

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК*

© 2017 г. Капустин С.А.¹, Чурилов Ю.А.¹, Горохов В.А.¹,
Рябов А.А.², Романов В.И.², Плакунов Д.А.²

¹Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
²ООО «Саровский инженерный центр», Нижегородская обл., Дивеевский район,
Сатис, Российская Федерация

chyuan@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.04.2017

Рассматриваются вопросы эффективности применения моделей твердотельных конечных элементов в задачах расчета оболочек. Представлен краткий обзор работ, посвященных вопросам применения метода конечных элементов в задачах расчета тонкостенных конструкций. Сформулированы общие требования к координатным функциям в методе конечных элементов при исследовании тонкостенных оболочек общего вида. Рассмотрены основные трудности формулировки эффективных моделей конечных элементов для решения задач теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа – Лява и сдвиговых моделей типа Тимошенко. Установлены причины низкой эффективности для анализа оболочек традиционно используемых твердотельных моделей конечных элементов, рассмотрены возможные пути их преодоления. Проведены исследования по оценке влияния параметров конечно-элементной дискретизации на точность расчета оболочек различной относительной толщины при использовании трех различных моделей твердотельных элементов, позволившие определять допустимые значения параметров конечно-элементной дискретизации оболочек для всех рассмотренных моделей элементов в зависимости от допускаемой погрешности определения напряжений. Проведены исследования сходимости решений на основе ряда реализованных в современных программных комплексах моделей конечных элементов в локальных зонах сопряжения цилиндрической оболочки с фрагментами конструкций различной жесткости.

Ключевые слова: твердотельные конечные элементы, оболочки, схемы дискретизации.

Введение

В связи с широким использованием оболочек в качестве основных фрагментов современных конструкций вопросы развития метода конечных элементов (МКЭ) для решения задач теории оболочек и реализации наиболее эффективных моделей

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-19-10237).

конечных элементов (КЭ) в современных средствах компьютерного моделирования являются весьма актуальными. Многие основанные на методе конечных элементов современные комплексы программ [1–4] обладают развитыми библиотеками конечных элементов, позволяющими решать широкий круг прикладных проблем. Однако применение этих средств для решения практических задач требует тщательной верификации компьютерных моделей, выбора оптимальных типов КЭ и схем дискретизации исследуемых объектов. Поэтому вопросы проведения исследований по оценке эффективности конкретных моделей КЭ, используемых для расчета оболочек, оценке влияния параметров дискретизации исследуемых объектов на точность и сходимость численных решений представляются весьма важными как в научном, так и в прикладном отношении [5–10].

В настоящей статье представлен краткий обзор работ, посвященных вопросам применения МКЭ в задачах расчета тонкостенных конструкций. Сформулированы общие требования к координатным функциям в МКЭ при исследовании тонкостенных оболочек общего вида. Рассмотрены основные трудности формулировки эффективных моделей КЭ для решения задач теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа – Лява и сдвиговых моделей типа Тимошенко. Установлены причины низкой эффективности традиционно используемых твердотельных моделей КЭ при анализе оболочек, рассмотрены возможные пути их преодоления.

Проведены исследования по оценке влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета оболочек различной относительной толщины при использовании трех различных моделей твердотельных элементов. Получены зависимости допустимых значений параметров КЭ-дискретизации оболочек различной относительной толщины для всех рассмотренных моделей элементов от допускаемой погрешности определения напряжений.

Проведены исследования сходимости решений на основе ряда реализованных в современных программных комплексах моделей КЭ в локальных зонах сопряжения цилиндрической оболочки с фрагментами конструкций различной жесткости. Результаты показали, что за пределами локальной зоны параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки, хорошо согласуются с аналогичными величинами на основе аналитического решения, а в локальной зоне напряжения в наиболее нагруженной точке при сгущении сетки постоянно возрастают, демонстрируя отсутствие сходимости численного решения к соответствующему решению на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

1. Особенности применения МКЭ в задачах расчета тонкостенных оболочек

Вопросам применения МКЭ в задачах расчета тонкостенных конструкций, состоящих из фрагментов тонкостенных пластин и оболочек, посвящено большое количество публикаций отечественных и зарубежных авторов [10–18]. В монографиях [10–13] сформулированы общие требования к координатным функциям в МКЭ при исследовании задач изгиба пластин и деформации тонкостенных оболочек общего вида. Основные трудности формулировки эффективных моделей КЭ для решения задач теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа – Лява и сдвиговых моделей типа Тимошенко рассмотрены в [12, 13, 16–18]. Установлены причины низкой эффективности традиционно используемых твердотельных моделей КЭ и возможные пути их преодоления. Применительно к задачам изгиба балок и тон-

ких пластин указанные вопросы достаточно подробно рассмотрены в [4, 12–15, 19]. При исследовании на основе МКЭ оболочек в рамках соотношений прикладных теорий (с использованием допущений Кирхгофа – Лява, сдвиговых моделей Тимошенко) возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью аппроксимации дискретными элементами гладких поверхностей исследуемых оболочек [12].

Действительно, при задании функций в локальной криволинейной системе координат к прежним требованиям гладкости для функций поперечных перемещений ($W \in C^{(1)}$) добавляются условия гладкости для функций тангенциальных перемещений ($u_i \in C^{(0)}$). При задании геометрии элемента оболочки общего вида повышаются требования к гладкости радиуса-вектора \vec{r} , описывающего срединную поверхность оболочки, и всех его производных до второго порядка включительно ($\vec{r} \in C^{(2)}$).

Кроме этого, в связи с появлением членов неполиномиального вида, обусловленных преобразованием функций из декартовой системы в локальную, при жестких смещениях таких элементов в них возникают деформации, которые не могут быть точно представлены простейшими полиномами. Фактически это приводит к нарушению условий полноты функций, а именно к невозможности представления нулевой деформации при смещении элемента как жесткого целого и, как показали практические расчеты, к значительному ухудшению сходимости.

