyaniye neodnorodnosti materiala pri raschete fizicheski i geometricheski nelineynykh pologikh obolochek na prochnost i ustoychivost [The influence of material inhomogeneity in the calculation of the physically and geometrically nonlinear shallow shells for strength and stability]. *ACADEMIA. Arkhitektura i stroitelstvo [ACADEMIA. Architecture and Construction]*. 2014. No 4. P. 109–112 (In Russian).
4. Petrov V.V. Raschet neodnorodnykh po tolshchine obolochek s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynostey [Calculation of inhomogeneous across the thickness of shells taking into account physical and geometric nonlinearities]. *ACADEMIA. Arkhitektura i stroitelstvo [ACADEMIA. Architecture and Construction]*. 2016. No 1. P. 112–117 (In Russian).
5. Starozhilova O.V. Chislennyy metod opredeleniya sostoyaniya neodnorodnykh obolochek [Numerical method for determining the state of inhomogeneous shells]. *Aktualnye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk [Actual Problems of Humanitarian and Natural Sciences]*. 2015. No 1. P. 10–13 (In Russian).
6. Gavryushin S.S. Chislennoye modelirovaniye protsessov nelineynogo deformirovaniya tonkikh uprugikh obolochek [Numerical modeling of nonlinear deformation of thin elastic shells]. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody [Mathematical Modeling and Computational Methods]*. 2014. No 1. P. 115–130 (In Russian).
7. Tran Quoc Quan, Nguyen Dinh Duc. Nonlinear vibration and dynamic response of shear deformable imperfect functionally graded double-curved shallow shells resting on elastic foundations in thermal environments. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39. No 4. P. 437–459.
8. Karchevsky M. Error estimations of mixed finite element methods for nonlinear problems of shallow shell theory. *Mesh Methods for Boundary-value Problems and Applications: 11th International Conference. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2016. **158**. P. 012048. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012048.
9. Marcinowski J. Stability of shells in the conditions of plastic flow of material. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2006. Vol. XXVIII. No 2–4. P. 31–37.
10. Artemyeva A., Bazhenov V., Zhegalov D., Ivanov V., Kibec A. The experimental and theoretical analysis of high strains and limit states of elastoplastic cylindrical shells under the complex loading of pressure and torsion. *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86. Iss. 11. P. 1805–1813.
11. Krysko V.A., Awrejcewicz J. *Nonclassical thermoelastic problems in nonlinear dynamics of shells*. Springer, 2003. 428 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. *Thermo-dynamics of Plates and Shells*. Springer, 2007. 777 p.
13. Mitskevich S.A., Papkova I.V., Zakharova A.A., Krysko A.V. Nelineynaya dinamika sfericheskikh gidroakusticheskikh priborov, primenyaemykh v neftegazovoy promyshlennosti [Nonlinear dynamics of spherical hydro-acoustic equipment used in the oil and gas industry]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering]*. 2016. Vol. 327. No 11. P. 17–23 (In Russian).
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Krysko V.A., Krylova E.Yu., Mitskevich S.A., Papkova I.V.,

Yakovleva T.V., Zakharov V.M., Dobriyan V. Turbulent phenomena in flexible plates and shells. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2014. **12**. P. 49–76.

15. Ilyushin A.A. *Plastichnost [Plasticity]*. Moscow. Gostekhizdat Publ. 1948. 376 p. (In Russian).

16. Kornishin M.S. *Nelineynye zadachi teorii plastin i plogikh obolochek i metody ikh resheniya [Nonlinear Problems of Theory of Plates and Shallow Shells and Methods of their Solution]*. Moscow. Nauka Publ. 1964. 192 p. (In Russian).

17. *Handbook of Advanced Materials: Enabling New Designs*. J.K. Wessel (Ed. in chief), J.R. Kissell, S.G. Pantelakis, G.N. Haidemenopoulos (Eds). Published Online: 8 Jun. 2004. DOI: 10.1002/0471465186.ch9.

18. Kantor B.Ya. *Nelineynye zadachi teorii neodnorodnykh plogikh obolochek [Nonlinear Problems in the Theory of Inhomogeneous Shallow Shells]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1971. 136 p. (In Russian).

19. Volmir A.S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1972. 432 p. (In Russian).

20. Shiau A.C., Soong T.T., Roth R.S. Dynamic buckling of conical shells with imperfections. *AIAA Journal*. 1974. Vol. 12. No 6. P. 755–760.

DYNAMIC STABILITY OF SHALLOW SHELLS ON THE RECTANGULAR PLAN, TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRIC AND PHYSICAL NONLINEARITY

Mitskevith S.A.¹, Krysko A.V.^{1,2}, Zhigalov M.V.¹, Krysko V.A.¹

¹*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

²*Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

Proposed and developed a dynamic criterion of stability loss of rectangular spherical shells under the action of time-varying lateral loads taking into account two types of nonlinearities – geometric and physical. A mathematical model for thin shallow shells, based on the kinematic hypotheses of the Kirchhoff – Love. Geometric nonlinearity is accounted on the basis of the ratios of T. Karman. Physical nonlinearity is described by the deformation theory of plasticity by A.A. Ilyushin. The developed approach to the calculation of the dynamics of shells under time-varying lateral load, which is based on the method of finite differences of second order accuracy, the method of Bubnov – Galerkin in higher approximations and Runge – Kutta of fourth order accuracy. The results obtained according to the methods of finite differences and the method of Bubnov–Galerkin fit together well. For a number of geometric parameters of the built area of the character of the oscillation depending on the amplitude of the driving load and frequency. Analysed scenarios of transition of harmonic oscillations to chaotic, obtained for various geometrical and physical parameters. It is noted that a single script is not, and it depends on the control parameters. Perhaps the existence of three classic scenarios (Feigenbaum, Ruelle – Takens of Newhouse and the Aid of Mandevilla) with minor modifications.

Keywords: chaos, harmonic oscillations, geometrical nonlinearity, physical nonlinearity, shallow shells, finite difference method, method of Bubnov – Galerkin.