Так же, как в случае изгибаемых пластин, нарушение условий полноты для КЭ-оболочек может произойти при неспособности аппроксимирующих функций точно воспроизвести состояние чистого изгиба, известное в литературе как «мембранное запирание». Если в элементе не описывается точно состояние чистого изгиба, то возникающие при этом погрешности в определении мембранных членов дают дополнительный вклад в значение энергии деформации такого же порядка, что и значения энергии изгиба, что приводит к снижению сходимости КЭ-решений.

В первых работах, посвященных решению на основе МКЭ практических задач расчета оболочек, широкое распространение получили плоские элементы, полученные путем объединения матриц жесткости изгиба с матрицей жесткости плосконапряженного состояния. Связь между изгибными и тангенциальными полями осуществлялась при этом за счет соединения элементов под углами, соответствующими аппроксимации искривленной поверхности плоскими «чешуйками». Такие элементы удовлетворяли условиям жестких смещений, однако приводили к ошибкам геометрической дискретизации, замедляющей сходимость решений. Недостатки этих элементов проявлялись в необходимости достаточно мелкого разбиения для удовлетворительной аппроксимации исследуемой поверхности оболочки, а также в нарушении условий совместности за счет разного порядка аппроксимации функций поперечных и тангенциальных перемещений.

Для устранения последнего недостатка порядок полиномов для тангенциальных и поперечных перемещений должен быть одинаков, что приводит к резкому увеличению числа степеней свободы элементов и снижению эффективности расчетов. Поэтому наивысшая эффективность применения плоских КЭ в задачах расчета оболочек может быть достигнута при использовании возможно более простых элементов с одинаковым порядком полиномов, которые применяются для описания всех компонент перемещений. Примером такого элемента может служить плоский треугольный КЭ оболочки, впервые предложенный Германном и развитый в [20]

для решения задач термопластичности тонкостенных пластинчато-оболочечных конструкций. Тем не менее даже самые удачные плоские элементы не могут заменить искривленных конечных элементов при анализе гладких оболочек общего вида.

Возвращаясь к вопросу о применении искривленных КЭ оболочек, необходимо отметить, что для устранения негативных свойств элементов, связанных с неспособностью точно воспроизводить деформации при жестких смещениях элемента, рядом авторов делались попытки включения в функции, аппроксимирующие перемещения, форм, соответствующих жестким смещениям элементов, или повышения порядка аппроксимирующих полиномов для всех компонент перемещений. Однако во всех перечисленных выше элементах либо условие совместности, либо условие отсутствия деформаций при жестких смещениях, либо оба этих условия удовлетворялись приближенно.

Точное удовлетворение названных условий удалось осуществить в изопараметрических элементах оболочки при аппроксимации проекций искомого вектора перемещений \bar{u} и радиуса-вектора срединной поверхности \bar{r} на оси декартовой системы координат полиномами одинаковой степени. Ужесточение условия гладкости тангенциальных компонент перемещений ($u_i \in C^{(1)}$) компенсируется снижением требований к гладкости геометрии ($\bar{r} \in C^{(1)}$) и точным удовлетворением условий жестких смещений. Примером такой формулировки модели может служить изопараметрический треугольный элемент оболочки общего вида, в котором координаты срединной поверхности, так же как и все компоненты перемещений, аппроксимируются полными полиномами 5-й степени. Однако, несмотря на высокую точность, такой элемент представляется слишком сложным для практических расчетов. Значительным недостатком этого элемента, как, впрочем, и других высокоточных элементов, является наличие в качестве степеней свободы вторых производных, которые могут претерпевать разрыв при исследовании оболочек со ступенчато меняющейся толщиной вдоль границ изменения свойств материалов, а также при анализе узлов пересечения оболочечных конструкций.

Перечисленных выше трудностей построения координатных функций, используемых в КЭ пластин и оболочек, можно избежать, если рассматривать исследуемую пластину или оболочку как пространственный трехмерный объект и использовать для моделирования поведения такого объекта обычные твердотельные КЭ.

Действительно, если функции перемещений таких элементов строятся в глобальной декартовой системе координат, то требования полноты координатных функций сводятся к требованию, чтобы полиномиальные выражения, аппроксимирующие функции перемещений, содержали отличные от нуля коэффициенты при всех слагаемых, определяющих полный полином не ниже первой степени, что не вызывает каких-либо затруднений при формулировке конкретных моделей.

Для выполнения необходимых условий гладкости твердотельных элементов достаточно обеспечить непрерывность функций (а не их производных) вдоль границ элементов, что также не вызывает каких-либо затруднений. Тем не менее результаты многочисленных исследований, посвященных применению твердотельных КЭ для анализа поведения пластин и оболочек, показали, что аппроксимация искомым функциям неполными полиномами невысоких порядков приводит к появлению ошибок в представлении компонент сдвиговых деформаций, особенно заметных при уменьшении относительной толщины элемента. Аналогичная ситуация может также происходить в искривленных элементах за счет погрешности пред-

ставления мембранных компонент деформации. Результаты проведенных исследований также показали, что повышение порядка аппроксимирующих функций в элементе позволяет последовательно улучшать показатели точности КЭ-решений, однако такой путь порождает ряд неудобств и трудностей вычислительного характера.

Существует много других подходов, позволяющих повысить эффективность применения оболочечных элементов без существенного повышения их сложности: способ двойной аппроксимации (СДА) [21], моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [11] и метод сокращенного интегрирования [10, 12, 14–16], первоначально используемый для корректировки сдвиговой части энергии деформации и распространенный в дальнейшем на все другие ее составляющие, если такая корректировка может улучшить свойства рассматриваемого элемента.

Сопоставление метода сокращенного интегрирования с СДА и МСКЭ позволяет трактовать его как некоторую общую технологию корректировки свойств конечных элементов без изменения принятых координатных функций и соотношений в элементе путем выбора подходящих точек, используемых для численного интегрирования энергии деформации.

Исходной предпосылкой для выбора точек послужил факт [14, 16, 22], что для каждого типа КЭ существуют точки, в которых деформации и напряжения вычисляются наиболее точно. Использование таких точек в качестве точек интегрирования позволяет наиболее точно приближать поведение реального объекта при условии точного интегрирования всех производных от полных полиномов, входящих в аппроксимирующий полином, и точного интегрирования объема элемента [23, 24]. Кроме того, численное интегрирование не должно приводить к сингулярности разрешающей системы алгебраических уравнений за счет возможности появления в элементах форм перемещений, соответствующих нулевой энергии деформации.

Для конечных элементов, функции которых аппроксимируются полными полиномами, точки наилучшего определения деформаций совпадают с точками, обеспечивающими точное интегрирование всех членов энергии деформации. В случае использования неполных полиномов (двумерные и пространственные КЭ сирендипова типа) такие точки совпадают с корнями полиномов Лежандра, степень которых определяется степенью полного полинома, используемого для аппроксимации функций в элементе [22]. Эти точки совпадают с точками квадратур Гаусса, по которым точно интегрируется часть энергии деформации, определяемая полными полиномами, входящими в выражения для аппроксимации функций в элементе. При этом сохраняется максимально возможный для рассматриваемых элементов порядок сходимости, если в элементах не нарушаются условия геометрической аппроксимации [23, 24].

Применение такого способа «улучшенного» интегрирования в общем случае может привести к появлению сингулярности матрицы жесткости системы за счет появления форм перемещений, обладающих нулевой энергией деформации. При использовании квадратичных элементов сирендипова типа подобных проблем практически не возникает, так как сингулярность не проявляется в системах, состоящих более чем из одного элемента, да и в одном элементе исчезает при задании кинематических граничных условий. Поэтому с применением схемы улучшенного интегрирования достигается наибольший эффект именно для квадратичных элементов, используемых при решении различных двумерных и трехмерных задач, а также задач теории оболочек.

Исходя из представленных выше результатов исследований, можно сформулировать некоторые общие рекомендации по выбору твердотельных моделей КЭ, выполнение которых приведет к наибольшей вычислительной эффективности при расчете тонкостенных пластин и оболочек.

В частности, для того чтобы при расчете тонкостенных конструкций твердотельный КЭ мог конкурировать по эффективности с элементами оболочек на основе прикладных теорий, он должен обеспечивать выполнение рассмотренных выше условий непрерывности и полноты координатных функций и удовлетворять условиям, сформулированным в [19] для твердотельных КЭ изгибаемых пластин:

– точно описывать простейшие формы перемещений, определяемые соотношениями прикладных теорий, при расположении в один слой по толщине оболочки (пластины);

– обеспечивать высокую точность и сходимостъ решений при использовании элементов, линейные размеры которых превышают толщину оболочки, иначе говоря, при соотношениях сторон того же порядка, что и в соответствующих тонкостенных элементах.

2. Оценка влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС тонкостенных оболочек с использованием твердотельных элементов

По аналогии с [19], где рассмотрены вопросы эффективности применения моделей твердотельных КЭ для решения задач изгиба балок и пластин, в настоящей статье область изучения влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС тонкостенных оболочек ограничивается видами НДС, соответствующими соотношениям классических гипотез Кирхгофа – Лява: безмоментного состояния, характеризуемого постоянством или медленным изменением исследуемых функций (статических, кинематических), и моментного состояния, характеризуемого быстрым изменением и затуханием последних. В общем случае квазистатического нагружения результирующее НДС оболочки включает в себя оба этих вида и при решении задач в упругой постановке может быть получено в результате суперпозиции последних.

В качестве типовой задачи, выбранной для иллюстрации влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС тонкостенных оболочек, исследуемых в рамках соотношений классических гипотез Кирхгофа – Лява, рассмотрим задачу расчета круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного внутреннего давления интенсивности q . Оболочка имеет размеры: длина L вдоль оси x , радиус срединной поверхности R , толщина стенки H вдоль оси y по нормали к срединной поверхности.

Левый торец оболочки ($x = 0$) жестко заделан (от вертикальных перемещений W закреплена точка $z = -H/2$), правый торец оболочки ($x = L$) свободен.

Особенность такой задачи заключается в том, что в окрестности заделки цилиндра реализуется моментное состояние, а в окрестности правого торца – чисто безмоментное состояние. Поэтому для выполнения поставленной задачи при проведении расчетов контролировались значения вертикальных перемещений W_b и окружных напряжений σ_b на свободном торце оболочки (безмоментная зона), максимальные значения осевых напряжений σ_M в заделке на внутренней поверхности цилиндра ($z = -H/2$), а также максимальные значения вертикальных перемещений W_m в

средней части цилиндра ($0 < x < L$). Контролировались также относительные погрешности указанных величин:

$$\Delta W = \frac{W_m - W_0}{W_0}, \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma_M - \sigma_0}{\sigma_0},$$

где W_0 и σ_0 – соответствующие значения перемещений и напряжений, полученных на основе аналитического решения С.П. Тимошенко [6] в рамках соотношений классических гипотез Кирхгофа – Лява.

Численные решения задач, для которых проводилось сравнение перечисленных величин с результатами аналитического решения, строились для трех вариантов оболочек, имеющих различную относительную толщину, характеризуемую параметром $t = H/R$:

$t = 1/50$, $L = 70,0$ мм, $H = 2,0$ мм (вариант cl);

$t = 1/25$, $L = 100,0$ мм, $H = 4,0$ мм (вариант cn);

$t = 1/10$, $L = 200,0$ мм, $H = 10,0$ мм (вариант cm).

Расчеты проводились на основе применения следующих моделей КЭ:

«182» – билинейный четырехузловой КЭ осесимметричного тела с полным интегрированием функций (типа PLANE 182 в ВК ANSYS);

«186» – квадратичный двадцатиузловой пространственный КЭ с полным интегрированием функций (численные результаты получены для альтернативного двадцатиузлового КЭ (SOLID 186 в ВК ANSYS);

«02» – квадратичный восьмиузловой КЭ осесимметричного тела с использованием схемы улучшенного интегрирования [4] (типа 02 в ВК УПАКС).

Для выявления влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС тонкостенных оболочек для каждого варианта оболочки рассмотрен ряд вариантов сеточного разбиения расчетной области регулярной сеткой $n \times m$, где n , m – число КЭ оболочки вдоль осей y и x соответственно. Кроме этого, каждому расчетному варианту ставился в соответствие параметр $\lambda = l/h$, характеризующий отношение длины элемента к его ширине.

Для всех рассмотренных задач и моделей КЭ установлено, что независимо от принятой меры допустимой погрешности нахождения максимальных перемещений $[\Delta W]$ и напряжений $[\Delta \sigma]$ ограничения применимости моделей КЭ определяются погрешностью напряжений в моментной зоне (на внутренней поверхности защемленного торца). На основе анализа полученных результатов были сделаны выводы, которые могут быть использованы при составлении рекомендаций по выбору параметров дискретизации оболочек с применением твердотельных КЭ:

– Для всех рассмотренных моделей КЭ напряжения в окрестности защемленного торца оболочки монотонно возрастают по мере сгущения сетки и при определенных значениях параметра сгущения превышают значения напряжений, полученных на основе аналитического решения в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, за счет эффектов концентрации напряжений, которые в рамках настоящей статьи не рассматриваются. Поэтому при оценке применимости расчетных вариантов дискретизации необходимо учитывать не абсолютную разницу погрешности напряжений, а варианты, для которых $\sigma \leq [\Delta \sigma]$.

– В безмоментной зоне значения перемещений и напряжений, вычисленные на основе всех рассмотренных моделей КЭ и вариантов дискретизации оболочки, хорошо согласуются с аналогичными значениями точного решения теории оболочек.

– При фиксированных значениях параметров дискретизации погрешность определения напряжений $\Delta\sigma$ растет с увеличением относительной толщины оболочки t для всех рассмотренных моделей КЭ.

– При фиксированных значениях относительной толщины оболочки t погрешность определения напряжений $\Delta\sigma$ растет с увеличением относительной длины элементов $\lambda = l/h$ для всех рассмотренных моделей КЭ.

– При фиксированных значениях параметров дискретизации погрешность определения напряжений $\Delta\sigma$ на основе четырехузлового КЭ (элемент «182») оказывается значительно более высокой, чем для КЭ с квадратичной аппроксимацией функций (элементы «02» и «186»), для всех рассмотренных значений относительных толщин t .

– При малых значениях относительной длины элемента $\lambda \leq 1,5$ погрешности определения напряжений $\Delta\sigma$ на основе элементов «02» и «186» отличаются незначительно, однако с увеличением относительной длины элементов погрешности определения $\Delta\sigma$ для элементов «186» резко возрастают.

На рис. 1–3 приведены графики зависимости погрешности $\Delta\sigma$ от относительной длины элементов $\lambda = l/h$ при различных отношениях R/H (обозначенных цифрами) и различном числе разбиений толщины оболочки (обозначенных цифрами в скобках) для моделей «02», «182» и «186» соответственно.

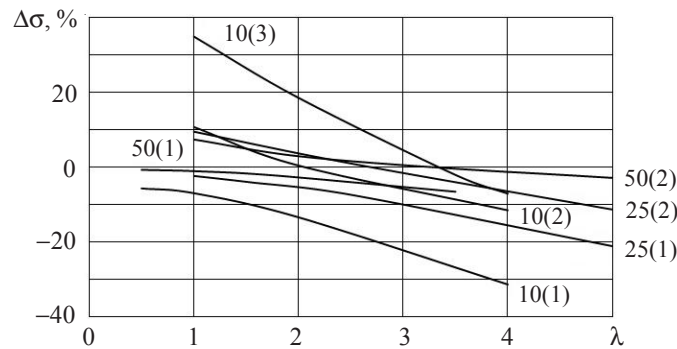


Рис. 1

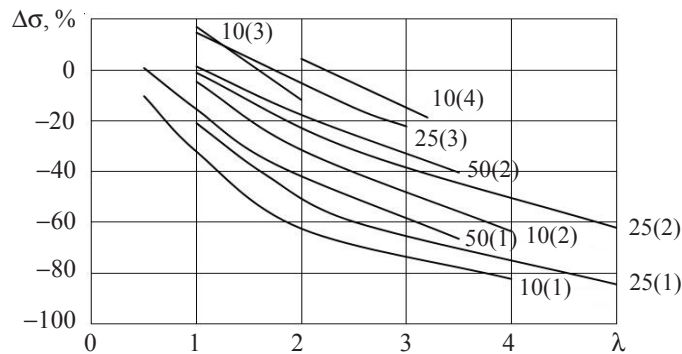


Рис. 2

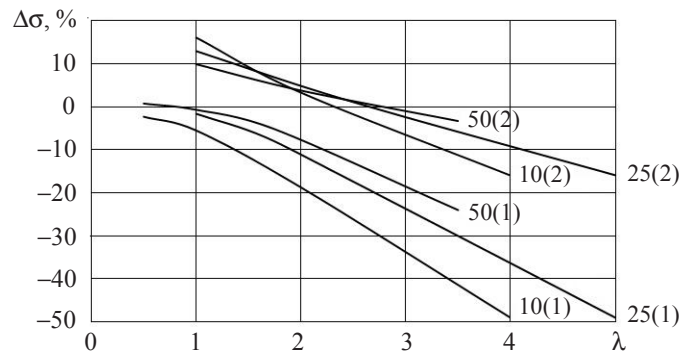


Рис. 3

Для получения рекомендаций по выбору конкретных значений параметров дискретизации исследуемых оболочек с использованием твердотельных КЭ необходимо определиться с принимаемыми значениями меры допускаемой погрешности вычисления напряжений $[\Delta\sigma]$. При исследовании оболочек в качестве допускаемых погрешностей $[\Delta\sigma]$ можно принять либо величину, соизмеримую с относительной толщиной оболочки $[\Delta\sigma] = t$, обычно используемую в качестве меры погрешности решений задач теории оболочек в рамках соотношений Кирхгофа – Лява, либо константу $[\Delta\sigma] = \text{const}$, не зависящую от каких-либо параметров исследуемых конструкций. В частности, по аналогии с [19] можно принять $[\Delta\sigma] = 5\%$.

Полученные в результате расчетов значения допустимой относительной длины элемента $[\lambda]$ в зависимости от относительной толщины оболочки t и числа разбиений n оболочки по толщине для различных моделей КЭ при допустимой погрешности определения напряжений $[\Delta\sigma] = t$ и $[\Delta\sigma] = 5\%$ изображены в виде графиков на рис. 4 и 5 соответственно. На графиках цифрами обозначены индексы моделей КЭ, цифрами в скобках – число разбиений n оболочки по толщине.

Из графиков видно, что при определении допускаемой погрешности напряжений в форме $[\Delta\sigma] = t$ значения допустимой относительной длины элемента $[\lambda]$ мало зависят от относительной толщины оболочки t и определяются используемой моделью КЭ и числом разбиений n оболочки по толщине. Для модели «182» допустимая длина элемента $[\lambda] \approx 1$ достигается только при $n \geq 2$. Для моделей «02» и «186» при $n = 1$ значения относительных длин достаточно близки, однако при $n = 2$ начинают заметно отличаться, причем для модели «02» допустимая длина элемента увеличивается при уменьшении t .

В случае выбора допускаемой погрешности в виде $[\Delta\sigma] = 5\%$ зависимость относительной длины элемента $[\lambda]$ от толщины оболочки t более заметна. Особенно это касается модели «02», при использовании которой с уменьшением t допустимая длина элемента $[\lambda]$ значительно возрастает по сравнению с аналогичной длиной элемента модели «186». Такой эффект объясняется тем, что при значениях $\lambda = 1,0-2,0$ свойства элементов на основе моделей «02» и «186» достаточно близки, однако с увеличением λ в элементах модели «186» начинают проявляться ошибки, обусловленные влиянием соотношений сторон КЭ.

Таким образом, представленные на рис. 4 и 5 результаты позволяют выбрать предельные значения относительных длин КЭ рассмотренных моделей при заданных значениях относительной толщины оболочки.

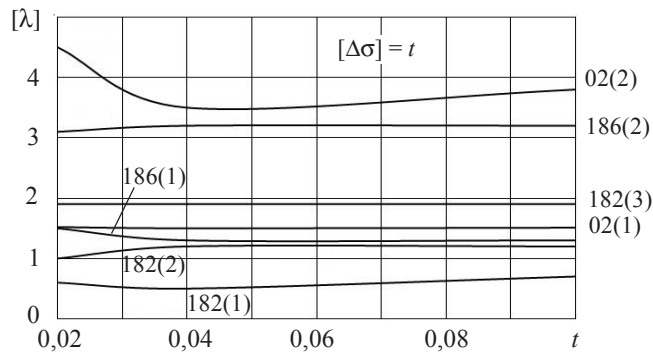


Рис. 4

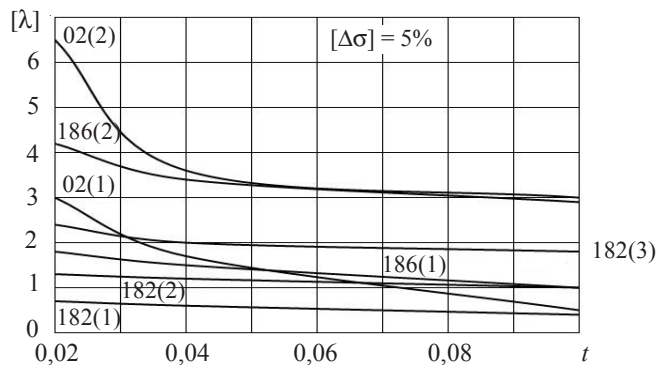


Рис. 5

3. Исследование сходимости реализованных в программных комплексах ANSYS моделей твердотельных элементов в локальных областях сопряжения оболочек

В предыдущем разделе отмечалось, что в окрестности заземленного торца оболочки напряжения для всех рассмотренных моделей КЭ монотонно возрастают по мере сгущения сетки и могут превышать значения напряжений, полученных на основе аналитического решения в рамках гипотез Кирхгофа – Лява. Объяснением этому служит тот факт, что в численном решении к напряжениям от краевого эффекта, описываемым классической теорией оболочек, добавляются локальные напряжения более высокого порядка, характеризующие концентрацию напряжений. Для иллюстрации этого эффекта приведем результаты исследования сходимости напряжений в локальных зонах сопряжения цилиндрической оболочки толщиной H с фрагментами конструкций различной жесткости: абсолютно жесткого фрагмента, моделируемого жестким заземлением оболочки, и плоского днища в виде пластины толщиной $H_d = 2,6H$.

Численное исследование задач строилось на основе наиболее популярных в практике расчетов моделей КЭ программы ANSYS: восьмиузловых КЭ SOLID185(1), SOLID185(2) и квадратичных двадцатиузловых элементов SOLID186(1).

В первом случае рассматривалась заземленная по торцу цилиндрическая оболочка, имеющая радиус $R = 960$ мм, толщину $H = 32$ мм, длину $L = R$, под действием внешнего давления интенсивности p .

Для решения задач использовались ортогональные сетки с числом КЭ по толщине $n = 1-6$ и общим числом КЭ $m = 3-650000$. Оценка полученных результатов осуществлялась на основе анализа относительной погрешности определения напряжений $\Delta\sigma$ в крайних по толщине волокнах защемленного торца оболочки в сравнении с аналитическим решением в рамках гипотез Кирхгофа – Лява.

На рис. 6 приведены зависимости величины $\Delta\sigma$ в точках А и В от параметра m , полученные на основе элементов SOLID185(1) (кривые 1, 4), SOLID185(2) (кривые 2, 5) и SOLID186(1) (кривые 3, 6).

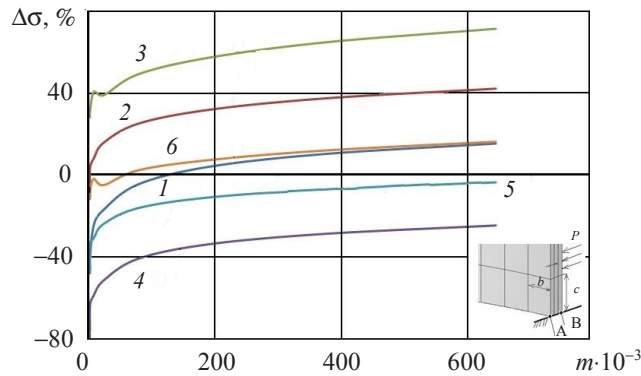


Рис. 6

Результаты численного исследования рассматриваемой задачи показывают, что для всех моделей КЭ уровень напряжений в точке А (на внутренней кромке цилиндра) выше соответствующих напряжений в точке В. Также установлено, что на величину погрешности $\Delta\sigma$ существенно влияет относительная длина элемента λ : при изменении λ от 1 до 6 для всех типов восьмиузловых и двадцатиузловых КЭ погрешность по напряжениям возрастает от 2 до 8 раз.

При сгущении равномерной сетки ($\lambda = 1$) по толщине оболочки от $n = 1$ ($m \sim 3 \cdot 10^3$) до $n = 6$ ($m \sim 650 \cdot 10^3$) все функции $\Delta\sigma = \Delta\sigma(m)$ возрастают, причем кривые для квадратичного двадцатиузлового и модифицированного восьмиузлового элементов располагаются выше, чем для КЭ SOLID185(1).

Во второй задаче рассматривалась нагруженная равномерным внешним давлением цилиндрическая оболочка, имеющая размеры: радиус $R = 960$ мм, толщина $H = 32$ мм, длина $L = R$, с плоским дном толщиной $H_d = 2,6H$. Ниже представлены результаты сходимости численных решений для всех рассмотренных моделей КЭ в зависимости от параметров сгущения сетки при постоянном отношении сторон элементов $\lambda \sim 1$.

На рис. 7 показаны изменения безразмерных величин прогиба цилиндра $\bar{w} = w/H \cdot 10^3$ и напряжений $\bar{\sigma} = (\sigma/E)(R/H)^2 \cdot 10^3$ в точке А на внутренней поверхности стыка цилиндра и днища в зависимости от числа КЭ по толщине оболочки $n = 2, 6$. Кривые 1, 2 и 3 на рисунке соответствуют прогибам, а кривые 4, 5 и 6 – напряжениям в точке А, полученным для КЭ SOLID185(1), SOLID185(2), SOLID186(1) соответственно. Результаты показывают, что при сгущении сетки по толщине оболочки в два-три раза прогибы практически не меняются, в то время как напряжения в наиболее нагруженной точке возрастают в полтора-два раза, демонстрируя отсутствие сходимости численного решения по напряжениям к соответствующему решению на основе соотношений Кирхгофа–Лява.

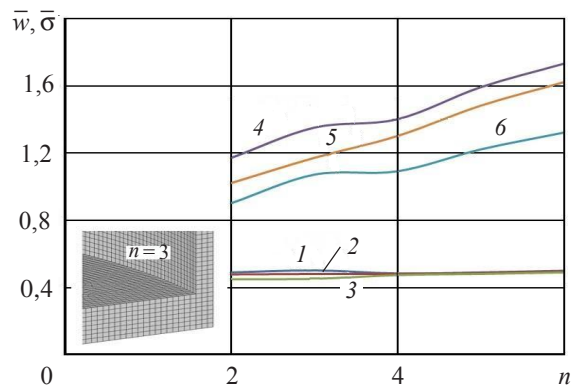


Рис. 7

Заключение

1. Представлен краткий обзор работ, посвященных вопросам применения МКЭ в задачах расчета тонкостенных конструкций. Сформулированы общие требования к координатным функциям в МКЭ при исследовании тонкостенных оболочек общего вида. Рассмотрены основные трудности формулировки эффективных моделей КЭ для решения задач теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа – Лява и сдвиговых моделей типа Тимошенко. Установлены причины низкой эффективности для анализа оболочек традиционно используемых твердотельных моделей КЭ, рассмотрены возможные пути их преодоления.

2. Проведены исследования по оценке влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета оболочек различной относительной толщины при использовании трех различных моделей твердотельных элементов. Исследования проводились на примере расчета круговой цилиндрической оболочки, НДС которой имеет две типовые зоны: моментную зону в окрестности торца цилиндра, закрепленного от нормальных перемещений и углов поворота, и зону безмоментного НДС в окрестности свободного торца оболочки.

В результате расчетов установлено, что для всех рассмотренных моделей КЭ напряжения в окрестности защемленного торца оболочки монотонно возрастают по мере сгущения сетки и при определенных значениях параметра сгущения превышают значения напряжений, полученных на основе аналитического решения, демонстрируя отсутствие сходимости численных решений по напряжениям к соответствующему решению на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

Показано, что для всех рассмотренных задач и моделей КЭ ограничения их применимости определяются погрешностью определения напряжений в моментной зоне (в крайних по толщине волокнах защемленного торца оболочки). В безмоментной зоне значения перемещений и напряжений, вычисленные на основе всех рассмотренных моделей МКЭ и вариантов дискретизации оболочки, хорошо согласуются с аналогичными значениями, полученными на основе точного решения. Отсутствие сходимости по напряжениям в отдельных локальных зонах оболочек затрудняет выбор критерия для оценки эффективности рассматриваемых моделей КЭ. В качестве такого критерия может быть использована относительная погрешность определения напряжений рассматриваемого варианта численного решения

по сравнению с аналитическим решением задачи в рамках гипотез Кирхгофа – Лява.

Получены зависимости допустимых значений параметров КЭ-дискретизации оболочек различной относительной толщины для всех рассмотренных моделей элементов от допускаемой погрешности определения напряжений.

3. Проведены исследования сходимости решений на основе ряда реализованных в программе ANSYS моделей КЭ в локальных зонах сопряжения цилиндрической оболочки с фрагментами конструкций различной жесткости: абсолютно жесткого фрагмента (моделируемого жестким защемлением оболочки) и плоского днища в виде пластины толщиной $H_d = 2,6H$. Результаты показали, что за пределами локальной зоны прогиба оболочки хорошо согласуются с прогибами, полученными на основе аналитического решения, практически не меняясь при сгущении сетки. В локальной зоне при сгущении сетки напряжения в наиболее нагруженной точке постоянно возрастают, демонстрируя отсутствие сходимости численного решения к соответствующему решению на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

Список литературы

1. ANSYS Computer Software. Version 14.03. ANSYS Inc. Canonsburg, PA. 2012.
2. Abaqus. Version 6.14. Dassault Systems. Simulia Corporation. Providence, RI. 2014.
3. Спиридонов В.Ф., Циберев К.В., Рябов А.А. и др. Пакет программ ЛЮГОС. Функциональные возможности решения задач прочности. XIII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 3–7 окт. 2011.
4. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 347 с.
5. Sandia National Laboratories: Sample problem manual for benchmarking of cask analysis codes. Report SAND88-0190. TTC-0780.OC-71. Albuquerque, NM. 1988.
6. Davies G.A. Background of Benchmarks. Glasgow. NAFEM Ltd. 1993.
7. Zenker U., Weber M., Wille F. Finite element mesh design of cylindrical cask under puncture drop test conditions. PATRAM 2010. London. 2010.
8. Bjorkman G.S., Molitoris D.P., Ammerman D. et al. Mesh convergence studies for shell elements developed by the ASME task group on computational modeling. PATRAM 2010. London. 2010.
9. Molitoris D.P., Bjorkman G.S., Chi Fung Tso, Yaksh M. Mesh convergence studies for thick shell elements developed by ASME special working group on computational modeling. PATRAM 2013. San-Francisco. CA. USA. 2013.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Elsevier. 2005. 631 p.
11. Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа, 1982. 480 с.
12. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФТИ, 1990. 269 с.
13. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
14. Pawsey S.F., Clough R.W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. Int. J. Numer. Meth. Eng. 1971. Vol. 3. No 4. P. 575–586.
15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plate and shells. Int. J. Numer. Meth. Eng. 1971. Vol. 3. No 2. P. 275–290.
16. Капустин С.А., Латухин А.Ю. и др. Точность численного интегрирования в конечных элементах с сирендиповой аппроксимацией поля перемещений. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций. 1987. С. 77–83.
17. Малинин М.Ю., Снегирев В.Ф. Четырехугольный конечный элемент пологой оболочки типа Тимошенко. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и ди-

намика деформируемых систем. 1985. С. 61–65.

18. Ботенкова Л.Г., Капустин С.А., Яблонко Л.С. Изопараметрический сдвиговой элемент для анализа оболочек общего вида. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности*. 1986. С. 63–73.

19. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Рябов А.А., Романов В.И., Плакунов Д.А. Применение твердотельных конечных элементов в задачах изгиба балок и пластин. *Проблемы прочности и пластичности* Т. 79. № 1. 2017. С. 76–92.

20. Капустин С.А. Численный анализ нелинейных квазистатических процессов деформирования составных конструкций. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация научных исследований*. 1979. Вып. 10. С. 68–80.

21. Болдычев В.П. Двойная аппроксимация угла поворота при расчете пластин средней толщины. *Известия ВНИИГ*. 1979. Т. 133. С. 68–74.

22. Barlow J. Optimal stress locations in finite element models. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1976. Vol. 10. P. 243–251.

23. Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов*. М.: Мир, 1977. 349 с.

24. Fried I. Numerical integration in the finite element method. *Int. J. Comput. and Struct.* 1974. Vol. 4. No 5. P. 921–932.

References

1. *ANSYS Computer Software. Version 14.03*. ANSYS Inc. Canonsburg, PA. 2012.
2. *Abaqus. Version 6.14*. Dassault Systems. Simulia Corporation. Providence, RI. 2014.
3. Spiridonov V.F., Tsiberev K.V., Ryabov A.A. et al. Paket programm LOGOS. Funktsionalnye vozmozhnosti resheniya zadach prochnosti [The LOGOS software. The functionality of solving strength problems]. *XIII Mezhdunarodnyy seminar "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie"* [XIII International Seminar "Super-Computation and Computer Simulation"]. Sarov, 3–7 Oct. 2011 (In Russian).
4. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A. *Modelirovanie nelineynogo deformirovaniya i razrusheniya konstruksiy v usloviyakh mnogofaktornykh vozdeystviy na osnove MKE* [Modeling nonlinear deformation and destruction of structures in multivariate influences on the basis of FEM]. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 2015. 347 p. (In Russian).
5. Sandia National Laboratories: Sample Problem Manual for Benchmarking of Cask Analysis Codes. *Report SAND88-0190. TTC-0780.OC-71*. Albuquerque, NM. 1988.
6. Davies G.A. *Background of benchmarks*. Glasgow. NAFEM Ltd. 1993.
7. Zenker U., Weber M., Wille F. Finite element mesh design of cylindrical cask under puncture drop test conditions. *PATRAM 2010*. London. 2010.
8. Bjorkman G.S., Molitoris D.P., Ammerman D. et al. Mesh convergence studies for shell elements developed by the ASME task group on computational modeling. *PATRAM 2010*. London. 2010.
9. Molitoris D.P., Bjorkman G.S., Chi Fung Tso, Yaksh M. Mesh convergence studies for thick shell elements developed by ASME special working group on computational modeling. *PATRAM 2013*. San-Francisco. CA. USA. 2013.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier. 2005. 631 p.
11. Sakharov A.S., Kislookii V.N., Kirichevskii V.V. et al. *Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel* [Finite Element Method in Mechanics of Solids]. Kiev. Vischa shcola Publ. 1982. 480 p. (In Russian).
12. Golovanov A.I., Kornishin M.S. *Vvedenie v metod konechnykh elementov statiki tonkikh obolochek* [Introduction to Finite Element Method for the Statics of Thin Shells]. Kazan. KFTI Publ. 1990. 269 p. (In Russian).
13. Obratstov I.F., Savelev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki letatel'nykh apparatov* [Finite Element Method in Problems of Structural Mechanics of Aircrafts]. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1985. 392 p. (In Russian).
14. Pawsey S.F., Clough R.W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 4. P. 575–586.

15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plate and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 2. P. 275–290.
16. Kapustin S.A., Latukhin A.Yu. et al. Tochnost' chislennogo integrirovaniya v konechnykh elementakh s sirendipovoy approksimatsiey polya peremeshcheniy [The accuracy of numerical integration in finite elements with Serendipity approximation of the displacement field]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Issledovanie i optimizatsiya konstruktsey* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Study and Optimization of Structures]. 1987. P. 77–83 (In Russian).
17. Malinin M.Yu., Snegirev V.F. Chetyrekhugol'nyy konechnyy element pologoy obolochki tipa Timoshenko [Quadrangular finite element for shallow shell of Timoshenko type]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Statika i dinamika deformiruemykh sistem* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Statics and Dynamics of Deformable Systems]. 1985. P. 61–65 (In Russian).
18. Botenkova L.G., Kapustin S.A., Yablonko L.S. Izoparametricheskii sdvigovoy element dlya analiza obolochek obshchego vida [ISO-parametric shear element for analysis of shells of General form]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya zadach uprugosti i plastichnosti* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Methods of Solution of Problems of Elasticity and Plasticity]. 1986. P. 63–73 (In Russian).
19. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Ryabov A.A., Romanov V.I., Plakunov D.A. Primenenie tverdotel'nykh konechnykh elementov v zadachakh izgiba balok i plastin [Using solid finite elements in bending problems of beams and plates]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. Vol. 79. No 1. 2017. P. 76–92 (In Russian).
20. Kapustin S.A. Chislennyy analiz nelineynykh kvazistaticheskikh protsessov deformirovaniya sostavnykh konstruktsey [Numerical analysis of nonlinear quasi-static processes of deformation of composite structures]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Algoritmizatsiya i avtomatizatsiya nauchnykh issledovaniy* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Algorithmization and Automation of Scientific Research]. 1979. Iss. 10. P. 68–80 (In Russian).
21. Boldychev V.P. Dvoynaya approksimatsiya ugla povorota pri raschete plastin sredney tolshchiny [Double approximation of the angle of rotation in the calculation of plates of medium thickness]. *Izvestiya VNIIG* [News of ARIH]. 1979. Vol. 133. P. 68–74 (In Russian).
22. Barlow J. Optimal stress locations in finite element models. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1976. Vol. 10. P. 243–251.
23. Strang G., Fix G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesly-Cambridge Press. 1973. 349 p.
24. Fried I. Numerical integration in the finite element method. *Int. J. Comput. and Struct.* 1974. Vol. 4. No 5. P. 921–932.

USING SOLID-BODY FINITE ELEMENTS IN ANALYSING SHELLS

**Kapustin S.A.¹, Churilov Yu.A.¹, Gorokhov V.A.¹,
Ryabov A.A.², Romanov V.I.², Plakunov D.A.²**

¹*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

²*Sarov Engineering Center, Nizhni Novgorod region, Diveevo district,
Satis, Russian Federation*

The issues of effectivity of using solid-body FE-models in problems of analyzing shells are considered. A concise review of works on using the FEM in problems of analyzing thin-walled structures is presented. General requirements to coordinate functions in FE-methods when studying general type thin-walled shells are formulated. The main difficulties in formulating effective FE-models for analyzing problems of the theory of plates and shells based on the Kirchhoff – Love hypothesis and Timoshenko-type shear models are examined. Causes of low effectiveness of conventional solid-body FE-models used for analyzing shells are indicated, and possible ways of overcoming them are considered. The effect of FE-discretization parameters on the accuracy of the

analyses of shells of various relative thicknesses with the use of three different solid-body FE-models has been assessed, which has made it possible to determine admissible values of FE-discretization parameters of shells for all the considered types of FE-models, as a function of the admissible error in determining stresses. Convergence of solutions in local zones of coupling of cylindrical shells with structural elements of various rigidity has been studied for a number of FE-models, implemented in modern software complexes.

The paper presents a version of the model and modeling algorithms for FE-modeling corrosion cracking processes in structural elements loaded by pressure and exposed to aggressive corrosion media. To assess the effectiveness of the present models and algorithms, the failure process of a thin-walled tubular specimen partly submerged into a chlorine-containing liquid and loaded by axial tension is numerically modeled.

Keywords: solid-body finite elements, shells, discretization schemes.